

Дж.Марсден, М.Мак-Кракен

**БИФУРКАЦИЯ
РОЖДЕНИЯ
ЦИКЛА
И ЕЕ
ПРИЛОЖЕНИЯ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“



J. E. Marsden, M. McCracken

**THE HOPF BIFURCATION
AND ITS APPLICATIONS**

with contribution by

**P. CHERNOFF, G. CHILDS, S. CHOW,
J. R. DORROH, J. GUCKENHEIMER,
L. HOWARD, N. KOPELL, O. LANFORD,
J. MALLET-PARET, G. OSTER, O. RUIZ,
S. SCHECTER, D. SCHMIDT, S. SMALE**

SPRINGER-VERLAG NEW YORK

1976

ДЖ. МАРСДЕН, М. МАК-КРАКЕН

БИФУРКАЦИЯ РОЖДЕНИЯ ЦИКЛА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Перевод с английского
Л. М. ЛЕРМАНА

под редакцией
Н. Н. БАУТИНА и Е. А. ЛЕОНТОВИЧ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1980

Книга американских специалистов посвящена теории бифуркаций, которую советские читатели связывают с именами А. М. Ляпунова и А. А. Андронова и которая в последние годы находит широкое поле приложений. Эта теория изучает резкие скачкообразные переходы при потерях устойчивости движения; она интересна как с чисто математической стороны, так и в связи с самыми разнообразными применениями. В книге рассматриваются основы теории бифуркаций и ее применения к решению уравнений с частными производными, гидродинамике, биологическим моделям и другим конкретным задачам.

Рассчитана на математиков-прикладников, физиков-теоретиков и инженеров-исследователей.

Редакция литературы по математическим наукам

1702070000

М $\frac{20204-006}{041(01)-80}$ 06-80

© 1976 by Springer-Verlag New York Inc. All Rights Reserved. Authorised translation from English language edition published by Springer-Verlag Berlin — Heidelberg — New York.

© Перевод на русский язык, с дополнениями, «Мир», 1980

Дж. Марсден, М. Мак-Кракен

БИФУРКАЦИЯ РОЖДЕНИЯ ЦИКЛА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Научный редактор С. В. Чудов. Мл. научн. редактор Л. С. Суркова
Художник В. А. Чернецов. Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор Н. И. Манохина. Корректор Н. И. Баранова

ИБ № 1949

Сдано в набор 28.02.80. Подписано к печати 29.10.80. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 2. Гарнитура латинская. Печать высокая. Объем 11,50 бум. л. Усл. печ. л. 23,00. Уч.-изд. л. 21,42. Изд. № 1/0374. Тираж 8000 экз. Зак. 587. Цена 1 р. 50 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» 129820, Москва, И-110, ГСП 1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгения Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

Главным сюжетом этой книги является бифуркация рождения предельного цикла из сложного фокуса конечномерной динамической системы. В своем предисловии к английскому изданию авторы отмечают, что эту бифуркацию следовало бы называть «бифуркацией Пуанкаре — Андронова — Хопфа», но они остановились на названии «бифуркации Хопфа», считая его более распространенным. У нас в стране указанной бифуркации посвящено довольно много работ и она связывается в первую очередь с именами Ляпунова и Андронова. Поэтому, с любезного согласия авторов, русское издание этой книги было решено назвать иначе.

С именем А. Пуанкаре (1854—1912 гг.) связано открытие предельных циклов. Ему принадлежит метод разыскания предельных циклов, близких к кривым линейной консервативной системы. А. М. Ляпунов в работе «Общая задача об устойчивости движения» (1892 г.) дал метод исследования устойчивости (в смысле Ляпунова) сложных состояний равновесия динамической системы с чисто мнимыми характеристическими корнями и ввел величины, получившие впоследствии название «ляпуновских». Заслуга открытия бифуркации рождения предельного цикла из состояния равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями при изменении параметров системы и обнаружение связи этой бифуркации с ляпуновскими величинами принадлежит А. А. Андронову.

Еще в своем докладе «Математические проблемы автоколебаний», прочитанном на Всесоюзной конференции по колебаниям в 1931 году и опубликованном в книге «I Всесоюзная конференция по колебаниям» (М. — Л., ГТТИ, 1933 г.), А. А. Андронов, не выписывая формул, рассказал о бифуркации рождения предельного цикла из фокуса на плоскости, а также стягивания предельного цикла в фокус, в связи с адекватным математическим описанием мягкого возникно-

вения автоколебаний в ламповом генераторе¹⁾. В первом издании «Теории колебаний» А. А. Андропова и С. Э. Хайкина (1937 г.) бифуркация рождения предельного цикла из сложного фокуса на плоскости изложена уже с математическим доказательством и рассмотрены примеры. Там же приведены рекуррентные дифференциальные уравнения, из которых находятся ляпуновские величины. В дальнейшем сотрудниками А. А. Андропова эта бифуркация рассматривалась в целом ряде работ при исследовании динамических систем из приложений. Она рассматривалась как для систем второго порядка, так и для систем порядка большего двух.

Но хотя все, что связано с бифуркацией появления периодического решения из состояния равновесия с двумя мнимыми корнями в случаях динамических систем второго, третьего и четвертого порядка, в работах советских авторов продвинуто значительно дальше, чем в предлагаемой книге, тем не менее она представляет несомненный интерес.

Прежде всего, метод, использованный Хопфом (несколько отличный от использованного А. А. Андроновым), может оказаться полезным для решения ряда других задач (см., например, главу 3С настоящей книги, а также статью А. А. Пяртли, на которую ссылаются авторы). Кроме того, термин «бифуркация Хопфа» авторы понимают в весьма расширенном смысле и, в частности, тем же термином пользуются при рассмотрении рождения замкнутой инвариантной кривой из неподвижной точки, имеющей собственные значения $e^{\pm i\varphi}$. Этот материал на русском языке освещен лишь в журнальной литературе. Часть материала книги имеет чисто математический характер (гл. 4С посвящена методу усреднения, гл. 6А — канонической форме диффеоморфизма в окрестности неподвижной точки с собственными числами $e^{\pm i\varphi}$, часть гл. 7 посвящена группам Ли, гл. 8А — нелинейным группам и полугруппам). Но главный интерес книги заключается в применении теории к уравнениям в частных производных и особенно — к задачам гидродинамики. Это приме-

¹⁾ В том же докладе А. А. Андронов рассмотрел бифуркацию, связанную с исчезновением двукратного предельного цикла и с разделением двукратного цикла на два простых.

нение существенно опирается на теорему о центральном многообразии, изложенную в гл. 2.

Несмотря на несколько эскизный характер изложения, все, касающееся этих задач, содержит много нового и отсутствует в монографиях. Отметим, в частности, пример с течением Куэтта, обсуждение концепции Рюэля и Такенса возникновения турбулентности, изложение (сделанное Чайльдсом) оригинальной работы Иосса, в которой рассматривается возникновение периодического течения из стационарного в некоторых задачах динамики жидкости. Представляет интерес сделанное Руизом изложение работ Кирхгесснера и Килхёффера, в которых рассматриваются модели Тейлора и Бенара течения жидкости и бифуркации в них.

Последние три главы книги не имеют прямого отношения к бифуркации рождения цикла. Они написаны известными американскими математиками (Смейлом и другими) и также содержат много интересного.

Таким образом, хотя часть материала предлагаемой книги имеется в ряде советских изданий и хотя некоторые ее главы написаны очень бегло, эта книга, особенно в части приложений теории к самым разным задачам, представляет живой интерес. Мы надеемся, что ее русское издание привлечет внимание читателей к поискам новых приложений этой классической теории.

В конце книги помещены три дополнения, которые, как нам кажется, будут полезны читателям: «Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости состояний равновесия и периодических движений» (Н. Н. Баутин и Л. П. Шильников), «Теория бифуркаций и модель Лоренца» (Л. П. Шильников), «Комментарии к теореме Хопфа» (Е. А. Леонтович).

В заключение мы хотим поблагодарить авторов, особенно проф. Дж. Марсдена, за проявленное ими внимание к подготовке русского издания их книги.

*Н. Баутин,
Е. Леонтович*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель этих заметок — предложить достаточно полное, хотя и не исчерпывающее изложение того, что обычно называют бифуркациями рождения предельного цикла, а также их приложений к некоторым специальным задачам, в том числе к вычислению условий устойчивости. Исторически тема эта восходит к работам Пуанкаре [1] приблизительно 1892 г.; она интенсивно обсуждалась А. А. Андроновым и А. А. Виттом [1] и их соавторами, начиная с 1930 г. Основная работа Хопфа [1] появилась в 1942 г. Хотя термин «бифуркация Пуанкаре — Андронова — Хопфа» (а иногда сюда также включают и Фридрихса) был бы более точным, название «бифуркация Хопфа» кажется нам более распространенным. Самый существенный вклад Хопфа — обобщение результата с двумерного случая на высшие размерности. [1]¹⁾

Основная техника, используемая в книге — это метод инвариантных многообразий. Здесь мы следуем Рюэлю и Такенсу [1] (с некоторыми изменениями), а также добавляем примеры и дополнительные доказательства. Некоторые части изложения в основном тексте взяты из работ П. Чернова, Дж. Дорро, О. Ланфорда и Ф. Вейслера, которым мы весьма признательны.

Метод инвариантных многообразий часто встречается в работах по динамическим системам и обыкновенным дифференциальным уравнениям (см., например, Хейл [1, 2] и Хартман [1]). Применяются, конечно, и другие методы. Чтобы представить более сбалансированную картину, мы включили в книгу примеры других подходов, в частности перевод (выполненный Л. Ховардом и Н. Коппель) оригинальной работы Хопфа (как правило, труднодоступной). Эти методы, использующие степенные ряды и масштабирование, использовались в гидромеханике, среди многих других, Джозефом и Сэттинджером [1]; в двух главах даны изложения этих идей, взятые из работ Иосса [1—6], а также Киршгасснера и Кильхоффера [1] (это сделано Г. Чайлдсом и О. Руизом).

Статьи С. Смейла, Дж. Гукенхеймера и Г. Остера показывают применения развиваемых здесь идей к биологическим задачам, а работа Д. Шмидта — к гамильтоновым системам. Другие приложения и прочие относящиеся сюда вопросы изложены в монографиях А. А. Андронова, А. А. Витта и С. Э. Хайкина [1], Н. Минорского [1] и Р. Тома [1].

Бифуркация рождения цикла — это появление периодических орбит («автоколебаний») из устойчивой неподвижной

¹⁾ Ссылки вида [1] относятся к примечаниям редакторов в конце книги. — *Прим. ред.*

точки при прохождении параметра через критическое значение. В исходном подходе Хопфа определение устойчивости рождающихся периодических орбит в каждом конкретном случае сводилось к довольно громоздкому вычислению. Здесь мы даем для этого явные алгоритмы, которые легко применять в примерах. (Для сравнения с формулами Хопфа см. гл. 4 и 5А.) Метод усреднения, изложенный С. Чоу и Ж. Малле-Паре в гл. 4С, дает другой метод определения устойчивости и, как нам кажется, он будет особенно полезен при исследовании следующей бифуркации — рождения инвариантного тора, где могут помочь только численные методы, так как периодическая орбита в явном виде обычно неизвестна.

Для применения к уравнениям с частными производными решающим является предположение о гладкости по всем переменным при $t > 0$ полупотока, определяемого уравнениями. Это позволяет применить технику инвариантного многообразия и, стало быть, бифуркационные теоремы (Марсден [2]). Для определения гладкости в конкретных примерах могут быть полезными результаты Дорро и Марсдена [1], часть из которых представлена здесь. Аналогичные идеи об использовании гладкости были независимо предложены другими авторами, например Д. Генри [1].

Мы почти не касаемся и не обсуждаем сколь-нибудь детально некоторых направлений дальнейших исследований и обобщений, сформулированных в работах Йоста и Зендера [1], Такенса [1, 2], Крендалла и Рабиновича [1, 2], В. И. Арнольда [1, 2], Коппель и Ховарда [1—6]. Чтобы указать возможные обобщения, мы приводим только некоторые результаты Чейфи [1] и Рюэля (они изложены здесь С. Шектером).

Тема эта никоим образом не исчерпана. С большой частотой появляются работы по приложениям к неустойчивостям в биологии (см., например, Зиман [2], Гарел [1—12] и гл. 10, 11), в технике (например, «флаттер» или автоколебания в конструкциях, электрических цепях, ядерных установках и других системах; см. Аронсон [1], Зиглер [1], Кноп и Уилкс [1]), а также исследования по колебательным процессам в атмосфере и осцилляциям магнитного поля Земли (см. Дюран [1]). К тому же и качественная теория, которую Рюэль и Такенс предложили применить для описания турбулентности, еще недостаточно хорошо разработана (см. гл. 9). В этом направлении нам кажутся важными работы Ньюхауса и Пейксото [1] и Александера и Йорка¹⁾. Другая плодотвор-

¹⁾ См. также Афраймович, Быков, Шильников [1], а также обзоры Шильникова [1] и Пейлиса [1]. — *Прим. перев.*

ная область приложений — устойчивые колебания в нелинейных волнах, см. Уизем [1]. Мы надеемся, что наши заметки послужат путеводителем по этой тематике и будут полезны всем, кто пожелает изучить или применить связанные с ней многообещающие методы.

После завершения наших вычислений устойчивости нам было приятно узнать, что и другие испытали те же трудности, что и мы, при применении результата Хопфа в том виде, в котором он приводится в литературе, к конкретным задачам размерности ≥ 3 . Для преодоления этих трудностей были получены аналогичные формулы (см. Сю и Казаринов [1, 2] и Пур [1]).

Другой представленный здесь важный новый результат — наше доказательство возможности применения бифуркационной теории Хопфа к нелинейным параболическим уравнениям с частными производными. Это доказательство, основанное на теории инвариантного многообразия, значительно проще, чем существующие, и будет полезно во многих других ситуациях, включая теорию бифуркаций для эволюционных уравнений.

Начало этим заметкам было положено на семинаре, проходившем в Беркли в 1973—1974 гг. Мы хотим поблагодарить всех участвовавших в создании этой книги: П. Чернова, Г. Чайлдса, С. Чоу, Дж. Р. Дорро, Дж. Гукенхеймера, Л. Ховарда, Н. Коппель, О. Ланфорда, Ж. Малле-Паре, Г. Остера, О. Руиза, С. Шектера, Д. Шмидта и С. Смейла. Заранее приносим извинения всем тем, чей вклад в теорию бифуркаций здесь не отмечен; известные нам работы включены в библиографию, которая, возможно, не полна. Много других ссылок можно найти в обширной библиографии к книге Чезари [1]. Мы также благодарны всем тем, кто проявил интерес к нашим заметкам и сделал ценные замечания. Это: Р. Абрахам, Д. Аронсон, А. Чорин, М. Крендалл, Р. Кашмен, С. Дезоер, А. Фишер, Л. Гласс, Дж. М. Гринберг, О. Гарел, Дж. Хейл, Б. Хассар, С. Хастингс, М. Хирш, Э. Хопф, Н. Д. Казаринов, Дж. П. Ла-Саль, А. Мисс, Ч. Пью, Д. Рюэль, Ф. Такенс, И. Ван и А. Вайнштейн. Особо мы благодарны Д. А. Йорку за материал гл. 3С и ему и Д. Рюэлю за указание нам примера уравнений Лоренца (см. пример 4В.8). Наконец, мы благодарны Барбаре Комацу и Джоди Андерсон за прекрасную работу по печатанию рукописи.

*Джерролд Марсден
Марджори Мак-Кракен*

Глава I

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ УСТОЙЧИВОСТИ И ТЕОРИЮ БИФУРКАЦИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И ГИДРОМЕХАНИКЕ

Предположим, что мы изучаем физическую систему, состояние которой описывается дифференциальным уравнением $\frac{dx}{dt} = X(x)$, удовлетворяющим условиям теоремы существования и единственности решений. Пусть x_0 — особая точка уравнения, т. е. $X(x_0) = 0$. Представим себе, что мы смогли экспериментально установить, что в момент $t = 0$ система находится в состоянии x_0 . Можем ли мы быть уверены, что она останется в этом состоянии и далее? Хотя формально-математический ответ на этот вопрос, очевидно, положителен, он, к сожалению, имеет мало отношения к тому, что мы хотим выяснить. Реальные эксперименты очень редко дают точные ответы на вопросы о поведении идеализированных моделей, и поэтому в большинстве случаев вопрос следует ставить так: будет ли система оставаться вблизи x_0 , если в начальный момент она была близка к этому состоянию? Ответ на уточненный таким образом вопрос уже может быть отрицательным, но даже в этом случае более детальное изучение дифференциального уравнения позволяет иногда предсказывать будущее поведение системы. Проиллюстрируем вышесказанное на простом примере. Рассмотрим два дифференциальных уравнения на действительной прямой

$$x'(t) = -x(t), \quad (1.1)$$

$$x'(t) = x(t), \quad (1.2)$$

решениями которых соответственно являются

$$x(x_0, t) = x_0 e^{-t}, \quad (1.1')$$

$$x(x_0, t) = x_0 e^{+t}. \quad (1.2')$$

Отметим, что 0 — особая точка обоих уравнений. В первом случае $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(x_0, t) = 0$ для всех $x_0 \in \mathbb{R}$. Точки всей действительной прямой движутся к нулю, поэтому здесь не трудно предсказать будущее поведение системы: если точка x_0 находилась вблизи нуля, то и $x(x_0, t)$ будет близка к нулю.

Предположим теперь, что мы наблюдаем систему, состояние которой описывается уравнением (1.2). Эксперимент, из которого получено приближительное равенство $x_0 = 0$, уже не позволяет утверждать, что и в дальнейшем $x(x_0, t)$ останется вблизи нуля, так как все точки, кроме нуля, быстро уходят от него. Более того, этот эксперимент вообще не позволяет нам дать правдоподобное предсказание относительно положения $x(t)$, поскольку если $x(0) < 0$, то $x(t)$ быстро уходит от начала к $-\infty$, а если $x(0) > 0$, то $x(t)$ уходит к $+\infty$.

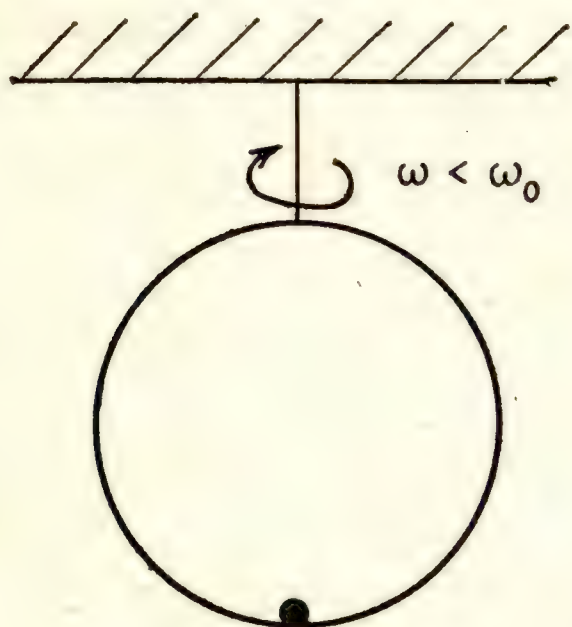


Рис. 1.1а.

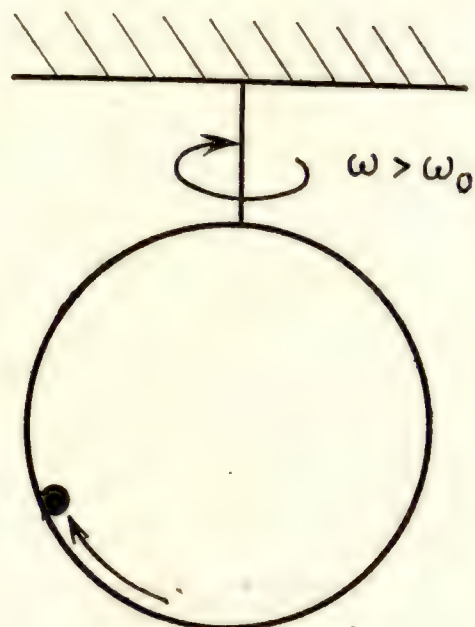


Рис. 1.1б.

Поэтому наблюдатель, следящий за такой системой, видел бы, что иногда $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} -\infty$, а иногда $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} +\infty$. Решение $x(t) = 0$, скорее всего, вообще не будет наблюдаться из-за имеющихся всегда слабых возмущений начального состояния. Такой тип поведения часто встречается в природе. И происходит это вовсе не вследствие неединственности решений дифференциального уравнения, а по причине *неустойчивости* решения относительно малых возмущений начальных условий.

Отсюда мы можем сделать вывод, что при «описании природы» имеют смысл только *устойчивые* математические модели¹⁾.

Рассмотрим теперь следующий пример²⁾. К потолку подвешен жесткий обруч, и в нижней точке обруча покоится маленький шарик. Обруч вращается с частотой ω вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр (рис. 1.1а). При малых значениях ω шарик остается в нижней точке обруча, и это положение устойчиво. Когда же ω проходит через некоторое критическое значение ω_0 , шарик перекаты-

¹⁾ Дальнейшие обсуждения см. в книге Абрахама и Марсдена [1], заключительная глава.

²⁾ Этот пример предложен нам Е. Калаби.

вается по обручу в новое устойчивое положение $x(\omega)$. Шарик может перекатываться вправо или влево в зависимости от направления начального смещения (рис. 1.1б). Нижняя точка обруча остается положением равновесия, однако оно стало неустойчивым и практически никогда не наблюдается. Хотя решения дифференциального уравнения движения шарика удовлетворяют теореме единственности при всех значениях ω , при $\omega > \omega_0$ эта единственность ничего нам не дает: мы не можем предсказать, куда сместится шарик. Математи-

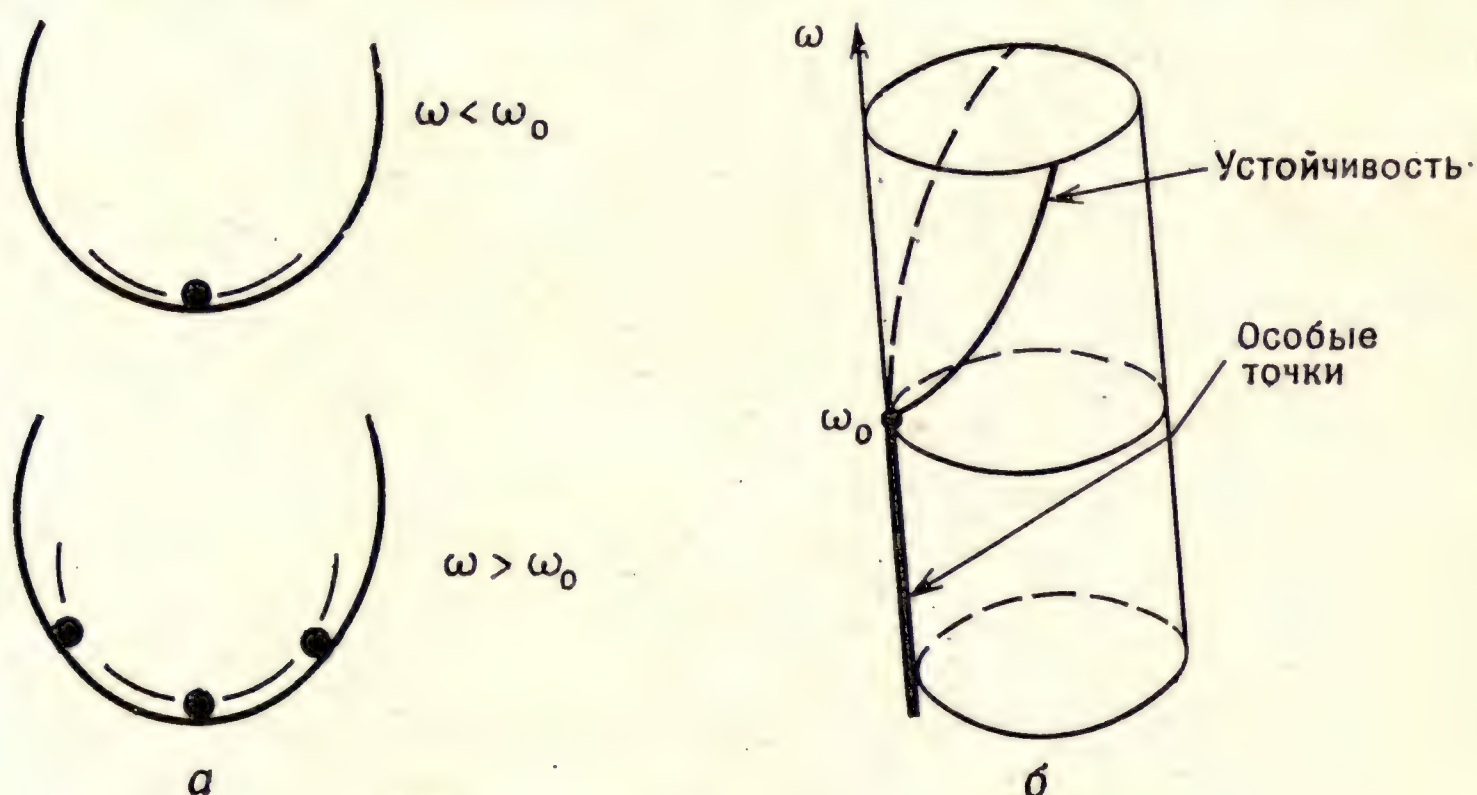


Рис. 1.2.

чески это означает, что исходная устойчивая особая точка стала неустойчивой и расщепилась на две устойчивые особые точки (см. рис. 1.2 и упр. 1.16 ниже)¹⁾.

В связи с тем что вопросы устойчивости имеют важное практическое значение, мы сформулируем точное определение устойчивости и выведем некоторые критерии проверки последней.

(1.1) Определение. Пусть F_t — некоторый C^0 -поток (или полупоток)²⁾ на топологическом пространстве M , и пусть A — инвариантное множество, т. е. $F_t(A) \subset A$ для всех t .

¹⁾ В настоящем параграфе рассматривается не характер устойчивости данной особой точки (как в предыдущем простом примере), а зависимость поведения системы от параметра. — *Прим. ред.*

²⁾ То есть $F_t: M \rightarrow M$, F_0 — тождественное отображение и $F_{t+s} = F_s \circ F_t$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$. Символ C^0 означает, что $F_t(x)$ непрерывно по (t, x) . Полупоток определен только для $t \geq 0$. Более подробно об этом см. Ленг [1], Хартман [1] или Абрахам и Марсден [1], где обсуждаются потоки, порожденные векторными полями. Бесконечномерный случай рассматривается в гл. 8А или у Абрахама и Марсдена [1].

Будем называть множество A *устойчивым* (соответственно *асимптотически устойчивым* или *аттрактором*), если для любой окрестности U множества A существует такая его окрестность V , что траектория $x(x_0, t) \equiv F_t(x_0)$ принадлежит U , если $x_0 \in V$ (соответственно $\bigcap_{t \geq 0} F_t(V) = A$).

Другими словами, множество A устойчиво (или является притягивающим), если для любой начальной точки, близкой

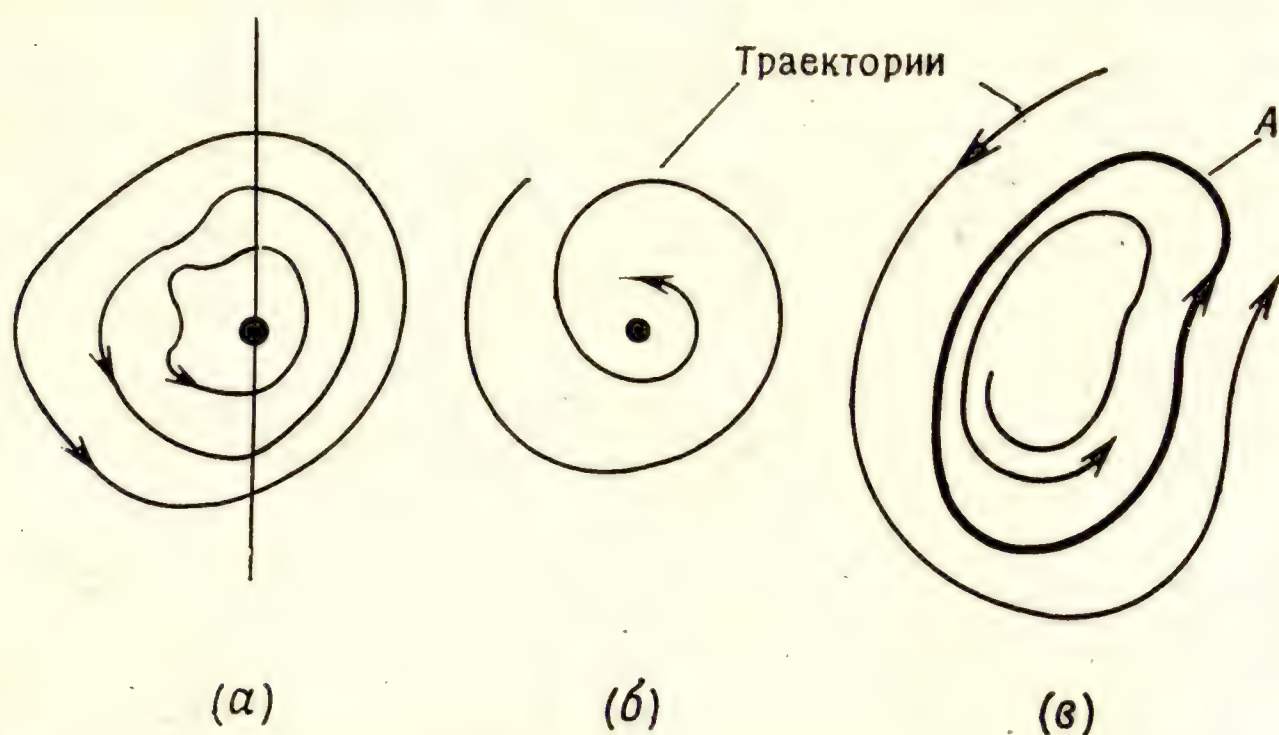


Рис. 1.3. a — устойчивая особая точка; b — асимптотически устойчивая особая точка; $в$ — устойчивая замкнутая орбита.

к A , траектория, проходящая через эту точку, остается вблизи A (соответственно стремится к A) (см. рис. 1.3).

Множество A называется *неустойчивым*, если оно не является *устойчивым*.

(1.2) *Упражнение.* Показать, что в примере с шариком в обруче нижняя точка обруча является устойчивой при $\omega < \omega_0 = \sqrt{g/R}$, а при $\omega > \omega_0$ существуют две устойчивые особые точки, определяемые уравнением $\cos \theta = g/\omega^2 R$, где θ — угол, отсчитываемый от направленной вертикально вниз оси, R — радиус обруча, g — ускорение силы тяжести.

Простейший случай, когда можно установить устойчивость особой точки x_0 , — это случай конечномерной линейной системы. Пусть $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение; тогда $x(x_0, t) = e^{tX}(x_0)$ — поток, соответствующий этому отображению¹⁾. Очевидно, что нуль является особой точкой.

¹⁾ Здесь под e^{tX} понимается линейный оператор, который является аналитической функцией оператора X и который может быть записан в виде суммы ряда $\sum t^k X^k / k!$. Если в $\mathbb{R}^n$ выбран базис, то X задается $(n \times n)$ -матрицей B и e^{tX} задается матрицей e^{tB} . — Прим. перев.

Обозначим через $\{\lambda_j\}$ множество собственных значений X . Тогда $\{e^{\lambda_j t}\}$ — множество собственных значений e^{tX} . Предположим, что $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ для всех j . Используя каноническую жорданову форму матрицы, можно проверить, что в этом случае точка 0 асимптотически устойчива, так как $|e^{\lambda_j t}| = e^{\operatorname{Re} \lambda_j t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Если же существует λ_j с положительной действительной частью, то 0 — неустойчивая точка. В более общем случае имеет место

(1.3) **Теорема.** Пусть $X: E \rightarrow E$ — непрерывное линейное отображение банахова пространства E в себя. Нуль является устойчивой притягивающей точкой потока, порожденного X , если спектр $\sigma(X)$ отображения X лежит в открытой левой полуплоскости¹⁾. Если существует $z \in \sigma(X)$ с $\operatorname{Re} z > 0$, то нуль — неустойчивая точка.

Эта теорема будет доказана в гл. 2А, где помещен также обзор некоторых необходимых сведений о спектральной теории.

Обратимся теперь к случаю нелинейных систем. Пусть P — банахово многообразие²⁾, X — векторное поле класса C^1 на P . Пусть $X(p_0) = 0$. Тогда $dX(p_0): T_{p_0}(P) \rightarrow T_{p_0}(P)$ — непрерывное линейное отображение банахова пространства в себя. Следующую основную теорему Ляпунова [1] мы также докажем в гл. 2А.

(1.4) **Теорема.** Пусть X — векторное поле класса C^1 на банаховом многообразии P и p_0 — особая точка X , т. е. $X(p_0) = 0$. Обозначим через F_t поток, определенный полем X , т. е. $\frac{\partial}{\partial t} F_t(x) = X(F_t(x))$, $F_0(x) = x$. (Заметим, что $F_t(p_0) = p_0$ для всех t .)

Если спектр $dX(p_0)$ лежит в левой полуплоскости, т. е. $\sigma(dX(p_0)) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$, то особая точка p_0 асимптотически устойчива.

Если в спектре существует изолированная точка $z \in \sigma(dX(p_0))$, для которой $\operatorname{Re} z > 0$, то особая точка p_0 неустойчива. Если же $\sigma(dX(p_0)) \subset \{z \mid \operatorname{Re} z \leq 0\}$ и существует $z \in \sigma(dX(p_0))$ с $\operatorname{Re} z = 0$, то устойчивость не может быть определена по линеаризованному уравнению.

(1.5) **Упражнение.** Рассмотрим следующее векторное поле на $\mathbb{R}^2$: $X(x, y) = (y, \mu(1 - x^2)y - x)$. Определить, является ли

¹⁾ Напомним, что спектр непрерывного линейного оператора является компактным множеством. — Прим. перев.

²⁾ Мы будем использовать только самые элементарные факты теории многообразий, главным образом из-за удобства геометрического языка. Основные ее идеи изложены у Ленга [1] или Марсдена [4].

начало координат неустойчивой, устойчивой или притягивающей точкой при $\mu < 0$, $\mu = 0$ и $\mu > 0$.

Многие интересные физические задачи приводят к дифференциальным уравнениям, зависящим от параметра (например, угловая скорость ω в задаче о шарике в обруче). Пусть $X_\mu: P \rightarrow TP$ — векторное поле (гладкое) на банаховом многообразии P , зависящее от параметра μ . Предположим, что существует непрерывная кривая $p(\mu)$ на многообразии P , такая, что $X_\mu(p(\mu)) = 0$, т. е. при каждом μ точка $p(\mu)$ — особая точка потока X_μ . Предположим, что точка $p(\mu)$ является притягивающей для $\mu < \mu_0$ и неустойчивой для $\mu > \mu_0$. В этом случае точка $(p(\mu_0), \mu_0)$ называется *точкой бифуркации* потока X_μ . При значениях $\mu < \mu_0$ поток X_μ можно описать (по крайней мере в окрестности точки $p(\mu)$), сказав, что траектории потока стремятся к $p(\mu)$ при $t \rightarrow \infty$. Однако при значениях $\mu > \mu_0$ это уже не так, и поэтому при переходе через значение μ_0 характер потока может внезапно измениться. Так как особая точка $p(\mu)$ неустойчива при $\mu > \mu_0$, то нас, естественно, будет интересовать существование устойчивого режима при $\mu > \mu_0$. Таким образом, нас интересуют те бифуркации, в результате которых при значениях параметра, больших критического, возникают устойчивые режимы.

Пусть, например, существует несколько кривых $p_i(\mu)$, таких, что при всех μ выполняется равенство $X_\mu(p_i(\mu)) = 0$, т. е. $p_i(\mu)$ — особая точка потока X_μ при всех μ . При значении $\mu = \mu_0$ эти кривые могут иметь общую точку.

Могут существовать кривые устойчивых особых точек при $\mu > \mu_0$. Так, в примере с шариком в обруче существуют две кривые $p_1(\omega)$ и $p_2(\omega)$ для $\omega \geq \omega_0$, одна поднимается с левой стороны обруча, а другая — с правой (рис. 1.2).

Возможен и другой тип бифуркаций, связанный с появлением периодических орбит¹⁾. Именно, могут существовать кривые $\alpha: I \rightarrow P$, такие, что $\alpha(\mu_0) = p(\mu_0)$, а $\alpha(\mu)$ ($\mu \neq \mu_0$) является точкой, лежащей на замкнутой орбите γ_μ потока X_μ (рис. 1.4). К этому типу принадлежит *бифуркация рождения цикла из фокуса*. Ниже мы кратко рассмотрим примеры таких бифуркаций в гидродинамике.

Появление устойчивых замкнутых орбит (периодических решений) можно интерпретировать как «сдвиг устойчивости» от исходного стационарного решения к периодическому решению, так как точка, взятая вблизи исходной особой точки,

¹⁾ Авторы вместо широко используемого в русской математической литературе термина «траектория» используют термин «орбита». Мы сохраняем терминологию авторов. — Прим. ред.

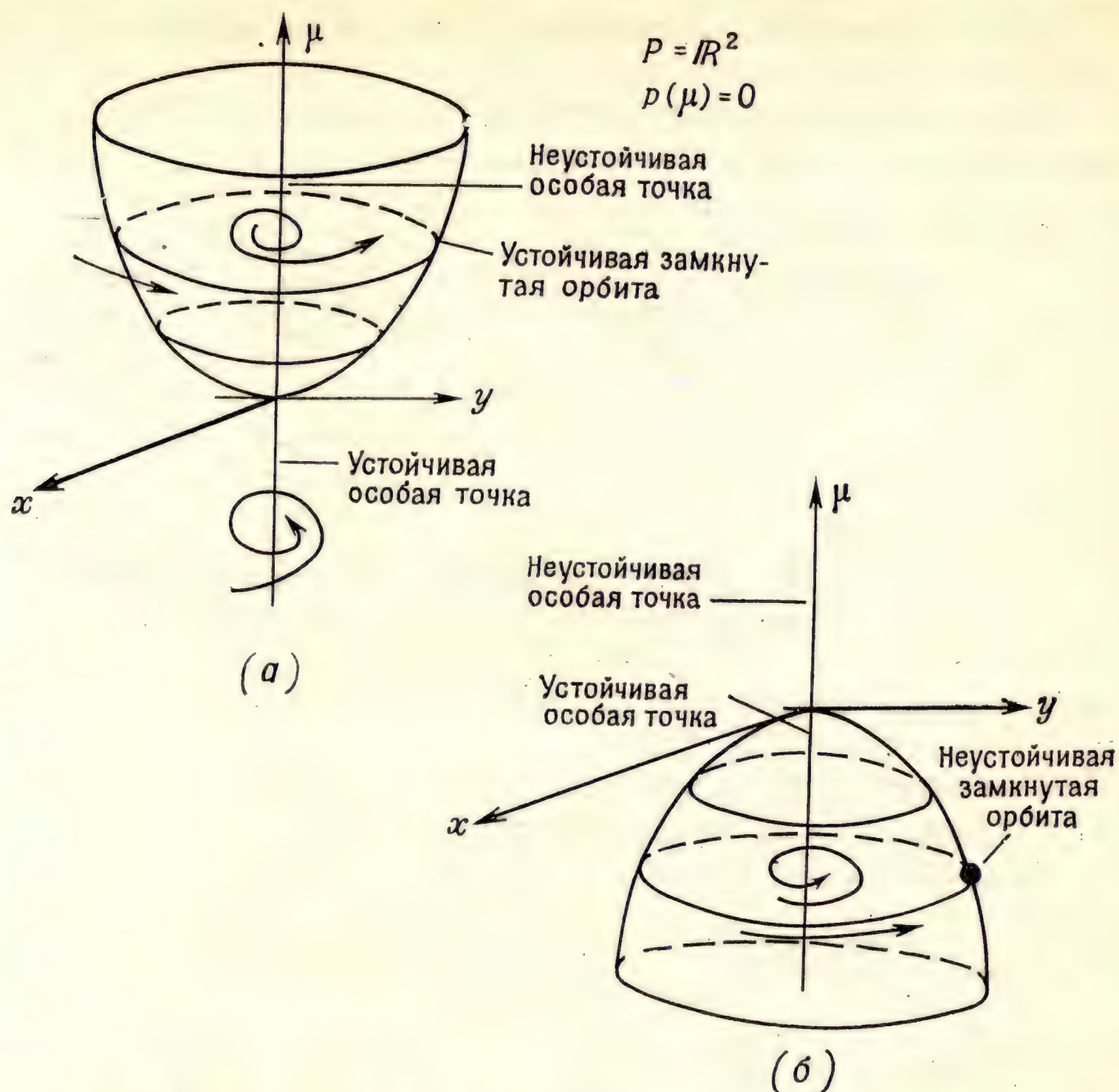


Рис. 1.4. Общее понятие о бифуркации рождения цикла: а — суперкритическая бифуркация (устойчивые замкнутые орбиты); б — субкритическая бифуркация (неустойчивые замкнутые орбиты).

теперь уже притягивается к замкнутой орбите и со временем становится неотличимой от нее (рис. 1.4 и 1.5).

Возможны также и другие бифуркации, например появление устойчивого двумерного тора из устойчивой замкнутой орбиты. При наличии симметрий ситуация еще более усложняется. Подробно все это рассматривается в гл. 7, здесь же мы только приведем пример.

(1.6) *Пример: шарик в сфере.* Твердая полая сфера подвешена к потолку и вращается с частотой ω вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр (рис. 1.6).

При малых ω нижняя точка сферы устойчива, но при $\omega > \omega_0$ шарик поднимается на боковую часть сферы в новое положение равновесия. Для каждого $\omega > \omega_0$ существует устойчивая инвариантная окружность состояний равновесия (рис. 1.7). Из-за наличия симметрии в этой задаче мы

получаем окружность состояний равновесия, а не изолированное состояние равновесия.

Прежде чем обсуждать методы определения типа бифуркации и связанные с этим вопросы устойчивости, мы кратко

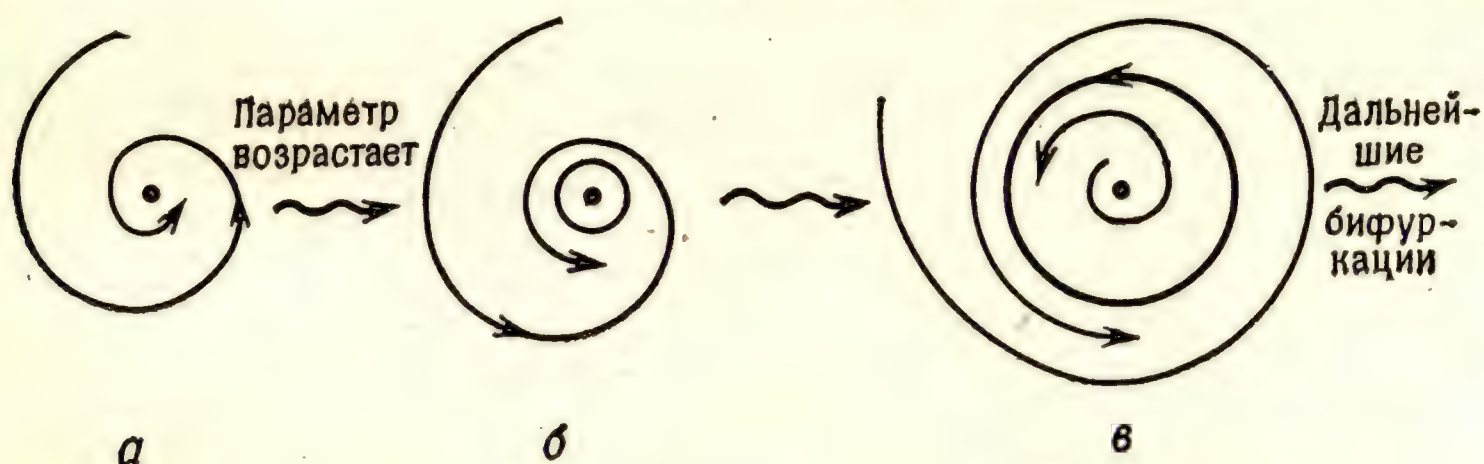


Рис. 1.5. Бифуркация рождения цикла: а — устойчивая точка; б — появление замкнутой орбиты; в — амплитуда замкнутой орбиты возрастает.

опишем общую схему изменения областей притяжения, данную Р. Абрахамом [1], [2].

Представим себе некий ландшафт, по которому течет вода. Аттрактору сопоставим бассейн, собирающий воду. Более точно, если F_t — поток на M и A — аттрактор, то бассейн

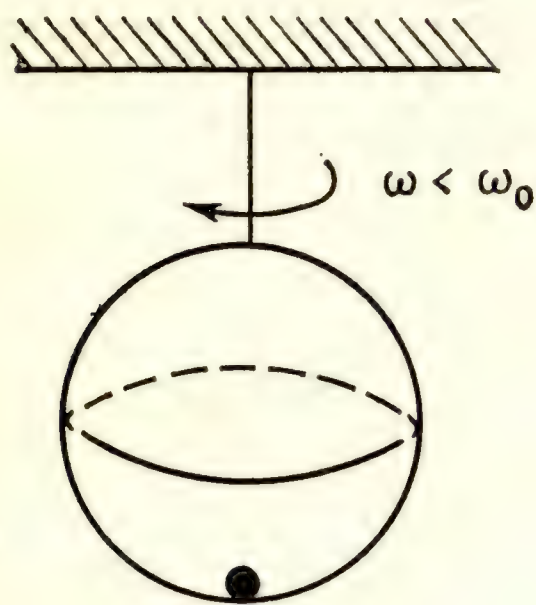


Рис. 1.6.

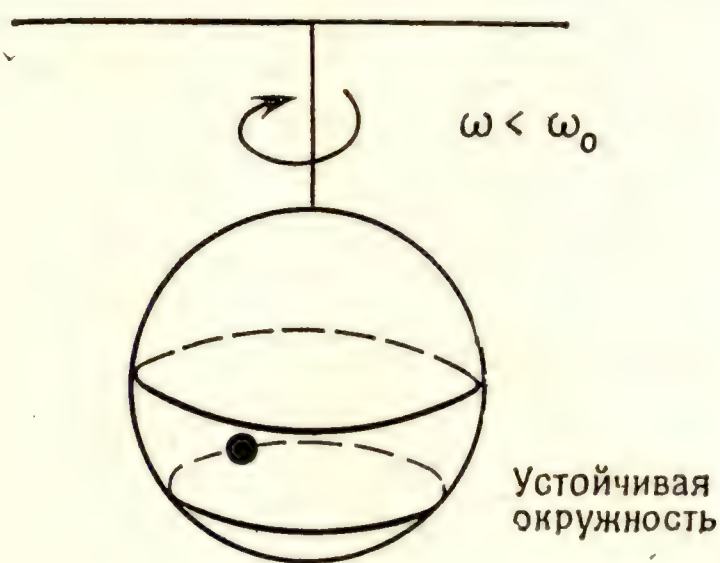


Рис. 1.7.

аттрактора A — это множество тех $x \in M$, которые стремятся к A при $t \rightarrow +\infty$ (обычно в этом случае используют менее живописный термин: не бассейн, а «устойчивое многообразие»).

При изменении параметров ландшафт деформируется и поток изменяется. Бассейны могут объединяться, образовываться новые бассейны, старые исчезать, сами аттракторы усложняться и т. д. Бифуркацию рождения цикла из особой точки можно представить себе следующим образом. Мы начинаем с простого бассейна, имеющего форму параболоида,

что соответствует точечному аттрактору. Когда параметр меняется, в центре бассейна вырастает маленький холмик. Теперь новый аттрактор есть окружность (аналог периодической орбиты в теореме о рождении цикла) и ее бассейн равен исходному за вычетом верхней точки холмика¹⁾. Заметим, что при этом могут самопроизвольно появляться или исчезать сложные аттракторы, если возвышенное плато, опускаясь, превратится в бассейн или бассейн поднимется, образуя плато.

В оставшейся части книги, а также в литературе, указанной в библиографии, приведено большое число примеров из различных разделов естествознания, в которых важную роль играет бифуркация рождения цикла из особой точки. Она описывает возникновение колебаний в химических и биологических системах (см., например, Коппель, Ховард [1—6]²⁾, Абрахам [1—2] и гл. 10, 11 настоящей книги), включая такие явления, как фибрилляция сердца³⁾.

Один из наиболее изученных примеров возникает в гидродинамике. Для того чтобы рассмотреть его, мы сначала изложим некоторые основные понятия этой науки.

Уравнения Навье—Стокса

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^3$ — открытое ограниченное множество с гладкой границей. Будем считать D заполненным несжимаемой однородной (постоянной плотности) жидкостью. Обозначим через u и p скорость и давление жидкости соответственно. Если жидкость вязкая и изменениями температуры можно пренебречь, то уравнения, описывающие движения жидкости, таковы:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u - \nu \Delta u = - \operatorname{grad} p, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} u = 0. \quad (1.4)$$

В качестве граничных условий обычно берется $u|_{\partial D} = 0$ (или $u|_{\partial D}$ считается заданным, если граница движущаяся), а в качестве начальных условий — $u(x, 0) = u_0(x)$. Задача состоит в отыскании $u(x, t)$ и $p(x, t)$ для $t > 0$. Первое урав-

¹⁾ Здесь иллюстрируется возникновение аттрактора в форме замкнутой кривой, но этот аттрактор является не периодической траекторией, а кривой неподвижных точек. — *Прим. перев.*

²⁾ См. также Андронов и др. [1], где рассмотрены различные случаи появления автоколебаний в технических устройствах. — *Прим. ред.*

³⁾ То, что фибрилляция сердца связана с бифуркацией рождения цикла, является гипотезой, сообщенной нам А. Фишером; см. Зиман [2].

нение (1.3) аналогично второму закону Ньютона, второе уравнение (1.4) эквивалентно условию несжимаемости жидкости¹⁾.

Дифференциальное уравнение (1.3) можно трактовать как векторное поле на пространстве $\mathcal{X}$ всех соленоидальных векторных полей на D ; поэтому оно определяет поток на D (мы не касаемся сейчас имеющихся здесь существенных технических трудностей; см. гл. 8).

Число Рейнольдса потока определяется как $N_{\text{Re}} = \frac{UL}{\nu}$, где U и L — характерные скорость и длина, ν — коэффициент

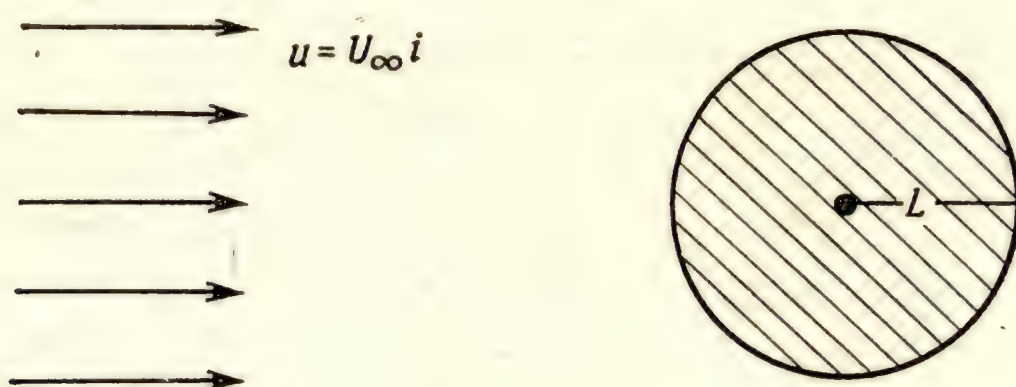


Рис. 1.8.

кинематической вязкости. Так, например, если мы рассматриваем поток, обтекающий сферу и имеющий постоянную скорость на бесконечности $U_\infty i$ (рис. 1.8), то в качестве L можно взять радиус сферы и $U = U_\infty$.

Если жидкость идеальная ($\nu = 0$), то $N_{\text{Re}} = \infty$ и движение жидкости удовлетворяет уравнениям Эйлера:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\text{grad } p, \quad (1.5)$$

$$\text{div } u = 0. \quad (1.6)$$

Граничные условия теперь выбираются так: $u|_{\partial D}$ параллельна ∂D (обозначим это для краткости $u|_{\partial D}$). Это резкое изменение граничных условий от $u = 0$ на ∂D к $u|_{\partial D}$ имеет фундаментальное значение. Оно является причиной многих трудностей в гидромеханике при очень больших N_{Re} (см. сноску ниже).

Число Рейнольдса потока имеет то характерное свойство, что при переходе к новым масштабам

$$u^* = \frac{U^*}{U} u, \quad x^* = \frac{L^*}{L} x, \quad t^* = \frac{T^*}{T} t, \quad p^* = \left(\frac{U^*}{U} \right)^2 p$$

¹⁾ Обсуждение этих вопросов имеется в любой книге по гидромеханике, например Серрин [1], Шинброт [1] или Хьюз и Марсден [3].

и выборе $T = \frac{L}{U}$, $T^* = \frac{L^*}{U^*}$ мы получим при $N_{\text{Re}}^* = U^* L^* / \nu^* = N_{\text{Re}} = UL / \nu$, что u^* удовлетворяет тем же самым уравнениям относительно x^* , t^* , каким удовлетворяет u относительно x и t , т. е.

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + (u^* \cdot \nabla^*) u^* - \nu^* \nabla^2 u^* = - \text{grad } p^*, \quad (1.7)$$

$$\text{div } u^* = 0 \quad (1.8)$$

с тем же самым граничным условием $u^*|_{\partial D} = 0$, что и выше (это свойство уравнений называется законом подобия Рейнольдса и легко проверяется). Таким образом, природа указанных двух решений уравнений Навье — Стокса одинакова. Тот факт, что возможно такое изменение масштабов, играет важную роль в практических задачах. Например, благодаря ему инженеры, испытав небольшую модель самолета при низких скоростях, могут решить, будет ли летать настоящий самолет при высоких скоростях.

(1.7) *Пример.* Рассмотрим поток, изображенный на рис. 1.8. Если жидкость невязкая, то в качестве граничного

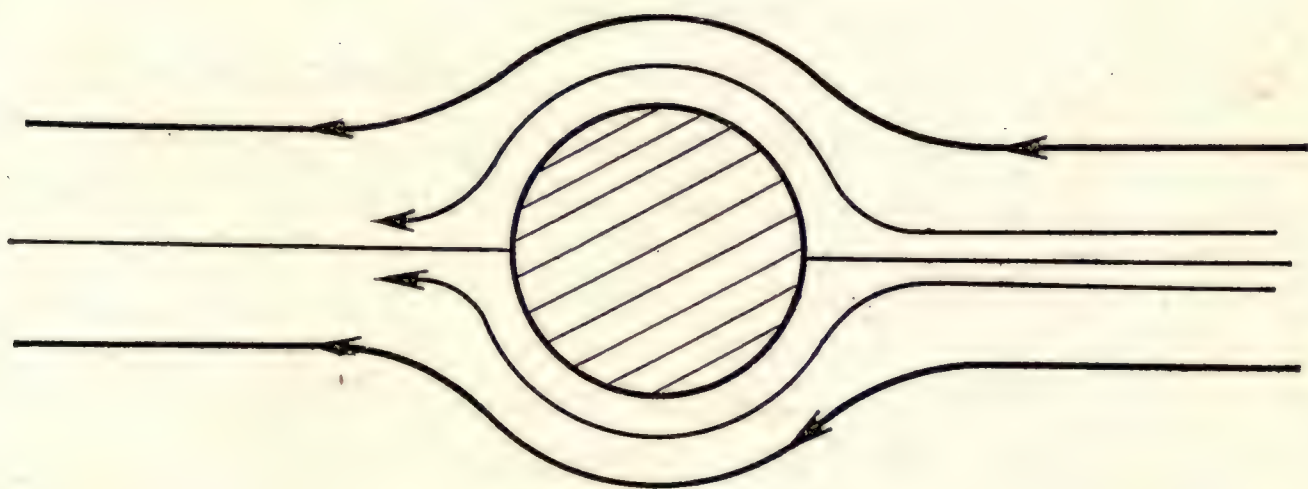


Рис. 1.9.

условия берется равенство нулю нормальной компоненты скорости на поверхности сферы, и жидкость гладко обтекает сферу (рис. 1.9).

Теперь рассмотрим ту же ситуацию, но в случае вязкой жидкости. Предположим, что N_{Re} постепенно возрастает, начиная с малых значений (в лаборатории это обычно достигается ростом U_∞ , но мы можем представлять себе, что $\nu \rightarrow 0$, как будто патока постепенно превращается в воду). Ввиду условия прилипания на поверхности сферы при

увеличении U_∞ градиент скорости возрастает. Это является причиной все большего усложнения течения (рис. 1.10)¹⁾.

Для малых значений числа Рейнольдса поле скоростей позади шара будет стационарным или приблизительно ста-

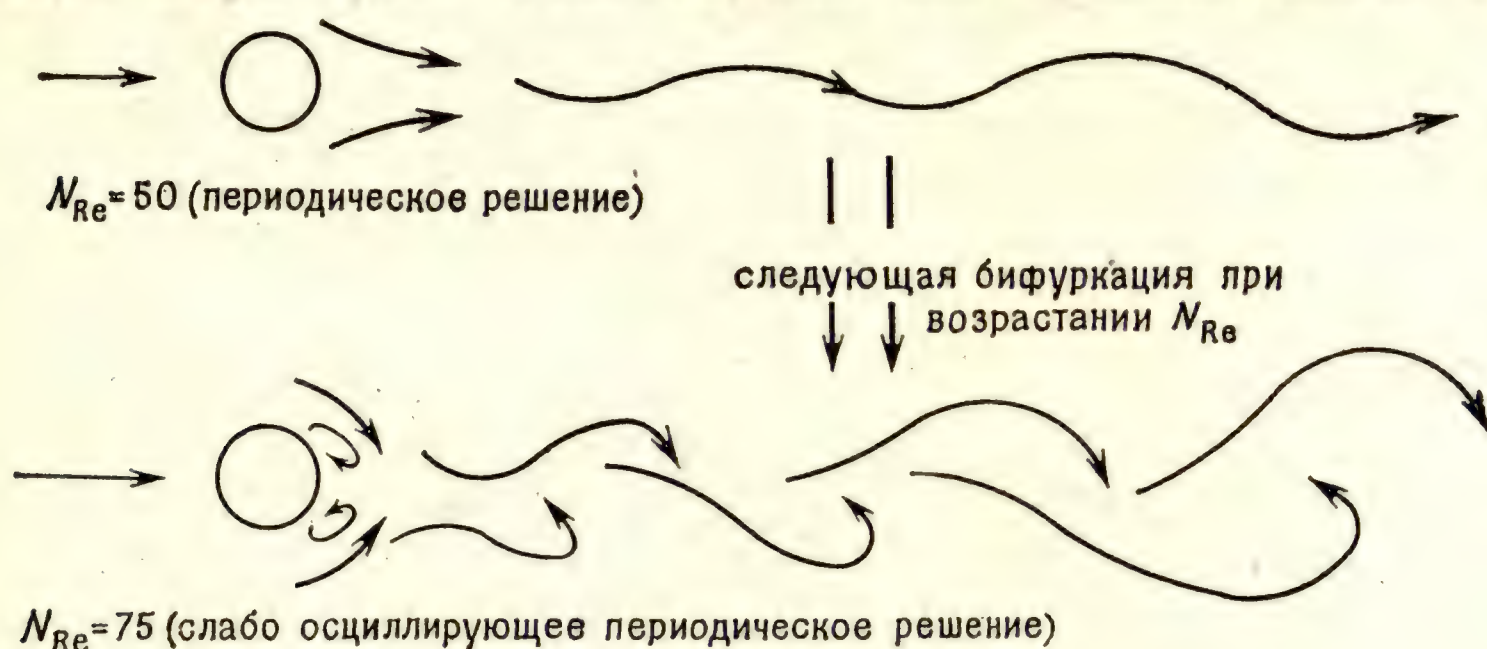


Рис. 1.10.

ционарным, но когда число Рейнольдса проходит критическое значение, поле становится периодическим. При больших значениях числа Рейнольдса периодическое решение теряет

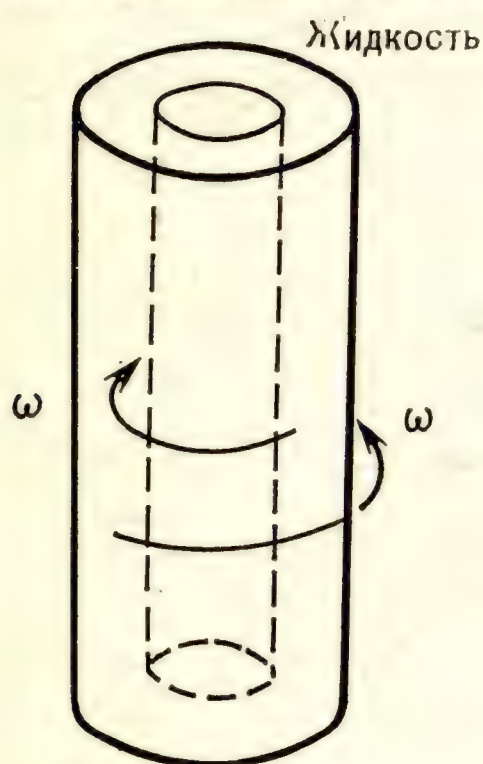


Рис. 1.11.

устойчивость и происходят другие бифуркации. Следующая бифуркация показана на рис. 1.10, и кажется, что она представляет собой бифуркацию от устойчивой периодической орбиты к периодической орбите на устойчивом 2-торе в $\mathcal{X}$. Эти последующие бифуркации, видимо, могут привести к турбулентности (см. замечание 1.15 и гл. 9 ниже).

(1.8) *Пример. Течение Куэтта*²⁾. Вязкая несжимаемая однородная жидкость заполняет пространство между двумя длинными коаксиальными вращающимися цилиндрами. Они могут, например, вращаться в противоположных направлениях с частотой ω (рис. 1.11). Для малых значений ω поток горизонтален, ламинарен и стационарен. После про-

¹⁾ Большие скоростные градиенты означают, что при численном изучении интересных течений конечно-разностная техника становится бесполезной. Недавно А. Чорин [1] предложил хорошую методику для преодоления этих трудностей и смог моделировать численно начальный этап «вихревой дорожки Кармана», показанной на рис. 1.10 (см. также Марсден [5] и Марсден и Мак-Кракен [2]).

²⁾ Течение Куэтта интенсивно изучалось в литературе (см. Серрин [1], Коулз [1]) и является стационарным решением как уравнений Эйлера, так и уравнений Навье — Стокса (см. следующее упражнение).

хождения частоты через некоторое значение ω_0 жидкость разбивается на слои, называемые вихрями Тейлора (рис. 1.12). Вихри Тейлора также являются стационарными решениями уравнений Навье — Стокса. Для больших значений ω могут иметь место бифуркации с рождением периодического, два-

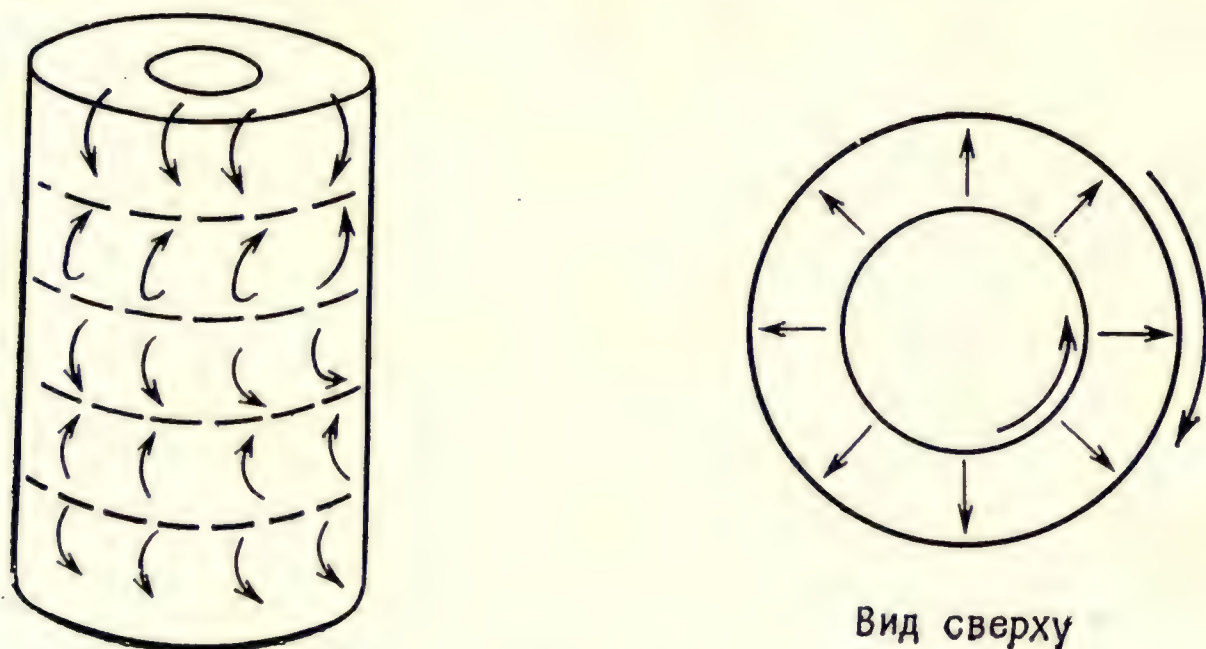
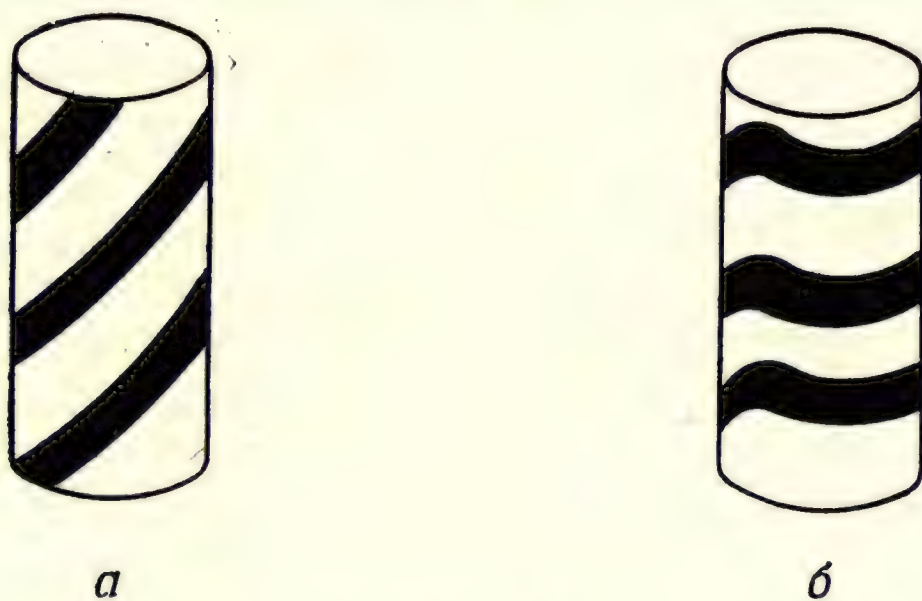


Рис. 1.12.

жды периодического и более сложных режимов (рис. 1.13). При еще больших значениях ω структура вихрей Тейлора усложняется и при некоторых условиях полностью разру-

Рис. 1.13. *а* — геликоидная структура; *б* — структура с двойной периодичностью.

шается, а поток становится турбулентным. Дальнейшую информацию можно найти у Коулза [7] и в гл. 7.

(1.9) *Упражнение.* Найти стационарное решение и уравнений Навье — Стокса в цилиндрических координатах, для которого u зависит только от r , $u_r = u_z = 0$, внешняя сила $f = 0$, а угловая скорость ω удовлетворяет условиям $\omega|_{r=A_1} = -\rho_1$, $\omega|_{r=A_2} = +\rho_2$ (т. е. найти течение Куэтта).

Показать, что u также есть решение уравнений Эйлера.

$$\left(\text{Ответ: } \omega = \frac{\alpha}{r^2} + \beta, \text{ где } \alpha = \frac{-(\rho_1 + \rho_2) A_1^2 A_2^2}{A_2^2 - A_1^2} \text{ и } \beta = \frac{\rho_1^2 A_1^2 + \rho_2^2 A_2^2}{A_2^2 - A_1^2} \right)$$

Другой важный случай в гидромеханике, где неустойчивость подобного рода имеет место, — это поток в трубе. Поток является установившимся и ламинарным (течение Пуазейля) до значения числа Рейнольдса примерно 4000, после которого он становится неустойчивым и происходит переход к хаотичному или турбулентному потоку. Однако если эксперимент сделан аккуратно¹⁾, то турбулентность возникает при значительно больших N_{Re} . Это напоминает балансирование шарика на кончике стержня, диаметр которого уменьшается.

Формулировки основных бифуркационных теорем

Пусть $X_\mu: P \rightarrow T(P)$ — векторное поле класса C^k на многообразии P , гладко зависящее от действительного параметра μ . Обозначим через F_t^μ поток, порожденный полем X_μ . Будем считать, что p_0 является особой точкой X_μ для всех μ , причем притягивающей для $\mu < \mu_0$ и неустойчивой для $\mu > \mu_0$. Напомним (теорема 1.4), что условие устойчивости p_0 состоит в том, что $\sigma(dX_\mu(p_0)) \subset \{z | \operatorname{Re} z < 0\}$. Следовательно, при $\mu = \mu_0$ некоторая часть спектра $dX_\mu(p_0)$ пересекает мнимую ось. Природа бифуркации, которая имеет место в точке (p_0, μ_0) , зависит от того, как это пересечение происходит (она зависит, например, от размерности обобщенного собственного подпространства²⁾ оператора $dX_\mu(p_0)$, соответствующего части спектра, пересекающей ось). Если P — конечномерное пространство, то существуют теоремы, дающие необходимые условия, при которых происходят определенные типы бифуркаций. Если P бесконечномерно, мы можем тем не менее свести задачу к конечной размерности, применяя теорему о центральном многообразии и используя следующую простую, но полезную конструкцию. Обозначим через ψ отображение через единицу времени потока $F_t = (F_t^\mu, \mu)$ на $P \times \mathbb{R}$. Как мы покажем в гл. 2А, $\sigma(d\psi(p_0, \mu_0)) = e^{\sigma(dX(p_0, \mu_0))}$. Поэтому $\sigma(d\psi(p_0, \mu_0)) = e^{\sigma(dX_{\mu_0}(p_0))} \cup \{1\}$. К ψ теперь можно применить следующую теорему (подробности см. в гл. 2—4):

(1.10) **Теорема о центральном многообразии** (Келли [1], Хирш, Пью и Шуб [1], Хартман [1], Такенс [2] и др.). Пусть

¹⁾ См. Шлихтинг [1].

²⁾ Определение и основные свойства собраны в главе 2А.

ψ — отображение окрестности точки α_0 банахова многообразия P в P . Предположим, что ψ имеет k непрерывных производных и $\psi(\alpha_0) = \alpha_0$. Будем также предполагать, что $d\psi(\alpha_0)$ имеет спектральный радиус 1 и что спектр $d\psi(\alpha_0)$ расщепляется на две части: одна лежит на единичной окружности, а другая находится на ненулевом расстоянии от единичной окружности. Обозначим через Y обобщенное собственное подпространство оператора $d\psi(\alpha_0)$, соответствующее части спектра, лежащей на единичной окружности; будем предполагать, что размерность Y $\dim Y = d < \infty$. Тогда в P существует окрестность V точки α_0 и C^{k-1} -подмногообразие M размерности d , лежащее в V , проходящее через точку α_0 и касающееся Y в точке α_0 . Оно называется центральным многообразием точки α_0 и обладает следующими свойствами:

(а) (локальная инвариантность): если $x \in M$ и $\psi(x) \in V$, то $\psi(x) \in M$;

(б) (локальная устойчивость): если $\psi^n(x) \in V$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то $\psi^n(x) \rightarrow M$ при $n \rightarrow \infty$.

(1.11) **Замечание.** Из доказательства теоремы о центральном многообразии будет следовать, что если ψ — определенное выше отображение за единицу времени потока F_t , то центральное многообразие M можно выбрать так, что свойства (а) и (б) выполняются для F_t при всех $t > 0$.

(1.12) **Замечание.** Теорема о центральном многообразии не всегда верна для отображения ψ класса C^∞ ; так как $\psi \in C^k$ для всех k , то мы получаем последовательность центральных многообразий M^k , однако их пересечение может быть пустым (см. замечания 2.6, относящиеся к дифференцируемости M).

Нас будет особенно интересовать случай, когда при бифуркации возникают устойчивые замкнутые орбиты. Пусть X_μ обозначает то же, что и выше, и предположим, что при $\mu = \mu_0$ (соответственно $\mu > \mu_0$) $\sigma(dX_\mu(p_0))$ имеет два изолированных ненулевых простых¹⁾ комплексно-сопряженных собственных значения $\lambda(\mu)$ и $\bar{\lambda}(\mu)$, таких, что $\operatorname{Re} \lambda(\mu) = 0$ (соответственно > 0) и $\left. \frac{d(\operatorname{Re} \lambda(\mu))}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_0} > 0$.

Предположим также, что оставшаяся часть $\sigma(dX_\mu(p_0))$ остается в левой полуплоскости на ненулевом расстоянии от мнимой оси. Используя теорему о центральном многообразии, мы получаем 3-многообразие $M \in P \times \mathbb{R}$, касательное

¹⁾ Простота означает, что обобщенное собственное пространство собственного значения одномерно.

к собственному подпространству $\lambda(\mu_0)$, $\overline{\lambda(\mu_0)}$ и к μ -оси при $\mu = \mu_0$, локально инвариантное относительно потока X и содержащее всю локальную рекуррентность¹⁾. Теперь получаем аналогичную задачу для векторного поля размерности 2: $X_\mu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Можно применить теорему Хопфа для размерности 2 (см. подробности в гл. 3, а также рис. 1.4, 1.5).

(1.13) **Теорема Хопфа для векторных полей** (Пуанкаре [1], А. А. Андронов и А. Витт [1], Хопф [1], Рюэль и Такенс [1], Чейфи [1] и др.). Пусть X_μ — векторное поле класса C^k ($k \geq 4$) на $\mathbb{R}^2$, $X_\mu(0) = 0$ для всех μ , и пусть поле $X = (X_\mu, 0)$ также класса C^k . Предположим, что $dX_\mu(0, 0)$ имеет два различных простых комплексно-сопряженных собственных значения $\lambda(\mu)$ и $\overline{\lambda(\mu)}$, таких, что $\operatorname{Re} \lambda(\mu) < 0$ для $\mu < 0$; $\operatorname{Re} \lambda(\mu) = 0$ для $\mu = 0$ и $\operatorname{Re} \lambda(\mu) > 0$ для $\mu > 0$. Будем также предполагать, что $\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\mu)}{d\mu} \right|_{\mu=0} > 0$. Тогда существует C^{k-2} -функция $\mu: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu(0) = 0$, такая, что для любого $x_1 \neq 0$ ²⁾ точка $(x_1, 0, \mu(x_1))$ лежит на замкнутой орбите потока X , имеющей период $\approx 2\pi/|\lambda(0)|$ и радиус, растущий как $\sqrt{\mu}$. Существует такая окрестность U точки $(0, 0, 0)$ в $\mathbb{R}^3$, в которой любая замкнутая орбита поля X совпадает с одной из орбит полученного семейства. Кроме того, если 0 является «слабым аттрактором»³⁾ для X_0 , то $\mu(x_1) > 0$ для всех $x_1 \neq 0$ и замкнутые орбиты — притягивающие (рис. 1.4, 1.5).

Если взамен пары комплексно-сопряженных собственных значений мнимую ось пересекает действительное собственное значение, то вместо рождения замкнутой орбиты особая точка распадается на две, как это было в примере шарика в обруче (см. также упр. 1.16).

После того как появились устойчивые замкнутые орбиты, можно поинтересоваться, как будут выглядеть дальнейшие бифуркации. Так, например, нетрудно представить себе рождение инвариантного 2-мерного тора из замкнутой орбиты

¹⁾ Под локальной рекуррентностью авторы подразумевают множество неблуждающих точек потока, содержащихся в окрестности рассматриваемой точки. О неблуждающих точках см. Немыцкий и Степанов [1]. — Прим. перев.

²⁾ Здесь (x_1, x_2) — координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$. — Прим. перев.

³⁾ Это условие подробно разбирается ниже, в гл. 4А оно сводится к специальному условию на X . См. также гл. 4С. Случай, когда $d \operatorname{Re} \lambda(\mu)/d\mu = 0$, обсуждается в гл. 3А. В гл. 3В показывается, что термин «слабый аттрактор» можно заменить на «асимптотически устойчивый». Обсуждение общего случая см. у Рюэля и Такенса [1], Сотомайера [1], Ньюхауса и Пейлиса [1], а также в гл. 7.

(рис. 1.14). Такое явление действительно может произойти. Для того чтобы понять, как это происходит, рассмотрим устойчивую замкнутую орбиту потока F_t^μ . Свяжем с этой орбитой отображение Пуанкаре. Для построения отображения Пуанкаре возьмем точку x_0 на орбите и многообразие N коразмерности 1, проходящее через x_0 трансверсально орбите.

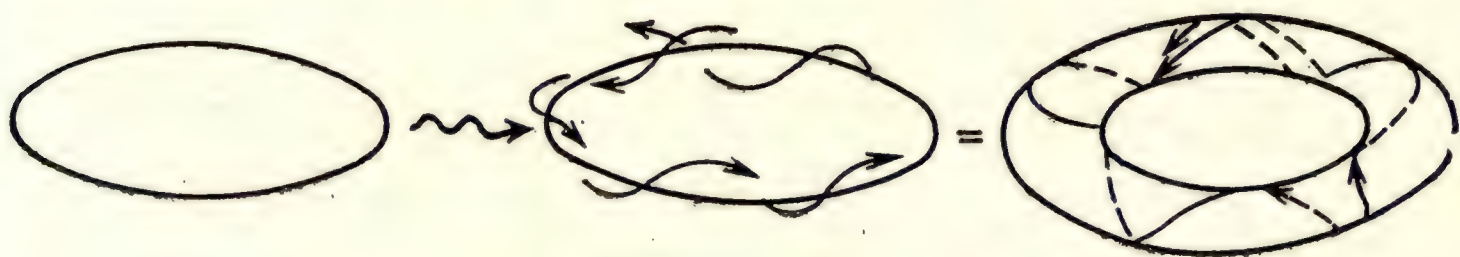


Рис. 1.14.

Отображение Пуанкаре P_μ переводит любую точку x из малой окрестности точки x_0 на N в ту точку, в которой $F_t^\mu(x)$ пересекает N (рис. 1.15). Оно является диффеоморфизмом U на $V = P_\mu(U) \subseteq N$, $P_\mu(x_0) = x_0$ (см. гл. 2В, где приведены свойства отображения Пуанкаре). Орбита является устойчивой, если $\sigma(dP_\mu(x_0)) \subset \{z \mid |z| < 1\}$, и является неустойчивой, если существует $z \in \sigma(dP_\mu(x_0))$ с $|z| > 1$. Мы будем рассматривать, как и выше, C^k -векторное поле $X_\mu: P \rightarrow TP$ на банаховом многообразии P , для которого $X_\mu(p_0) = 0$ для всех μ . Будем считать, что p_0 устойчива для

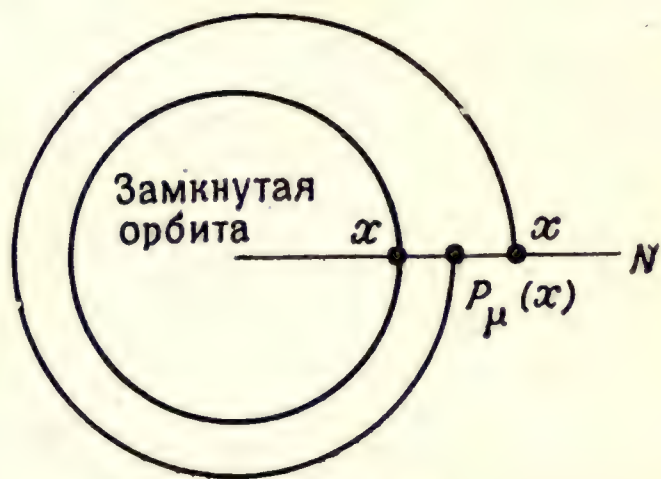


Рис. 1.15.

$\mu < \mu_0$, а при переходе через значение $\mu = \mu_0$ происходит рождение устойчивой замкнутой орбиты $\gamma(\mu)$, и p_0 станет неустойчивой. Пусть P_μ — отображение Пуанкаре, связанное с $\gamma(\mu)$, и пусть $x_0(\mu) \in \gamma(\mu)$. Будем далее предполагать, что при $\mu = \mu_1$ единичную окружность пересекают два изолированных простых комплексно-сопряженных собственных значения $\lambda(\mu)$ и $\bar{\lambda}(\mu)$ линейного отображения $dP_\mu(x_0(\mu))$, где $\left. \frac{d|\lambda(\mu)|}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_1} > 0$, а остальная часть спектра $\sigma(dP_\mu(x_0(\mu)))$ остается внутри единичной окружности на ненулевом расстоянии от нее. Тогда мы можем применить теорему о центральном многообразии к отображению $P = (P_\mu, \mu)$ и получить для P , как и выше, локально инвариантное трехмерное многообразие. Затем можно использовать бифуркационную теорему для диффеоморфизмов (п. 1.14 ниже) и получить однопараметрическое семейство инвариантных устойчивых

замкнутых кривых для отображений P_μ при $\mu > \mu_1$. Для поля X_μ замкнутой кривой соответствует устойчивый инвариантный 2-тор потока F_t^μ (рис. 1.16).

(1.14) **Бифуркационная теорема для диффеоморфизмов** (Сакер [1], Неймарк [2], Рюэль и Такенс [1]). Пусть дано однопараметрическое семейство C^k -диффеоморфизмов ($k \geq 5$), удовлетворяющее условиям:

- (а) $P_\mu(0) = 0$ для всех μ ;
- (б) для $\mu < 0$, $\sigma(dP_\mu(0)) \subset \{z \mid |z| < 1\}$;
- (в) для $\mu = 0$ ($\mu > 0$), $\sigma(dP_\mu(0))$ имеет два изолированных, простых, комплексно-сопряженных собственных значения $\lambda(\mu)$ и $\bar{\lambda}(\mu)$, для которых $|\lambda(\mu)| = 1$ ($|\lambda(\mu)| > 1$), а остальная часть спектра $\sigma(dP_\mu(0))$ лежит внутри единичной окружности;

(г) $\frac{d|\lambda(\mu)|}{d\mu} \Big|_{\mu=0} > 0$.

Тогда при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$ (и двух дополнительных предположениях, которые будут сделаны в процессе доказательства теоремы) существует непрерывное однопараметрическое семейство

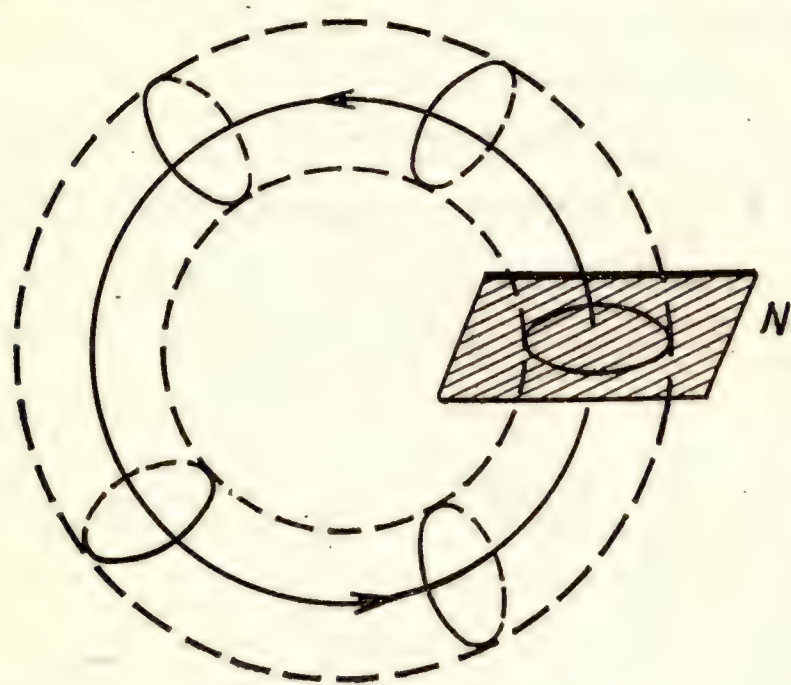


Рис. 1.16.

инвариантных устойчивых замкнутых кривых отображений P_μ , по одной для каждого $\mu \in (0, \varepsilon)$.

(1.15) **Замечание.** В гл. 8 и 9 мы обсудим, как бифуркационные теоремы о рождении замкнутых орбит и инвариантных торов могут быть применены к уравнениям Навье — Стокса. Одна из основных трудностей состоит в требовании гладкости потока, которую мы преодолеем, используя общие теоремы о гладкости (гл. 8А). Юдович [1—11], Иосс [1—6] и Джозеф и Сэттинджер использовали для получения этих результатов оригинальный метод Хопфа. Рюэль и Такенс [1] выдвинули гипотезу, что дальнейшие бифуркации приводят к многомерному устойчивому инвариантному тору и что поток становится турбулентным, когда интегральные кривые притягиваются к «странному аттрактору» (странные аттракторы, как показано, в изобилии существуют на k -мерном торе при $k \geq 4$); см. гл. 9. Аттракторы также могут появляться спонтанно (см. 4В.8 и гл. 12). Вопрос о том, что происходит с системой при переходе (по параметру) от особой точки

к странному аттрактору, сложен и требует дальнейшего изучения. Важные работы в этом направлении принадлежат Такенсу [1, 2], Ньюхаусу [1] и Ньюхаусу и Пейксото [1]¹⁾.

(1.16) *Упражнение (а).* Докажите следующее утверждение.

Теорема. Пусть H — гильбертово пространство (или многообразие) и $\Phi_\mu: H \rightarrow H$ — отображение, определенное для

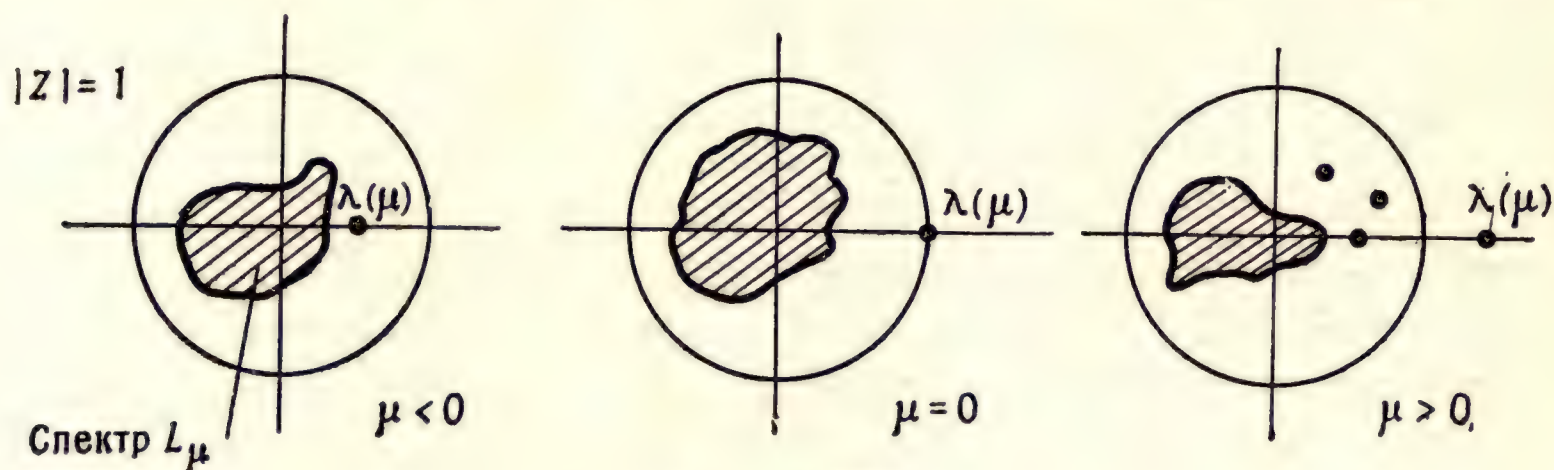


Рис. 1.17.

каждого $\mu \in \mathbb{R}$ и такое, что отображение $(\mu, x) \mapsto \Phi_\mu(x)$ из $\mathbb{R} \times H$ в H класса C^k , $k \geq 1$ и для всех $\mu \in \mathbb{R}$, $\Phi_\mu(0) = 0$. Определим $L_\mu = D\Phi_\mu(0)$ и предположим, что спектр L_μ лежит внутри единичной окружности при $\mu < 0$. Допустим, что существует действительное, простое, изолированное собственное значение $\lambda(\mu)$, для которого $\lambda(0) = 1$, $d\lambda(\mu)/d\mu|_{\mu=0} > 0$ и L_0^* имеет собственным значением 1 (рис. 1.17).

Тогда для отображения $\Phi: (x, \mu) \mapsto (\Phi_\mu(x), \mu)$ около точки $(0, 0) \in H \times \mathbb{R}$ существует C^{k-1} кривая неподвижных точек l . Эта кривая касается H в точке $(0, 0)$ пространства $H \times \mathbb{R}$ (рис. 1.18). Точки этой кривой, точки вида $(0, \mu)$ и только они являются неподвижными точками Φ в окрестности $(0, 0)$.

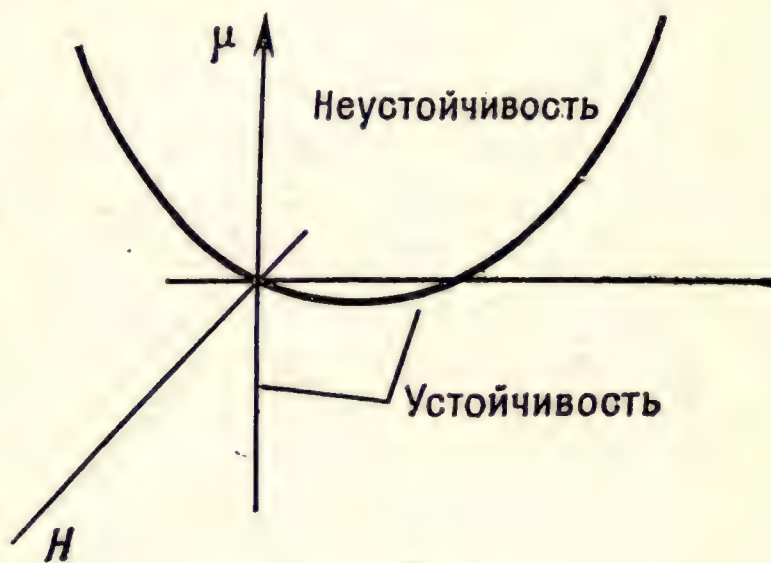


Рис. 1.18.

(б) Покажите, что условия теоремы применимы к примеру с шариком в обруче (см. упр. 1.2).

Указание. Для отображения $(L_0, 0)$ в $H \times \mathbb{R}$ возьмем собственный вектор $(z, 0)$ с собственным значением 1. Используя теорему о центральном многообразии, получим для ото-

¹⁾ См. также важную работу Афраймовича, Быкова и Шильникова [1]. — Прим. перев.

бражения $\Phi(x, \mu) = (\Phi_\mu(x), \mu)$ инвариантное 2-многообразие S , касательное к $(z, 0)$ и μ -оси. На S выберем координаты (α, μ) , где α — проекция на нормированный собственный вектор $z(\mu)$ отображения L_μ . В этих координатах $\Phi(x, \mu) = (f(\alpha, \mu), \mu)$. Обозначим $g(\alpha, \mu) = \frac{f(\alpha, \mu)}{\alpha} - 1$ и используем теорему о неявной функции, чтобы получить кривую нулей g в S (см. Рюэль и Такенс [1], стр. 190).

(1.17). **Замечание.** Замкнутые орбиты, которые дает теорема Хопфа, не обязательно бывают глобально устойчивы

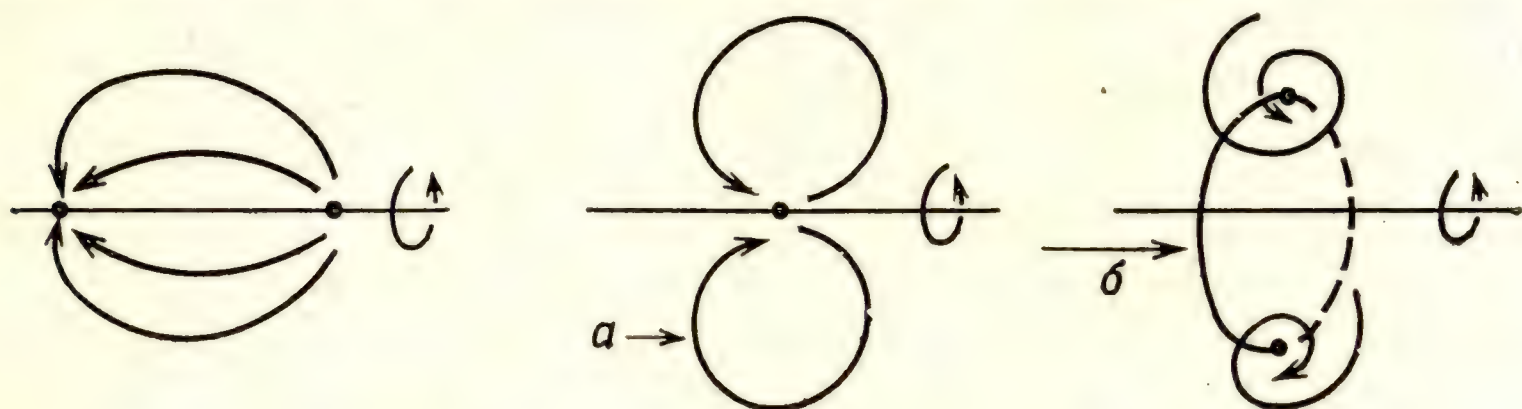


Рис. 1.19. a — особые точки сливаются; b — особые точки сходят с оси симметрии, и образуется замкнутая орбита.

и могут исчезать при больших значениях параметра (см. замечание 3А.3).

(1.18) **Замечание.** Сведение к конечномерному случаю с использованием теоремы о центральном многообразии аналогично сведению к конечной размерности в теории бифуркаций стационарных решений уравнений эллиптического типа, которое известно под названием «теории Ляпунова — Шмидта». См. Ниренберг [1] и Вайнберг и Треногин [1, 2].

(1.19) **Замечание.** Рождение замкнутых орбит может происходить с помощью механизмов, отличных от вышерассмотренных. На рис. 1.19 показан пример С. Вана¹⁾.

¹⁾ О рождении замкнутых орбит см. Андронов и др. [1], Шильников [1—4], а также Дополнение I. — Прим. ред.

Глава 2

ТЕОРЕМА О ЦЕНТРАЛЬНОМ МНОГООБРАЗИИ

В этом разделе мы начнем выполнение программы, намеченной в гл. 1, с доказательства теоремы о центральном многообразии. Наиболее общая формулировка теоремы об инвариантном многообразии дана в работах Хирша, Пью и Шуба [1]. Большинство основных идей имеется уже в работе Келли [1], а обработка вместе с дополнительными ссылками содержится в книге Хартмана [1]. Однако мы будем следовать доказательству Ланфорда, которое больше всего подходит для нашего случая и является прямым и полным. Мы благодарны профессору Ланфорду за разрешение привести здесь его доказательство.

Основная ценность теоремы о центральном многообразии заключается в том, что, используя ее, можно свести исходную задачу к конечномерной¹⁾. Для задачи о рождении цикла эта теорема позволяет редуцировать задачу к размерности 2 без потери какой-либо информации относительно устойчивости. набросок того, как это делается, был дан в гл. 1, а детали будут изложены в гл. 3 и 4.

Перед тем, как переходить к доказательству, читателю было бы полезно вспомнить некоторые основные результаты спектральной теории ограниченных линейных операторов, обратившись к гл. 2А. Там же можно найти доказательства теорем 1.3 и 1.4.

Формулировка и доказательство теоремы о центральном многообразии

Теперь мы готовы к доказательству теоремы. Оно будет дано для случая инвариантного многообразия отображения Ψ , не обязательно являющегося локальным диффеоморфизмом. Позже, пользуясь им, мы получим теорему об инвариантном многообразии для потоков. Замечания, связанные с обобщениями, приведены в конце доказательства.

¹⁾ А в случае конечномерной исходной задачи — свести исследование к задаче меньшего числа измерений. — *Прим. перев.*

(2.1) **Теорема о центральном многообразии.** Пусть Ψ — отображение, определенное в окрестности нуля в банаховом пространстве Z . Будем предполагать, что Ψ принадлежит классу C^{k+1} , $k \geq 1$ и $\Psi(0) = 0$. Предположим также, что $D\Psi(0)$ имеет спектральный радиус 1 и что спектр $D\Psi(0)$ расщепляется на две части: часть, лежащую на единичной окружности, и остаток, который находится на ненулевом расстоянии от единичной окружности¹⁾. Обозначим через Y обобщенное собственное подпространство оператора $D\Psi(0)$, порожденное частью спектра, лежащей на единичной окружности; будем предполагать, что Y имеет размерность $d < \infty$.

Тогда существует окрестность нуля $V \subset Z$ и C^k -подмногообразие $M \subset V$ размерности d , проходящее через 0 и касающееся Y в точке 0, для которого выполнены следующие условия:

(а) (локальная инвариантность): если $x \in M$ и $\Psi(x) \in V$, то $\Psi(x) \in M$;

(б) (локальная устойчивость): если $\Psi^n(x) \in V$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то при $n \rightarrow \infty$ расстояние между $\Psi^n(x)$ и M стремится к нулю.

Мы сейчас немного обобщим формулировку теоремы, которую мы хотим доказать. У нас имеется отображение окрестности нуля банахова пространства Z , для которого $\Psi(0) = 0$. Мы предполагаем, что спектр $D\Psi(0)$ расщепляется на часть, лежащую на единичной окружности, и остаток, который содержится внутри окружности радиуса строго меньше единицы с центром в нуле. Из результатов спектральной теории, приведенных в гл. 2А, следует существование спектрального проектора P , соответствующего части спектра, лежащей на единичной окружности, и имеющего следующие свойства:

1) P коммутирует с $D\Psi(0)$, поэтому подпространства PZ и $(I - P)Z$ отображаются оператором $D\Psi(0)$ в себя;

2) спектр ограничения $D\Psi(0)$ на PZ лежит на единичной окружности;

3) спектральный радиус ограничения $D\Psi(0)$ на $(I - P)Z$ строго меньше единицы.

Пусть X, Y обозначают $(I - P)Z$ и PZ соответственно, A и B — ограничения $D\Psi(0)$ на X, Y соответственно. Тогда $Z = X \oplus Y$ и $\Psi(x, y) = (Ax + X^*(x, y), By + Y^*(x, y))$, где

A — ограниченный линейный оператор на X со спектральным радиусом, строго меньшим единицы;

¹⁾ Это требование автоматически выполняется, если Z конечномерно или, в более общем случае, если оператор $D\Psi(0)$ компактен.

B — ограниченный линейный оператор со спектром на единичной окружности (в действительности нам необходимо только, чтобы спектральный радиус B^{-1} был не больше единицы);

X^* — отображение класса C^{k+1} , переводящее окрестность нуля пространства $X \oplus Y$ в пространство X , имеющее второй порядок малости в нуле, т. е. $X(0, 0) = 0$ и $DX(0, 0) = 0$;

Y^* — отображение класса C^{k+1} из окрестности нуля в пространстве $X \oplus Y$ в пространство Y второго порядка малости в нуле.

Мы хотим найти инвариантное многообразие для Ψ , которое касается Y в нуле. Такое многообразие будет графиком отображения u , которое переводит окрестность нуля пространства Y в пространство X , причем $u(0) = 0$, $Du(0) = 0$.

В том варианте этой теоремы, который мы сформулировали в п. 2.1, предполагается, что Y конечномерно. Мы можем ослабить это требование, но не исключить совсем; а именно, мы можем сделать

(2.2) *Предположение*: существует действительная функция ϕ на Y класса C^{k+1} , которая равна 1 в окрестности нуля и нулю при $\|y\| > 1$. Как ни странно, это предположение на самом деле довольно ограничительно. Оно выполняется тривиально, если Y конечномерно или Y является гильбертовым пространством. Более подробное исследование см. у Боника и Фрэмтона [1].

(2.3) *Теорема*. Пусть обозначения и предположения будут такие же, как и ранее. Тогда существует $\varepsilon > 0$ и C^{k+1} -отображение u^* , определенное на множестве $\{y \in Y: \|y\| < \varepsilon\}$ со значениями в X , второго порядка малости в нуле, такое, что

(а) многообразие $\Gamma_{u^*} = \{(x, y) \mid x = u^*(y) \text{ и } \|y\| < \varepsilon\} \subset X \oplus Y$ (т. е. график u^*) инвариантно относительно Ψ в том смысле, что если $\|y\| < \varepsilon$ и $\Psi(u^*(y), y) = (x_1, y_1)$, где $\|y_1\| < \varepsilon$, то $x_1 = u^*(y_1)$;

(б) многообразие Γ_{u^*} является локально устойчивым относительно Ψ , т. е. если при $\|x\| < \varepsilon$, $\|y\| < \varepsilon$ последовательность $(x_n, y_n) = \Psi^n(x, y)$ такова, что $\|x_n\| < \varepsilon$, $\|y_n\| < \varepsilon$ для всех $n > 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u^*(y_n)\| = 0.$$

Переходя к доказательству, мы для удобства предположим, что $\|A\| < 1$, а $\|B^{-1}\|$ немного больше 1. Это требование не всегда выполняется, но мы всегда можем свести к этому случаю, заменяя нормы X и Y эквивалентными нормами (см. лемму 2A.4). Будем считать, что такой выбор норм

уже сделан. К сожалению, не очень удобно формулировать точное условие близости $\|B^{-1}\|$ к единице. Поэтому мы будем вести доказательство таким образом, как если бы $\|B^{-1}\|$ была бы регулируемым параметром; в процессе доказательства мы наложим конечное число условий на $\|B^{-1}\|$. В принципе, конечно, можно собрать все эти условия и потребовать их с самого начала.

Теорема гарантирует существование функции u^* , которая может быть определена в очень малой окрестности нуля. Чтобы не работать с очень малыми значениями x, y , мы изменим масштабы в системе, вводя новые переменные $x/\varepsilon, y/\varepsilon$ (обозначая их по-прежнему x, y). Такой выбор масштаба не меняет A и B , но взяв ε достаточно малым, мы можем сделать X^* и Y^* вместе с их производными до порядка $k+1$ сколь угодно малыми в единичном шаре. Если теперь перед доказательством теоремы мы умножим X^*, Y^* на функцию $\varphi(y)$, существование которой мы предположили в (2.2), то мы сможем считать, что $X^*(x, y), Y^*(x, y)$ равны нулю для $\|y\| > 1$. Таким образом, если мы определим

$$\lambda = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ y \text{ любое}}} \sup_{\substack{j_1, j_2 \\ j_1 + j_2 \leq k+1}} \{ \|D_x^{j_1} D_y^{j_2} X^*(x, y)\| + \|D_x^{j_1} D_y^{j_2} Y^*(x, y)\| \},$$

то мы можем сделать λ сколь угодно малым, выбирая достаточно малое ε .

Техническое условие на Y используется только для того, чтобы супремум в определении λ можно было брать по всем y , а не только по ограниченному множеству.

После того как выбор масштабов и вырезание с помощью функции φ сделано, мы можем доказать глобальную теорему о центральном многообразии. А именно, мы будем доказывать следующее.

(2.4) **Лемма.** *Сохраним обозначения и предположения теоремы о центральном многообразии. Если λ достаточно мало (и если $\|B^{-1}\|$ достаточно близка к 1), то существует функция u^* , определенная и k раз непрерывно дифференцируемая на всем Y , второго порядка малости в нуле и такая, что*

- (а) *многообразие $\Gamma_{u^*} = \{(x, y) \mid x = u^*(y), y \in Y\}$ инвариантно относительно Ψ в строгом смысле¹⁾;*
- (б) *если $\|x\| < 1$ и y произвольно, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u^*(y_n)\| = 0$ (где $(x_n, y_n) = \Psi^n(x, y)$).*

¹⁾ Так как отображение определено теперь во всем пространстве, то многообразие Γ_{u^*} инвариантно в обычном (в терминологии автора в «строгом») смысле для всех y . — Прим. перев.

Как и $\|B^{-1}\|$, мы можем рассматривать λ как контролируемый нами параметр и налагать необходимые ограничения на его величину по мере необходимости. Стоит отметить, что λ зависит от выбора нормы, следовательно, нужно сначала выбрать норму так, чтобы $\|B^{-1}\|$ было близко к 1, а затем выбрать масштабы и сделать вырезание, чтобы сделать малым λ . Для удобства читателя, который захочет проверить, что все требуемые условия на $\|B^{-1}\|$ могут быть удовлетворены одновременно, мы будем отмечать эти условия звездочкой, например (2.3)*.

Идея доказательства очень проста. Выберем сначала многообразие M вида $\{x = u(y)\}$ (график функции u). Пусть ΨM означает образ M при отображении Ψ . При некоторых довольно слабых ограничениях на u мы покажем, что многообразие ΨM снова имеет вид $\{x = \hat{u}(y)\}$ с новой функцией $\hat{u}$. Если обозначить эту функцию как $\mathcal{F}u$, то получится (нелинейное) отображение $u \mapsto \mathcal{F}u$ функции в функцию. Многообразие инвариантно тогда и только тогда, когда $u = \mathcal{F}u$, поэтому нужно искать неподвижную точку $\mathcal{F}$. Мы найдем ее, доказав, что $\mathcal{F}$ есть сжатие на подходящем функциональном пространстве (предполагая, что λ достаточно мало).

Более точно, мы разобьем доказательство на следующие шаги:

- (1) выведем эвристически «формулу» для $\mathcal{F}$;
- (2) покажем, что формула, полученная на шаге (1), корректно определяет отображение подходящего функционального пространства U в себя;
- (3) докажем¹⁾, что $\mathcal{F}$ является сжимающим на U и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку u^* ;
- (4) докажем, что пункт (б) леммы (2.4) выполняется для u^* .

Мы начнем с шага (1).

(1) Чтобы построить $u(y)$, мы должны поступить следующим образом:

(а) решить уравнение

$$y = B\tilde{y} + Y^*(u(\tilde{y}), \tilde{y}) \quad (2.1)$$

относительно $\tilde{y}$. Это означает, что y есть Y -компонента $\Psi(u(\tilde{y}), \tilde{y})$.

(б) Пусть $u(y)$ будет X -компонентой $\Psi(u(\tilde{y}), \tilde{y})$. Тогда

$$u(y) = Au(\tilde{y}) + X^*(u(\tilde{y}), \tilde{y}). \quad (2.2)$$

¹⁾ На этом шаге можно использовать теорему о неявной функции, см. Ирвин [1].

(2) Пространство функций U , которое мы хотим рассмотреть, будет выбрано отчасти произвольно: $U = \{u: Y \rightarrow X \mid D^{k+1}u \text{ непрерывна; } \|D^j u(y)\| < 1 \text{ для } j = 0, 1, \dots, k+1 \text{ и всех } y; u(0) = Du(0) = 0\}$.

Теперь мы должны доказать два утверждения:

(а) Для любого $u \in U$ уравнение (2.1) имеет единственное решение $\tilde{y}$ для каждого $y \in Y$.

(б) $\mathcal{F}u$, определенное из (2.2), лежит в U .

Для доказательства п. (а) мы перепишем (2.1) в виде задачи о неподвижной точке:

$$\tilde{y} = B^{-1}y - B^{-1}Y^*(u(\tilde{y}), \tilde{y}).$$

Поэтому достаточно доказать, что отображение

$$\tilde{y} \mapsto B^{-1}y - B^{-1}Y^*(u(\tilde{y}), \tilde{y})$$

является сжимающим на Y . Мы это сделаем, оценивая производную:

$$\begin{aligned} D_{\tilde{y}}[B^{-1}y - B^{-1}Y^*(u(\tilde{y}), \tilde{y})] &\leq \|B^{-1}\| \cdot \|D_1 Y^*(u(\tilde{y}), \tilde{y}) Du(\tilde{y}) + \\ &\quad + D_2 Y^*(u(\tilde{y}), \tilde{y})\| \leq 2\lambda \|B^{-1}\| \end{aligned}$$

(по определению λ и U). Если мы потребуем

$$2\lambda \|B^{-1}\| < 1, \quad (2.3)^*$$

то уравнение (2.1) будет иметь единственное решение $\tilde{y}$ для каждого y . Заметим, что $\tilde{y}$ есть функция y , зависящая также и от u . По теореме об обратной функции, $\tilde{y}$ есть C^{k+1} -функция y .

Теперь докажем (б). Как мы уже показали, $\mathcal{F}u \in C^{k+1}$. Таким образом, чтобы $\mathcal{F}u \in U$, мы должны проверить условия

$$\|D^j \mathcal{F}u(y)\| \leq 1 \quad \text{для всех } y, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k+1 \quad (2.4)$$

и

$$\mathcal{F}u(0) = 0, \quad D\mathcal{F}u(0) = 0. \quad (2.5)$$

Сначала рассмотрим случай $j = 0$:

$$\|\mathcal{F}u(y)\| \leq \|A\| \cdot \|u(\tilde{y})\| + \|X^*(u(\tilde{y}), \tilde{y})\| \leq \|A\| + \lambda,$$

поэтому если мы потребуем

$$\|A\| + \lambda \leq 1, \quad (2.6)^*$$

то $\|\mathcal{F}u(y)\| \leq 1$ для всех y .

Чтобы оценить $D\mathcal{F}u$, мы должны сначала оценить $D\tilde{y}(y)$. Дифференцируя (2.1), получим

$$I = (B + DY^u(\tilde{y})) D\tilde{y}, \quad (2.7)$$

где $Y^u: Y \rightarrow Y$ определяется из уравнения

$$Y^u(y) = Y^*(u(y), y).$$

Вычисления, которые мы проделали, дают оценку $\|DY^u(\tilde{y})\| \leq 2\lambda$ для всех $\tilde{y}$.

Далее, $B + DY^u = B[I + B^{-1}DY^u]$, и так как $2\lambda\|B^{-1}\| < 1$ (из (2.3)*), то оператор $B + DY^u$ обратим и

$$\|(B + DY^u)^{-1}\| \leq \|B^{-1}\|(1 - 2\lambda\|B^{-1}\|)^{-1}.$$

Величина, стоящая справа в этом неравенстве, будет играть важную роль в наших оценках, поэтому мы введем для нее обозначение

$$\gamma \equiv \|B^{-1}\|(1 - \lambda\|B^{-1}\|)^{-1}. \quad (2.8)$$

Заметим, что выбирая сначала $\|B^{-1}\|$ близкой к единице, а затем делая λ достаточно малой, мы можем сделать γ сколь угодно близкой к единице.

Мы уже показали, что

$$\|Dy(\tilde{y})\| \leq \gamma \quad (2.9)$$

для всех y . Дифференцирование выражения (2.2) для $\mathcal{F}u(y)$ дает

$$\left. \begin{aligned} D\mathcal{F}u(y) &= [ADu(\tilde{y}) + DX^u(\tilde{y})] D\tilde{y}(y) \\ (X^u(\tilde{y}) &= X^*(u(\tilde{y}), \tilde{y})) \end{aligned} \right\}. \quad (2.10)$$

Таким образом,

$$\|D\mathcal{F}u(y)\| \leq (\|A\| + 2\lambda) \cdot \gamma. \quad (2.11)$$

Поэтому, если мы потребуем

$$(\|A\| + 2\lambda) \cdot \gamma \leq 1, \quad (2.12)^*$$

то получим $\|D\mathcal{F}u(y)\| \leq 1$ для всех y .

Сделаем еще один шаг в наших оценках. Дифференцируя (2.7), получаем

$$0 = (B + DY^u(\tilde{y})) D^2\tilde{y} + D^2Y^u(D\tilde{y})^2.$$

Непосредственное вычисление дает $\|D^2Y^u(\tilde{y})\| \leq 5\lambda$ для всех $\tilde{y}$, поэтому

$$\|D^2y(\tilde{y})\| = \|(B + DY^u(\tilde{y}))^{-1} D^2Y^u(D\tilde{y})^2\| \leq \gamma \cdot 5\lambda \cdot \gamma^2 = 5\lambda\gamma^3.$$

Теперь, продифференцировав формулу (2.10) для $D\mathcal{F}u$, получаем

$$D^2\mathcal{F}u(y) = [AD^2u(\tilde{y}) + D^2X^u(\tilde{y})] (D\tilde{y})^2 + [ADu(\tilde{y}) + DX^u(\tilde{y})] D^2\tilde{y}.$$

Поэтому $\|D^2\mathcal{F}u(y)\| \leq (\|A\| + 5\lambda)\gamma^2 + (\|A\| + 2\lambda) \cdot 5\lambda\gamma^3$.
Если мы потребуем, чтобы

$$(\|A\| + 5\lambda)\gamma^2 + (\|A\| + 2\lambda) \cdot 5\lambda\gamma^3 \leq 1, \quad (2.13)^*$$

то получим $\|D^2\mathcal{F}u(y)\| \leq 1$ для всех y . В этом месте было бы желательно наложить последовательность все более жестких условий на γ и λ , с помощью которой мы можем обеспечить $\|D^j\mathcal{F}(y)\| \leq 1$ для всех y , $j = 3, 4, \dots, k+1$. Проверку того, что это действительно возможно, мы оставляем читателю.

Для проверки (2.5), т. е. условий $\mathcal{F}u = 0$, $D\mathcal{F}u = 0$ (предполагая $u = 0$, $Du = 0$), мы заметим, что

$$\tilde{y}(0) = 0, \text{ так как } 0 \text{ есть решение уравнения } 0 = B\tilde{y} + Y(u(\tilde{y}), \tilde{y}),$$

$$\mathcal{F}u(0) = Au(0) + X(u(0), 0) = 0 \quad \text{и}$$

$$D\mathcal{F}u(0) = [ADu(0) + D_1X(0, 0)Du(0) + D_2X(0, 0)] \cdot D\tilde{y}(0) = \\ = [A \cdot 0 + 0 + 0] \cdot D\tilde{y}(0) = 0.$$

На этом шаг (2) заканчивается, и мы переходим к шагу (3).

(3) В принципе мы доказываем, что $\mathcal{F}$ — сжимающий оператор, и применяем принцип сжимающих отображений. В действительности дело обстоит немного сложнее.

(а) Мы покажем, что $\mathcal{F}$ — сжимающий в супремум-норме. Поскольку U не является полным в этой норме, то принцип сжимающих отображений не позволяет сделать вывод о существовании неподвижной точки в U , но означает ее существование в пополнении U относительно этой нормы.

(б) Мы покажем, что пополнение U относительно супремум-нормы содержится во множестве функций u , отображающих Y в X с удовлетворяющими условию Липшица k -ми производными и имеющих второй порядок малости в нуле. Таким образом, функция u^* , являющаяся неподвижной точкой отображения $\mathcal{F}$, дифференцируема столько раз, сколько утверждается в теореме.

Реализацию этой схемы мы начнем с п. (а).

(а) Рассмотрим $u_1, u_2 \in U$, и пусть $\|u_1 - u_2\|_0 = \sup_y \|u_1(y) - u_2(y)\|$. Пусть $\tilde{y}_1(y), \tilde{y}_2(y)$ обозначают решения уравнений

$$y = B\tilde{y}_i + Y(u_i(\tilde{y}_i), \tilde{y}_i), \quad i = 1, 2.$$

Оценим последовательно $\|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\|_0$ и $\|\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2\|_0$.

Вычитая почленно уравнения для $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$, получим

$$B(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) = Y(u_2(\tilde{y}_2), \tilde{y}_2) - Y(u_1(\tilde{y}_1), \tilde{y}_1),$$

поэтому

$$\|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \lambda \cdot [\|u_2(\tilde{y}_2) - u_1(\tilde{y}_1)\| + \|\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1\|]. \quad (2.14)$$

Так как $\|Du_1\|_0 \leq 1$, мы можем записать

$$\begin{aligned} \|u_2(\tilde{y}_2) - u_1(\tilde{y}_1)\| &\leq \|u_2(\tilde{y}_2) - u_1(\tilde{y}_2)\| + \|u_1(\tilde{y}_2) - u_1(\tilde{y}_1)\| \leq \\ &\leq \|u_2 - u_1\|_0 + \|\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1\|. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Подставляя (2.15) в (2.14) и группируя, получим

$$\left. \begin{aligned} (1 - 2\lambda \cdot \|B^{-1}\|) \|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\| &\leq \lambda \cdot \|B^{-1}\| \cdot \|u_2 - u_1\|_0, \\ \|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2\|_0 &\leq \lambda \cdot \gamma \cdot \|u_2 - u_1\|. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

т. е.

Подставляя оценки (2.15), (2.16) в выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{F}u_1(y) - \mathcal{F}u_2(y) &= A[u_1(\tilde{y}_1) - u_2(\tilde{y}_2)] + \\ &+ [X(u_1(\tilde{y}_1), \tilde{y}_1) - X(u_2(\tilde{y}_2), \tilde{y}_2)], \end{aligned}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2\|_0 &\leq \|A\| [\|u_2 - u_1\|_0 + \|\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1\|_0] + \\ &+ \lambda [\|u_2 - u_1\|_0 + 2 \cdot \|\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1\|_0] \leq \\ &\leq \|u_2 - u_1\|_0 \{ \|A\| (1 + \gamma\lambda) + \lambda (1 + 2\gamma\lambda) \}. \end{aligned}$$

Если теперь потребовать, чтобы выполнялось

$$\alpha = \|A\| (1 + \gamma\lambda) + \lambda (1 + 2\gamma\lambda) < 1, \quad (2.17)^*$$

то $\mathcal{F}$ будет сжимающим в супремум-норме.

(б) Все утверждения, которые мы хотим здесь получить, прямо вытекают из следующего общего результата.

(2.5) **Лемма.** Пусть $\{u_n\}$ — последовательность функций на банаховом пространстве Y со значениями в банаховом пространстве X . Предположим, что для всех n и $y \in Y$

$$\|D^j u_n(y)\| \leq 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k,$$

и каждая $D^k u_n$ удовлетворяет условию Липшица с константой единица. Предположим также, что для каждого y последовательность $\{u_n(y)\}$ сходится слабо (т. е. в слабой топологии на X) к единичному вектору $u(y)$. Тогда

(1) k -е производные u удовлетворяют условию Липшица с константой Липшица, равной единице;

(2) $D^j u_n(y)$ слабо сходится к $D^j u(y)$ ¹⁾ для всех y и $j = 1, \dots, k$.

Если X, Y конечномерны, то в формулировке утверждения опускается все относящееся к методам, специфичным для банахова пространства, и лемма становится прямым следствием теоремы Арцела — Асколи. Доказательство леммы мы проведем чуть позже, а теперь перейдем к шагу (4).

(4) Мы докажем следующее: пусть $x \in X$ с $\|x\| \leq 1$, а $y \in Y$ произвольно. Обозначим $(x_1, y_1) = \Psi(x, y)$. Тогда $\|x_1\| \leq 1$ и

$$\|x_1 - u^*(y_1)\| \leq \alpha \|x - u^*(y)\|, \quad (2.18)$$

где α определена в (2.17). По индукции

$$\|x_n - u^*(y_n)\| \leq \alpha^n \|x - u^*(y)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

что и требуется доказать.

Чтобы доказать неравенство $\|x_1\| \leq 1$, мы сначала запишем $x_1 = Ax + X(x, y)$, так что

$$\|x_1\| \leq \|A\| \cdot \|x\| + \lambda \leq \|A\| + \lambda \leq 1 \quad \text{по (2.6).}$$

Чтобы доказать (2.18) мы, в сущности, должны повторить оценки, сделанные при доказательстве того, что $\mathcal{F}$ является сжимающим. Пусть $\tilde{y}_1$ — решение уравнения

$$y_1 = B\tilde{y}_1 + Y(u^*(\tilde{y}_1), \tilde{y}_1).$$

Из определения y_1 мы имеем $y_1 = By + Y(x, y)$. Вычитая эти уравнения и поступая далее точно так же, как при выводе (2.16), мы получим

$$\|\tilde{y}_1 - y\| \leq \lambda \gamma \|u^*(y) - x\|.$$

Далее, мы имеем

$$\begin{aligned} u^*(y_1) &= \mathcal{F} u^*(y_1) = A u^*(y_1) + X(u^*(\tilde{y}_1), \tilde{y}_1) \\ x_1 &= Ax + X(x, y). \end{aligned}$$

Вычитая их и проводя оценки, аналогичные сделанным выше, мы получим

$$\|x_1 - u^*(y_1)\| \leq \alpha \|x - u^*(y)\|.$$

На этом шаг (4) заканчивается. Чтобы полностью завершить доказательство, докажем лемму (2.5). Мы проведем рассуж-

¹⁾ Это утверждение может потребовать некоторого разъяснения. Для каждого n и y $D^j u_n(y)$ является ограниченным симметрическим j -линейным отображением пространства Y^j в X . Утверждение состоит в том, что для каждого $y, y_1, \dots, y_j$ последовательность $(D^j u_n(y)(y_1, \dots, y_j))$ элементов пространства X сходится в слабой топологии на X к $D^j u(y)(y_1, \dots, y_j)$.

дения только для $k = 1$; обобщения на произвольное k получаются по индукции.

Выберем $y_1, y_2 \in Y$ и $\varphi \in X^*$ и рассмотрим последовательность действительнзначных функций действительной переменной

$$t \rightarrow \varphi(u_n(y_1 + ty_2)) \equiv \psi_n(t).$$

Из предположений о последовательности $\{u_n\}$, которые были сделаны, следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(t) = \varphi(u(y_1 + ty_2)) \equiv \psi(t)$$

для всех t , что $\psi_n(t)$ дифференцируемы и $|\psi'_n(t)| \leq \|\varphi\| \cdot \|y_1\|$ при всех n, t и

$$|\psi'_n(t_1) - \psi'_n(t_2)| \leq \|\varphi\| \cdot \|y_2\|^2 |t_1 - t_2|$$

для всех n, t_1, t_2 . Из последнего неравенства и теоремы Арцела — Асколи следует существование подпоследовательности $\psi'_{n_j}(t)$, которая равномерно сходится на каждом ограниченном интервале. Мы временно обозначим предел этой последовательности через $X(t)$. Тогда

$$\psi_{n_j}(t) = \psi_{n_j}(0) + \int_0^t \psi'_{n_j}(\tau) d\tau;$$

следовательно, переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$, мы получим

$$\psi(t) = \psi(0) + \int_0^t X(\tau) d\tau,$$

откуда следует, что $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема и $\psi'(t) = X(t)$.

Покажем теперь, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi'_n(t) = \psi'(t)$$

(т. е. что не обязательно переходить к подпоследовательности). Для этого заметим, что наши рассуждения позволяют для *любой* подпоследовательности $\{\psi'_n(t)\}$ доказать существование ее подпоследовательности, сходящейся к $\psi'(t)$. Отсюда следует, что исходная последовательность должна сходиться к тому же пределу. Так как $\psi'_n(0) = \varphi(Du_n(y_1)(y_2))$ ¹⁾, то

¹⁾ Символом $Du(y_1)(y_2)$ авторы обозначают результат применения линейного оператора $Du(y_1)$ к вектору y_2 . — Прим. перев.

последовательность $Du_n(y_1)(y_2)$ сходится в слабой топологии на X^{**} к пределу, который мы обозначим $Du(y_1)(y_2)$; это пока только обозначение, но оно содержит намек на дальнейшее. Переходя к пределу, из соответствующего свойства $Du_n(y_1)(y_2)$ мы заключаем, что для каждого y_1

$$y_2 \mapsto Du_n(y_1)(y_2)$$

есть ограниченное линейное отображение с нормой ≤ 1 из пространства Y в X^{**} . Мы обозначим этот линейный оператор через $Du(y_1)$. Так как

$$\|Du_n(y_1)(y_2) - Du_n(y'_1)(y_2)\| \leq \|y_1 - y'_1\| \cdot \|y_2\|,$$

то мы получаем, что

$$\|Du(y_1) - Du(y'_1)\| \leq \|y_1 - y'_1\|,$$

т. е. отображение $y \mapsto Du(y)$ действует из Y в $L(Y, X^{**})$ и удовлетворяет условию Липшица.

Следующий шаг состоит в доказательстве равенства

$$u(y_1 + y_2) - u(y_1) = \int_0^1 Du(y_1 + \tau y_2)(y_2) d\tau. \quad (2.19)$$

Это уравнение, вместе с непрерывностью по норме отображения $y \mapsto Du(y)$, дает нам дифференцируемость u по Фреше. Интеграл в (2.19) может пониматься, как векторно-значный интеграл Римана.

Используя уже доказанное, мы можем записать

$$\varphi(u(y_1 + y_2)) - \varphi(u(y_1)) = \int_0^1 \varphi(Du(y_1 + \tau y_2)(y_2)) d\tau$$

для всех $\varphi \in X^{**}$, а учитывая, что взятие риманова интеграла перестановочно с применением непрерывного линейного отображения, получаем

$$\varphi\left(u(y_1 + y_2) - u(y_1) - \int_0^1 Du(y_1 + \tau y_2)(y_2) d\tau\right) = 0$$

для всех $\varphi \in X$. Стало быть, (2.19) доказано.

Теперь ситуация такова: мы уже показали, что если понимать u как отображение в X^{**} , которое содержит X , то оно дифференцируемо по Фреше и его производная есть Du . С другой стороны, мы знаем, что u действительно имеет значения в X , и хотим доказать, что оно дифференцируемо как отображение в X . Это эквивалентно доказательству того, что

$Du(y_1)(y_2)$ принадлежит X для всех y_1, y_2 . Однако

$$Du(y_1)(y_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(y_1 + ty_2) - u(y_1)}{t}$$

(предел понимается в смысле нормы); разностное отношение справа лежит в X , а X замкнуто по норме в X^{**} . Таким образом, $Du(y_1)(y_2)$ лежит в X , и доказательство окончено. ■

(2.6) Замечания, касающиеся теоремы о центральном многообразии

1. Может показаться, что имеется потеря производных при переходе от Ψ к u^* , так как мы предполагаем, что Ψ класса C^{k+1} , а получаем, что u^* класса C^k . Фактически, однако, u^* имеет липшиц-непрерывную k -ю производную, а наше доказательство также проходит, если мы предположим только, что Ψ имеет липшиц-непрерывную k -ю производную; поэтому в этом классе отображений не происходит потери производных. Кроме того, если сделать более слабое предположение, что k -я производная Ψ равномерно непрерывна в некоторой окрестности нуля, то можно показать, что то же самое верно для u^* (если X, Y конечномерны, то непрерывность в окрестности нуля означает равномерную непрерывность в этой окрестности; однако это не верно, если X или Y бесконечномерны).

2. Как указал Ч. Пью, если Ψ бесконечно дифференцируемо, то центральное многообразие в общем случае *не может* быть выбрано бесконечно дифференцируемым. Также *не* верно и то, что если Ψ аналитично, то существует аналитическое центральное многообразие. Мы приведем контрпример для случая особой точки системы дифференциальных уравнений, а не для неподвижной точки отображения; см. теорему 2.7 ниже. Этот контрпример, принадлежащий Ланфорду, показывает также, что центральное многообразие не единственно; см. упр. 2.8.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = -x + h(y_1), \quad (2.20)$$

где h аналитична вблизи нуля и имеет второй порядок малости в нуле. Мы утверждаем, что если h не аналитична во всей комплексной плоскости, то не существует функции $u(y_1, y_2)$, аналитической в окрестности $(0, 0)$, второго порядка малости в точке $(0, 0)$ и такой, что многообразие $\{x = u(y_1, y_2)\}$ локально инвариантно относительно потока, индуцированного системой дифференциальных уравнений вблизи

$(0, 0, 0)$. Чтобы показать это, мы предположим, что такое инвариантное многообразие существует и функция u представляется в виде

$$u(y_1, y_2) = \sum_{\substack{j_1, j_2; \\ j_1 + j_2 \geq 1}} c_{j_1, j_2} y_1^{j_1} y_2^{j_2}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что коэффициенты c_{j_1, j_2} единственным образом определяются требованием инвариантности и тогда

$$c_{j_1, j_2} = \frac{(j_1 + j_2)!}{(j_1)!} h_{j_1 + j_2},$$

где $h(y_1) = \sum_{j \geq 2} h_j y_1^j$. Если ряд для h имеет конечный радиус сходимости, ряд для $u(0, y_2)$ расходится для всех ненулевых y_2 . Тем не менее система дифференциальных уравнений имеет бесконечно много дифференцируемых центральных многообразий. Чтобы построить одно из них, рассмотрим ограниченную бесконечно дифференцируемую функцию $\tilde{h}(y_1)$, совпадающую с h в окрестности нуля. Тогда многообразие, определенное формулой

$$u(y_1, y_2) = \int_{-\infty}^0 e^{\sigma} \tilde{h}(y_1 - \sigma y_2) d\sigma, \quad (2.21)$$

будет, как легко проверить, глобально инвариантным для системы

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = -x + \tilde{h}(y_1) \quad (2.22)$$

и, следовательно, локально инвариантным в окрестности нуля для исходной системы. (Чтобы выражение для u выглядело не столь таинственным, набросаем вкратце его вывод. Уравнения для y_1 и y_2 не содержат x и тривиально решаются в явном виде. Функция u , определяющая инвариантное многообразие модифицированной системы (2.22), должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d}{dt} u(y_1 - ty_2, y_2) = -u(y_1 - ty_2, y_2) + \tilde{h}(y_1 - ty_2)$$

для всех t, y_1, y_2 . Формула (2.21) для u получается решением этого дифференциального уравнения с соответствующим граничным условием при $t = -\infty$.)

3. Часто вместо неподвижной точки отображения Ψ бывает нужно изучить инвариантное многообразие V при некоторых предположениях спектрального характера о нор-

мальном расслоении V . Нам это потребуется в гл. 9. Этот общий случай рассматривается с помощью такой же процедуры; подробности можно найти в работе Хирша, Пью и Шуба [1].

Теорема о центральном многообразии для потоков

Теорема о центральном многообразии для отображений может быть использована для доказательства соответствующей теоремы для потоков. Здесь мы работаем с зависящими от t отображениями потока, а не с самим векторным полем, так как, имея в виду применение к уравнениям Навье — Стокса, мы будем рассматривать векторные поля, порождающие поток, определенные только на плотном множестве. Поскольку мы во многих случаях умеем доказывать, что эти отображения класса C^∞ , то такое предположение является приемлемым условием для многих уравнений с частными производными (подробности см. в гл. 8).

(2.7) **Теорема о центральном многообразии для потоков.** Пусть Z — банахово пространство, допускающее C^∞ норму¹⁾ всюду, кроме точки 0, и пусть F_t — полупоток класса C^0 , определенный в окрестности 0 для $0 \leq t \leq \tau$. Предположим, что $F_t(0) = 0$ и $F_t(x)$ при $t > 0$ класса C^{k+1} совместно по t и x . Предположим также, что спектр линейной полугруппы $DF_t(0): Z \rightarrow Z$ имеет вид $e^{t(\sigma_1 \cup \sigma_2)}$, где $e^{t\sigma_1}$ лежит на единичной окружности (т. е. σ_1 лежит на мнимой оси) и $e^{t\sigma_2}$ лежит внутри единичной окружности на ненулевом расстоянии от нее при $t > 0$, т. е. σ_2 лежит в левой полуплоскости. Пусть Y — обобщенное собственное подпространство, соответствующее части спектра на единичной окружности, и предположим, что $\dim Y = d < \infty$.

Тогда существует окрестность V точки 0 в Z и C^k -подмногообразие $M \subset V$ размерности d , проходящее через 0 и касающееся Y в 0; такое, что

- (а) если $x \in M$, $t > 0$ и $F_t(x) \in V$, то $F_t(x) \in M$;
- (б) если $t > 0$ и $F_t^n(x)$ определено и лежит в V для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то $F_t^n(x) \rightarrow M$ при $n \rightarrow \infty$.

Формулировка результата в такой форме является наиболее удобной для применений как к обыкновенным, так и к уравнениям в частных производных; причина этого состоит в том, что мы можем не беспокоиться по поводу «неограни-

¹⁾ Отметим, что это предположение на Z не требовалось выше, но здесь оно необходимо. Причина этого будет понятна ниже. Такое банахово пространство часто называется «гладким».

ченности» образующей потока¹⁾. Вместо этого мы пользуемся предположениями о гладкости потока.

Теорема о центральном многообразии для отображений (теорема 2.1) применяется здесь для каждого F_t , $t > 0$. Однако мы утверждаем, что V и M можно выбрать независимо от t . Основная причина этого состоит в том, что отображения $\{F_t\}$ коммутируют там, где они определены: $F_s \circ F_t = F_{t+s} = F_t \circ F_s$; но это, конечно, слишком упрощенное объяснение. При доказательстве теоремы о центральном многообразии мы будем требовать, чтобы F_t оставались глобально коммутирующими после того, как мы проведем вырезание с помощью функции φ . Нам необходимо обеспечить, чтобы при доказательстве леммы 2.4 можно было λ выбрать малым (независимо от t), и все F_t были глобально определены и коммутировали.

Для этого сначала мы вырежем F_t так, чтобы F_t не изменились внутри малого шара B с центром в нуле при $0 \leq t \leq \tau$, а вне B они стали тождественным отображением. Это достигается с помощью совместной непрерывности F_t и использования C^∞ функции f , которая равна единице в окрестности 0 и равна нулю вне B . Тогда, определяя

$$G_t(x) = F_\tau(x), \quad \text{где} \quad \tau = \int_0^t f(F_s(x)) ds, \quad (2.23)$$

легко видеть, что G_t продолжается до глобального полупотока²⁾ на Z , который совпадает с F_t в окрестности нуля ($0 \leq t \leq \tau$) и равен тождественному вне B . Кроме того, G_t остается C^{k+1} полупотоком (чтобы это выполнялось, мы требуем гладкости нормы на Z и совместной гладкости по t и x отображений F_t при $t > 0$ ³⁾).

Теперь мы можем одновременно выбрать масштабный множитель и отрезать G_t вне B , как в вышеприведенном доказательстве. Так как мы не меняли F_t в малой окрестности нуля, то получаем требуемый результат.

(2.8) *Упражнение* (неединственность центрального многообразия для потоков). Пусть $X(x, y) = (-x, y^2)$. Решить уравнение $\frac{d(x, y)}{dt} = X(x, y)$ и нарисовать интегральные кривые.

¹⁾ То есть соответствующего потоку векторного поля. — Прим. перев.

²⁾ В теории линейных полугрупп это соответствует аналитичности полугруппы; это выполняется, например, для уравнений теплопроводности относительно уравнений Навье — Стокса, см. главы. 8, 9.

³⁾ Дальнейшие детали в работе Ренц [1].

Показать, что поток, порожденный X , удовлетворяет условиям теоремы 2.7 с осью y в качестве Y . Показать, что ось y является центральным многообразием для потока. Показать, что каждая интегральная кривая в нижней полуплоскости стремится к началу при $t \rightarrow \infty$ и что кривая становится параллельной y -оси при $t \rightarrow -\infty$. Показать, что любая кривая, являющаяся объединением неотрицательной полуоси y с любой интегральной кривой нижней полуплоскости, будет центральным многообразием потока X (см. Келли [1], стр. 149).

(2.9) *Упражнение* (предполагается знание теории линейных полугрупп).

Рассмотрим гильбертово пространство H (или «гладкое» банахово пространство), и пусть A — образующая аналитической полугруппы. Пусть $K: H \rightarrow H$ будет C^{k+1} -отображением. Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax + K(x), \quad x(0) = x_0. \quad (2.24)$$

(а) Показать, что оно определяет локальный полупоток $F_t(x)$ на H класса C^{k+1} по (t, x) для $t > 0$. (Указание: решить интегральное уравнение Дюамеля

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}K(x(s))ds$$

итерациями или с помощью теоремы о неявной функции на подходящем пространстве отображений (Сегал [1], Марсден [1], Роббин [1]).)

(б) Пусть $K(0) = 0$, $DK(0) = 0$. Используя теорему 2.7, доказать существование инвариантного многообразия для (2.24) при подходящих предположениях о спектре A .

Глава 2А

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

В этом разделе мы кратко напомним некоторые факты спектральной теории линейных операторов. Подробнее см. у Рудина [1] или Данфорда и Шварца [1, 2]. Используя эти результаты, мы докажем теоремы 1.3 и 1.4.

Пусть $T: E \rightarrow E$ — ограниченный линейный оператор, действующий в банаховом пространстве E , и $\sigma(T)$ — его спектр, $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \text{ не имеет обратного на комплексификации } E\}$. Тогда $\sigma(T)$ непусто, компактно, и если $\lambda \in \sigma(T)$, то $|\lambda| \leq \|T\|$. Обозначим через $r(T)$ спектральный радиус T , определяемый равенством $r(T) = \sup \{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(T)\}$; $r(T)$ можно также определить по формуле

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

(Доказательство этого факта аналогично выводу формулы для радиуса сходимости степенного ряда и может быть легко получено, см. Рудин [1, стр. 264].)

Доказательства следующих двух лемм также несложны и могут быть найдены в книгах, на которые мы уже ссылались.

(2А.1) **Лемма.** Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — целая функция и $\tilde{f}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$. Тогда $\sigma(\tilde{f}(T)) = f(\sigma(T))$.

(2А.2) **Лемма.** Предположим, что $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$, причем $d(\sigma_1, \sigma_2) > 0$. Тогда однозначно определяются T -инвариантные подпространства E_1 и E_2 , такие, что $E = E_1 \oplus E_2$, и если $T_i = T|_{E_i}$, то $\sigma(T_i) = \sigma_i$. E_i называется обобщенным собственным подпространством σ_i .

Лемма 2А.2 доказывается следующим образом. Выберем замкнутую кривую γ_1 , такую, что σ_1 лежит внутри, а σ_2 —

вне ее. Тогда

$$T_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{zI - T} {}^1).$$

Отметим, что собственное пространство собственного значения λ не всегда совпадает с обобщенным собственным подпространством λ . В конечномерном случае обобщенное собственное подпространство λ совпадает с подпространством, соответствующим всем жордановым клеткам, содержащим λ в канонической жордановой форме.

(2A.3) **Лемма.** Пусть T, σ_1, σ_2 обозначают то же, что и в лемме 2A.2 и $d(e^{\sigma_1}, e^{\sigma_2}) > 0$. Тогда для оператора e^{tT} обобщенным собственным подпространством множества $e^{t\sigma_i}$ является E_i .

Доказательство. Согласно лемме 2A.2, $E = E_1 \oplus E_2$. Поэтому

$$\begin{aligned} e^{tT}(e_1, e_2) &= \sum_0^\infty \frac{t^n T^n}{n!} (e_1, e_2) = \left(\sum_0^\infty \frac{t^n T^n}{n!} e_1, \sum_0^\infty \frac{t^n T^n}{n!} e_2 \right) = \\ &= \left(\sum_0^\infty \frac{t^n T_1^n}{n!} e_1, \sum_0^\infty \frac{t^n T_2^n}{n!} e_2 \right) = (e^{tT_1} e_1, e^{tT_2} e_2). \end{aligned}$$

Теперь доказательство очевидно. ■

(2A.4) **Лемма.** Пусть $T: E \rightarrow E$ — ограниченный линейный оператор, определенный в банаховом пространстве E , и r — любое число, большее $r(T)$. Тогда существует норма $|\cdot|$ на E , эквивалентная исходной, для которой $|T| \leq r$.

Доказательство. Как мы знаем, $r(T)$ дается формулой $r(T) = \lim \|T^n\|^{1/n}$. Поэтому $\sup_{n \geq 0} \frac{\|T^n\|}{r^n} < \infty$. Определим $|x| = \sup_{n \geq 0} \frac{\|T^n(x)\|}{r^n}$. Тогда, как нетрудно видеть, $|\cdot|$ является нормой и

$$\|x\| \leq |x| \leq \left(\sup_{n \geq 0} \frac{\|T^n\|}{r^n} \right) \|x\|.$$

Следовательно,

$$|T(x)| = \sup_{n \geq 0} \frac{\|T^{n+1}(x)\|}{r^n} = r \sup_{n \geq 0} \frac{\|T^{n+1}(x)\|}{r^{n+1}} \leq r |x|. \quad \blacksquare$$

¹⁾ По поводу смысла этого интеграла см. Рудин [1], Дьедонне [1]. — Прим. перев.

(2А.5) **Лемма.** Пусть $A: E \rightarrow E$ — ограниченный оператор, и пусть $r > \sigma(A)$ (т. е. если $\lambda \in \sigma(A)$, то $\operatorname{Re} \lambda < r$). Тогда существует эквивалентная норма $|\cdot|$ на E , такая, что для $t \geq 0$

$$|e^{tA}| \leq e^{rt}.$$

Доказательство. Заметим, что e^{rt} больше спектрального радиуса e^{tA} (см. лемму 2А.1), т. е.

$$e^{rt} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{ntA}\|^{1/n}.$$

Положим

$$|x| = \sup_{\substack{n \geq 0 \\ t \geq 0}} \frac{\|e^{ntA}(x)\|}{e^{rnt}}.$$

Далее доказательство ведется так же, как и в лемме 2А.4. ■

Аналогичную лемму можно доказать для случая $r < \sigma(A)$. Тогда $|e^{tA}| \geq e^{rt}$. Располагая такой техникой, мы вернемся к доказательству теорем 1.3, 1.4 гл. 1.

(1.3) **Теорема.** Пусть $T: E \rightarrow E$ — ограниченный линейный оператор. Если $\sigma(T) \subset \{z | \operatorname{Re} z < 0\}$ (соответственно $\sigma(T) \subset \{z | \operatorname{Re} z > 0\}$), то нуль является притягивающей (соответственно отталкивающей) неподвижной точкой потока $\varphi_t = e^{tT}$.

Доказательство. Утверждение теоремы есть очевидное следствие леммы 2А.5, ибо при $\sigma(T) \subset \{z | \operatorname{Re} z < 0\}$ существует $r < 0$, такое, что $\sigma(T) < r$, так как $\sigma(T)$ компактно. Тем самым $|e^{tA}| \leq e^{rt} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. ■

Теперь мы докажем первую часть теоремы 1.4 из гл. 1.

(1.4) **Теорема.** Пусть X — векторное поле класса C^1 на банаховом многообразии P и $X(p_0) = 0$. Если $\sigma(dX(p_0)) \subset \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z < 0\}$, то p_0 асимптотически устойчиво.

Доказательство. Мы можем считать P банаховым пространством E и $p_0 = 0$. Как и выше, перенормируем E и найдем $\varepsilon > 0$, при котором $\|e^{tA}\| \leq e^{-\varepsilon t}$, где $A = dX(0)$.

Локальная теорема существования для обыкновенных дифференциальных уравнений¹⁾ позволяет найти r -шар с центром в нуле, для которого время, где гарантируется существование решения, не зависит от начальной точки x_0 , если x_0 лежит в этом шаре.

¹⁾ См., например, Хейл [1], Хартман [1], Ленг [1] и др.

Пусть $R(x) = X(x) - DX(0) \cdot x$. Возьмем $r_2 \leq r_1$ такое, что из $\|x\| \leq r_2$ следует $\|R(x)\| \leq \alpha \|x\|$, где $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть B — открытый $(r_2/2)$ -шар с центром в нуле. Теорема будет доказана, если мы покажем, что при $x_0 \in B$ траектория, начинающаяся в точке x_0 , остается в B и стремится к 0 при $t \rightarrow +\infty$.

Возьмем траекторию $x(t)$ поля X , начинающуюся в точке x_0 . Допустим, что $x(t)$ остается в B при $0 \leq t < T$. Заметим, что

$$x(t) = x_0 + \int_0^t X(x(s)) ds = x_0 + \int_0^t [A(x(s)) + R(x(s))] ds,$$

поэтому (по формуле Дюамеля, упр. 2.9)

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}R(x(s)) ds,$$

и, следовательно,

$$\|x(t)\| \leq e^{-t\varepsilon} \|x_0\| + \alpha \int_0^t e^{-(t-s)\varepsilon} \|x(s)\| ds.$$

Если мы теперь положим $f(t) = e^{t\varepsilon} \|x(t)\|$, то

$$f(t) \leq \|x_0\| + \alpha \int_0^t f(s) ds$$

и, следовательно,

$$f(t) \leq \|x_0\| e^{\alpha t}.$$

(Это элементарное неравенство обычно называется неравенством Гронуолла, см. Хартман [1].)

Таким образом,

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| e^{(\alpha - \varepsilon)t} = \|x_0\| e^{-\varepsilon t/2}.$$

Отсюда следует, что $x(t) \in B$, $0 \leq t < T$, поэтому $x(t)$ можно продолжить на все t , и вышеприведенная оценка продолжает выполняться. Этим доказано, что $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. ■

Та часть теоремы 1.4, которая касается неустойчивости, требует использования теорем об инвариантных многообразиях, соответствующих расщеплению спектра на две части, расположенные в правой и левой полуплоскостях. Вышеприведенный анализ показывает, что в подпространстве, соответ-

ствующем спектре в правой полуплоскости, p_0 — отталкивающая точка и поэтому неустойчива.

(2А.6) **Замечания.** Теорема 1.3 остается верной, причем с тем же доказательством, если T — неограниченный оператор, при условии, что $\sigma(e^{tT}) = e^{t\sigma(T)}$; это часто выполняется для не очень плохих T (например, если T имеет дискретный спектр), но в общем случае справедливо не всегда (см. Хилле и Филлипс [1]). Это замечание важно для применений к уравнениям с частными производными.

Доказательство теоремы 1.4 требует, вообще говоря, условия $R(x) = o(\|x\|)$, что нереально для уравнений с частными производными. Тем не менее справедливо следующее утверждение.

Предположим, что

$$\sigma(DF_t(0)) = e^{t\sigma(DX(0))},$$

и мы рассматриваем C^0 поток F_t , у которого каждое F_t класса C^1 с производной, сильно непрерывной по t (см. гл. 8А). Тогда теорема 1.4 по-прежнему верна.

Это можно доказать следующим образом: при тех же обозначениях по формуле Тейлора

$$F_t(x) - 0 = F_t(x) - F_t(0) = DF_t(0) \cdot x + R(t, x),$$

где $R(t, x)$ — остаточный член. Далее, до тех пор, пока x остается в малой окрестности 0, выполняется оценка

$$\|R(t, x)\| = O(\|x\|)e^{-\varepsilon t}.$$

Это вытекает из неравенства $\|DF_t(0)\| \leq e^{-2\varepsilon t}$, откуда

$$\|DF_t(x)\| \leq e^{-\varepsilon t}$$

при некотором $\varepsilon > 0$ и x в окрестности 0; напомним также, что

$$R(t, x) = \int_0^1 \{DF_t(sx) \cdot x - DF_t(0) \cdot x\} ds.$$

Таким образом, рассуждая как в теореме 1.4, мы можем получить, что x остается вблизи нуля и $F_t(x)$ экспоненциально стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. ■

(2А.7) **Упражнение.** Пусть E — банахово пространство и $F: E \rightarrow E$ — отображение класса C^1 , $F(0) = 0$, а спектр $DF(0)$ лежит внутри единичной окружности. Показать, что существует окрестность U точки 0, для которой из $x \in U$ следует $F^n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. 0 — устойчивая точка F .

Глава 2В

ОТОБРАЖЕНИЕ ПУАНКАРЕ

Сначала напомним определение отображения Пуанкаре. При этом мы докажем, что это отображение существует и дифференцируемо. Фактически это можно сделать для таких C^0 -потоков $F_t(x)$, у которых отображение F_t класса C^k при каждом t , как это было в теореме о центральном многообразии для потоков, но с дополнительным условием гладкости $F_t(x)$ по t для $t > 0$. К тому же эти условия хорошо приспособлены для применения результатов к уравнениям с частными производными. Тем не менее сначала мы ограничимся случаем обыкновенных дифференциальных уравнений, где F_t — поток, порожденный векторным полем X класса C^k .

Прежде всего напомним, что замкнутая орбита γ потока F_t на многообразии M — это такая интегральная кривая $\gamma(t)$ поля X , для которой $\gamma(t + \tau) = \gamma(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и некотором $\tau > 0$. Наименьшее такое τ называют периодом γ . Образ γ , очевидно, диффеоморфен окружности.

(2В.1) **Определение.** Рассмотрим замкнутую орбиту γ и точку m на γ , например $m = \gamma(0)$, и пусть S — локальная трансверсальная секущая, т. е. подмногообразие коразмерности один, трансверсальное γ (т. е. $\gamma'(0)$ не касается S). Пусть поток определен в (открытой) области $\mathcal{D} \subset M \times \mathbb{R}$.

Отображение Пуанкаре для орбиты γ — это отображение $P: W_0 \rightarrow W_1$, такое, что:

(ОП 1) $W_0, W_1 \subset S$ — открытые окрестности точки $m \in S$, а P является C^k -диффеоморфизмом;

(ОП 2) существует функция $\delta: W_0 \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что для всех $x \in W_0$ точка $(x, \tau - \delta(x)) \in \mathcal{D}$ и $P(x) = F(x, \tau - \delta(x))$;

(ОП 3) если $t \in (0, \tau - \delta(x))$, то $F(x, t) \notin W_0$ (рис. 2В.1).

(2В.2) **Теорема существования и единственности отображения Пуанкаре.**

1) Если X — векторное поле класса C^k на многообразии M и γ — замкнутая орбита поля X , то существует отображение Пуанкаре для γ .

2) Если $P: W_0 \rightarrow W_1$ — отображение Пуанкаре для γ (на локальной трансверсальной секущей S , проходящей через

точку $m \in \gamma$), а P' — такое же отображение на секущей S' в точке $m' \in \gamma$, то P и P' локально сопряжены. Это означает, что существуют открытые окрестности W_2 точки $m \in S$, W'_2 точки $m' \in S'$ и C^k -диффеоморфизм $H: W_2 \rightarrow W'_2$, такой, что $W_2 \subset W_0 \cap W_1$, $W'_2 \subset W'_0$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P^{-1}(W_2) \cap W_2 & \xrightarrow{P} & W_2 \cap P(W_2) \\ H \downarrow & & \downarrow H \\ W'_2 & \xrightarrow{P'} & S' \end{array}$$

коммутативна.

Здесь мы только приведем идею доказательства существования (подробности можно найти у Абрахама и Марсдена

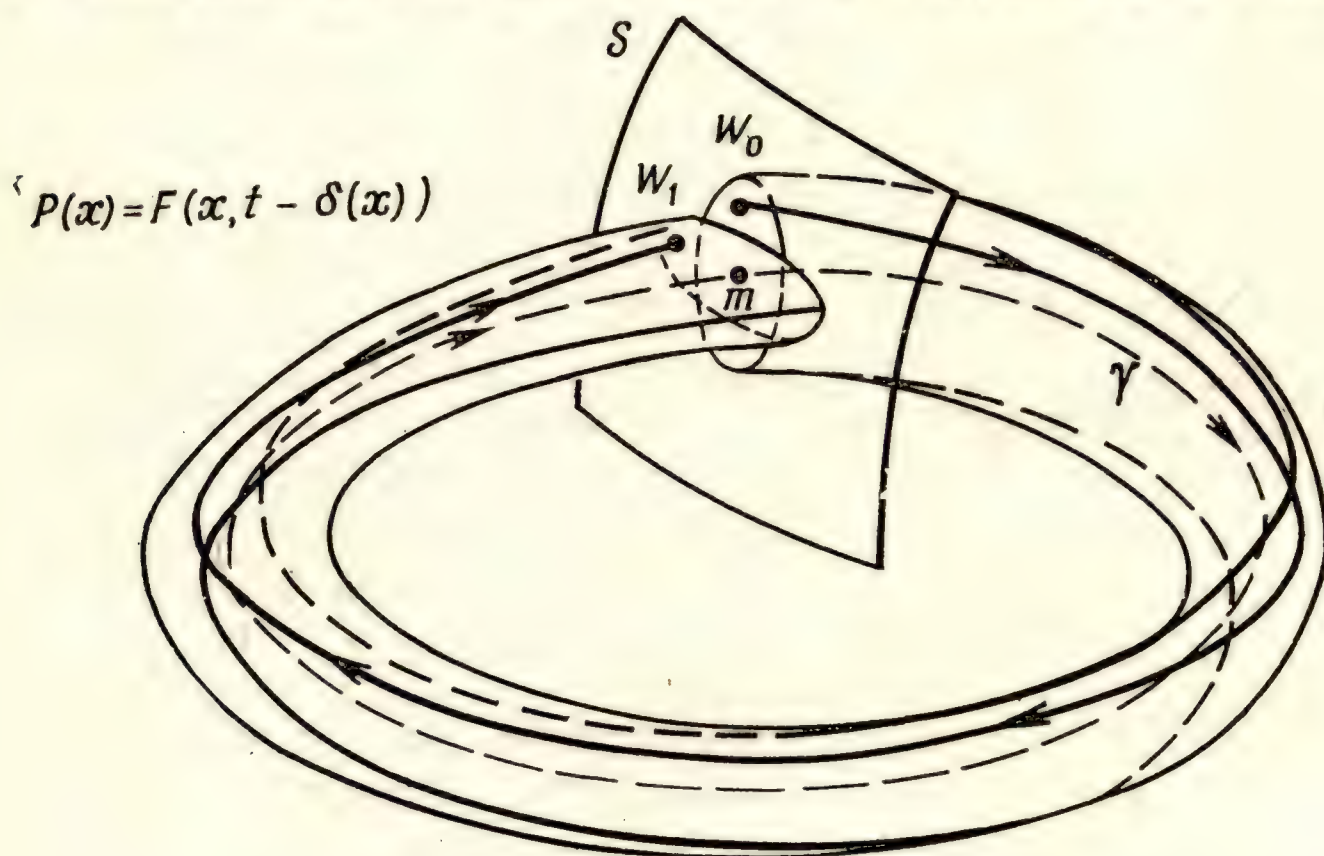


Рис. 2В.1.

[1]¹⁾. Выберем S произвольно. Из соображений непрерывности ясно, что F_τ — гомеоморфизм окрестности U_0 точки m на другую окрестность U_2 той же точки. По предположению $F_{\tau+t}(x)$ дифференцируем по t при $t=0$ и трансверсален S в точке $x=m$, а следовательно, и в окрестности m . Поэтому существует единственное число $\delta(x)$, близкое к нулю и такое, что $F_{\tau-\delta(x)}(x) \in S$. Это и есть $P(x)$, и по конструкции P будет дифференцируемо, если таковым было F . Легко видеть, что производной P в точке m будет проекция производной F_τ на $T_m S$ (это показано ниже). Следовательно, если F_τ — диффеоморфизм, то и P будет диффеоморфизмом. ■

В случае уравнений с частными производными отображения F_t нередко образуют только полупоток, т. е. определены

¹⁾ См. также Хартман [1, с. 301]. — Прим. перев.

для $t \geq 0$ (см. гл. 8А). Отсюда следует, что F_t , вообще говоря, не является диффеоморфизмом (например, если F_t — поток, порожденный уравнением теплопроводности на L_2 , то F_t не сюръективно¹⁾).

Для отображения Пуанкаре это означает, что мы получим P (если $F_t(x)$ дифференцируемо по t , x при $t > 0$), но P — это просто *отображение*, не обязательно являющееся диффеоморфизмом. Это одна из причин технического характера, почему важно иметь теорему о центральном многообразии для *отображений*, а не только для диффеоморфизмов.

Как мы уже упоминали в гл. 1, существует бифуркационная теорема для *диффеоморфизмов*, и она может быть применена к отображению Пуанкаре P для получения инвариантной замкнутой кривой этого отображения и, следовательно, инвариантного тора для F_t .

Для уравнений с частными производными мы как будто оказываемся в затруднительном положении, так как P , вообще говоря, не является диффеоморфизмом. Однако мы можем обойти эту трудность с помощью следующего приема: сначала, применяя теорему о центральном многообразии, мы сводим задачу к конечномерной, и для этого диффеоморфизм не требуется; теперь же, как доказано в гл. 8А (см. 8А.9), в конечномерном подпространстве F_t (и, следовательно, P) *автоматически* становится (локальным) диффеоморфизмом. Таким образом, эта трудность только кажущаяся.

Теперь докажем основные результаты, касающиеся производной P , тогда мы сможем сравнить спектр P со спектром F_t . Достаточно сделать вычисления для банахова пространства E , и мы можем выбрать $m = 0 \in E$.

Начнем с вычисления $dP(0)$ в терминах F_t .

(2В.3) **Лемма.** Пусть $F_t: E \rightarrow E$ — поток класса C^1 на банаховом пространстве и замкнутая орбита γ периода $\tau \neq 0$ проходит через начало координат. Пусть

$$\left. \frac{\partial F_t}{\partial t}(0) \right|_{t=0} = v.$$

Обозначим через V подпространство, порожденное вектором v , а через F дополнительное подпространство, так что $E = F \oplus V$ и $F_t(x, y) = (F_t^1(x, y), F_t^2(x, y))$. Если $P: F \rightarrow F$ — отображение Пуанкаре для γ в точке 0, то $dP(0) = d_1 F_\tau^1(0)$.

Доказательство. Обозначим через $\tau(x)$ время перехода из точки x в точку $P(x)$ (выше оно обозначалось через

¹⁾ То есть не является отображением L_2 на L_2 , а только в L_2 . — Прим. перев.

$\tau - \delta(x)$). По определению P ,

$$P(x) = F_{\tau(x)}^1(x, 0),$$

поэтому

$$dP(x) = \frac{\partial F_{\tau(x)}^1}{\partial t}(x, 0) d\tau(x) + d_1 F_{\tau(x)}^1(x, 0).$$

Полагая $(x, 0) = 0$, мы получаем

$$dP(0) = \frac{\partial F_{\tau}^1}{\partial t}(0) d\tau(0) + d_1 F_{\tau}^1(0).$$

Однако

$$\frac{\partial F_{\tau}}{\partial t}(0) = \left(\frac{\partial F_{\tau}^1}{\partial t}(0), \frac{\partial F_{\tau}^2}{\partial t}(0) \right) = (0, v)$$

по построению, поэтому $\frac{\partial F_{\tau}^1}{\partial t}(0) = 0$. Тем самым $dP(0) = d_1 F_{\tau}^1(0)$. ■

(2В.4) **Лемма.** $d_2 F_{\tau}(0, 0) v = v$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{dF_{\tau+s}}{ds}(0, 0) \Big|_{s=0} &= \frac{dF_t}{dt}(0, 0) \Big|_{t=\tau} = v, \\ \frac{dF_{\tau+s}(0, 0)}{ds} \Big|_{s=0} &= \frac{d(F_{\tau} \circ F_s)}{ds}(0, 0) \Big|_{s=0} = dF_{\tau}(0, 0) \frac{dF_s}{ds}(0, 0) \Big|_{s=0} = \\ &= dF_{\tau}(0, 0)(0, v) = (d_1 F_{\tau}(0, 0) \cdot 0 + d_2 F_{\tau}(0, 0) v). \end{aligned}$$

Поэтому $d_2 F_{\tau}(0, 0) v = v$. ■

(2В.5) **Лемма.** $\sigma(dF_{\tau}(0, 0)) = \sigma(dP(0)) \cup \{1\}$. (Это также верно в случае точечного спектра.)

Доказательство. Матрица $dF_{\tau}(0, 0)$ имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c} dP(0) & 0 \\ \hline * & 1 \end{array} \right),$$

где $*$ обозначает некоторые произвольные элементы матрицы. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Известно, что $\lambda \in \sigma(dF_{\tau}(0, 0))$ тогда и только тогда, когда оператор $dF_{\tau}(0, 0) - \lambda I$ не взаимно однозначен или не является отображением на. Однако

$$\begin{aligned} (dF_{\tau}(0, 0) - \lambda I) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= (dP(0) \alpha, *(\alpha) + \beta) + (\lambda \alpha, -\lambda \beta) = \\ &= (dP(0) \alpha - \lambda \alpha, *(\alpha) + \beta(1 - \lambda)). \end{aligned} \quad (2В.1)$$

Ясно, что $1 \in \sigma(dF_\tau(0,0))$ ¹⁾. Предположим, что $\lambda \neq 1$ и $\lambda \in \sigma(dF_\tau(0,0))$. Тогда или существует вектор (α, β) , такой, что выражение (2В.1) равно нулю, или это отображение не на все пространство. В первом случае $\lambda \in \sigma(dP(0))$. Рассмотрим вторую возможность. Так как $\lambda \neq 1$, то для любого α мы можем выбрать β таким образом, чтобы вторая компонента была отображением на. Поэтому $\lambda \in \sigma(dP(0))$. С другой стороны, пусть $1 \neq \lambda \in \sigma(dP(0))$. Если $dP(0) - \lambda I$ не является отображением на все пространство, то это верно и для $dF_\tau(0,0) - \lambda I$. Допустим теперь, что существует α , для которого $dP(0)\alpha - \lambda\alpha = 0$. Тогда, выбирая $\beta = \frac{*(\alpha)}{\lambda - 1}$, мы видим, что $\lambda \in \sigma(dF_\tau(0,0))$. ■

Дополнительные подробности и связанную с этим теорию Флоке можно найти в книгах Абрахама и Марсдена [1], Абрахама и Роббина [1] или Хартмана [1, разд. IV.6, IX.10].

Одним из наиболее важных применений отображения Пуанкаре является доказательство следующего утверждения:

(2В.6) **Теорема.** Пусть γ — замкнутая орбита потока F_t периода τ и $t \in \gamma$. Предположим, что спектр оператора $dF_\tau(t)$, за исключением точки 1, лежит внутри единичной окружности. Тогда γ — притягивающая (устойчивая) замкнутая орбита.

Доказательство. По лемме 2В.5, из условия на спектр мы получаем, что спектр производной отображения Пуанкаре P в точке t лежит внутри единичной окружности. Тогда из 2А.7 следует, что t — притягивающая неподвижная точка отображения P . Из способа построения P мы заключаем, что γ — устойчивая орбита F_t . ■

(2В.7) **Упражнение.**

(а) Провести подробное доказательство последнего шага в 2В.6.

(б) Пусть, аналогично 2В.6, отображение P имеет устойчивую инвариантную замкнутую кривую. Доказать существование устойчивого инвариантного двумерного тора потока.

¹⁾ См. доказательство леммы 2В.4. — Прим. перев.

Глава 3

ТЕОРЕМА ХОПФА В $\mathbb{R}^2$ И В $\mathbb{R}^n$

Теорема о центральном многообразии используется для сведения бифуркационной задачи к конечномерному случаю следующим образом. Рассмотрим однопараметрическое семейство отображений $\Psi^\mu: Z \rightarrow Z$ банахова пространства Z , где $\mu \in \mathbb{R}$ или интервалу из $\mathbb{R}$, содержащему 0. Предположим, что отображение $(\mu, x) \mapsto \Psi^\mu(x)$ принадлежит классу C^{k+1} и $\Psi^\mu(0) = 0$ для всех μ . Будем считать, что при $\mu < 0$ спектр $D\Psi^\mu(0)$ лежит строго внутри единичной окружности, при $\mu = 0$ спектр состоит из двух кусков, как в теореме о центральном многообразии, а при $\mu > 0$ часть спектра лежит внутри, а другая часть вне единичной окружности (рис. 3.1).

Рассмотрим отображение $\Psi: \mathbb{R} \times Z \rightarrow \mathbb{R} \times Z$, $(\mu, x) \mapsto (\mu, \Psi^\mu(x))$. Его производная в нуле

$$\begin{aligned} D\Psi(0, 0)(v, h) &= \left(v, \frac{\partial \Psi^\mu}{\partial \mu}(x) \cdot v \Big|_{\substack{\mu=0 \\ x=0}} + D_x \Psi^\mu(x) \cdot h \Big|_{\substack{\mu=0 \\ x=0}} \right) = \\ &= (v, D_x \Psi^\mu(0) \cdot h) \end{aligned}$$

(так как $\Psi^\mu(0) = 0$ при всех μ). Таким образом, спектр $D\Psi(0, 0)$ есть объединение спектра $D_x \Psi^\mu(0)$ и точки 1. Поэтому мы можем применить к Ψ теорему о центральном многообразии и получить инвариантное многообразие в $\mathbb{R} \times Z$.

Подмногообразия $\mu = \text{const}$ этого инвариантного многообразия образуют однопараметрическое семейство инвариантных многообразий для отображений Ψ^μ . Эти многообразия той же самой размерности, что и собственное подпространство, соответствующее части спектра, пересекающей единичную окружность, а эта размерность часто бывает конечной.

Вполне аналогично можно провести такое сведение и для потоков, используя теорему о центральном многообразии для потоков.

Следует соблюдать осторожность, так как, хотя центральное многообразие и содержит всю локальную рекуррентность, оно не является ни глобально инвариантным, ни устойчивым в строгом смысле. Тем не менее, если пара собственных зна-

чений пересекает единичную окружность (или мнимую ось, если рассматривать векторное поле), то мы можем свести задачу к двумерному случаю (заметим, что полупоток C^{k+1} -отображений на конечномерном пространстве автоматически порождается C^k -векторным полем, так что если сведение *уже сделано*, то мы обычно можем предполагать, что поток гладкий, см. гл. 8А).

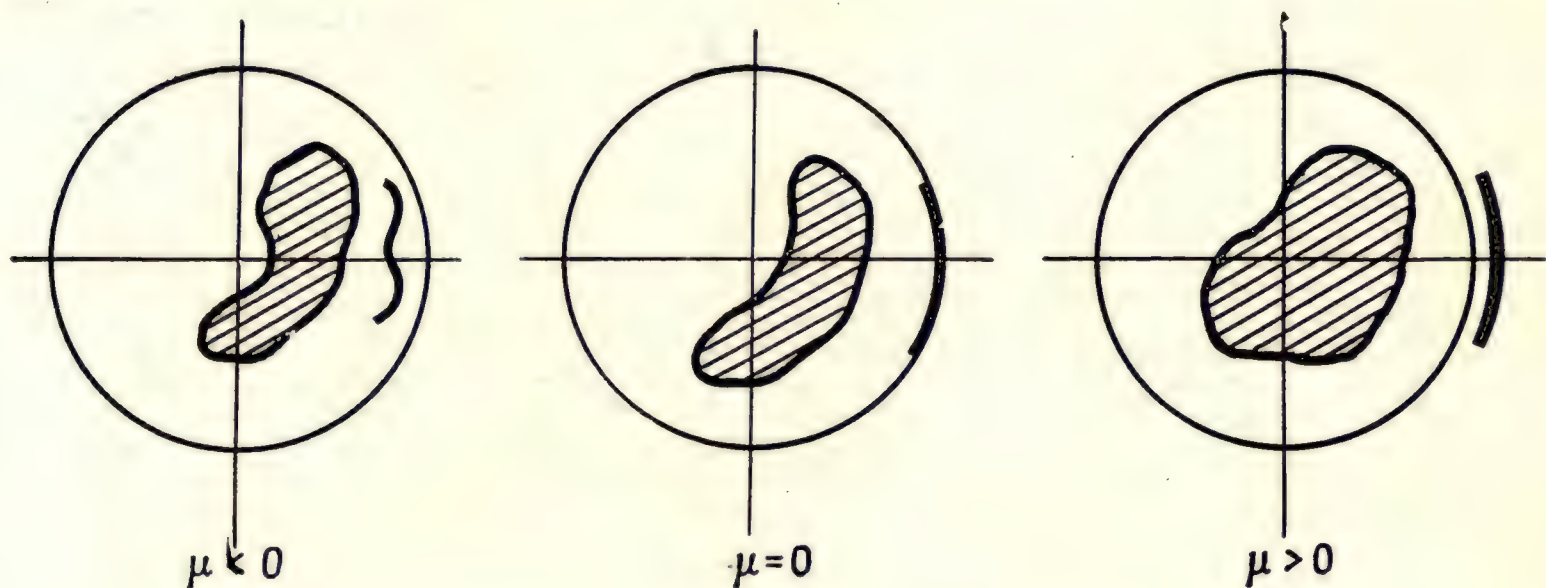


Рис. 3.1.

Поэтому мы теперь детально рассмотрим конечномерный случай (подробности, относящиеся к вышеупомянутому процессу сведения, можно найти в гл. 4).

Сначала рассмотрим двумерный случай (n -мерный случай рассматривается ниже в теореме 3.15).

Теорема Хопфа в $\mathbb{R}^2$

Следующая теорема в основном принадлежит А. А. Андронову (1930) и Хопфу (1942) и была намечена в работе Пуанкаре (1892)¹⁾.

(3.1) **Теорема.** Пусть X_μ — векторное поле класса C^k ($k \geq 4$) в $\mathbb{R}^2$ и такое, что $X_\mu(0) = 0$ для всех μ , а поле $X = (X_\mu, 0)$ также класса C^k . Предположим, что $dX_\mu(0, 0)$ имеет два различных комплексно-сопряженных собственных значения $\lambda(\mu)$ и $\overline{\lambda(\mu)}$, причем $\operatorname{Re} \lambda(0) = 0$, $\operatorname{Re} \lambda(\mu) > 0$ при $\mu > 0$. Пусть также $\left. \frac{d(\operatorname{Re} \lambda(\mu))}{d\mu} \right|_{\mu=0} > 0$. Тогда

(А) существует C^{k-2} функция²⁾ $\mu: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что при $x_1 \neq 0$ точка $(x_1, 0, \mu(x_1))$ лежит на замкнутой орбите поля X периода $\approx 2\pi/|\lambda(0)|$, причем $\mu(0) = 0$;

¹⁾ Настоящий вариант теоремы 3.1 принадлежит Рюэлю и Такенсу [1], n -мерный случай рассмотрен Хопфом. См. для сравнения главу 5А.

²⁾ Если X аналитично, то функция μ также аналитична (Хопф [1], см. гл. 5).

(В) существует окрестность U точки $(0, 0, 0)$ в $\mathbb{R}^3$, такая, что любая замкнутая орбита, лежащая в U , — это одна из орбит вышеуказанного семейства. Кроме того, если точка 0 — слабый аттрактор поля X_0 , то

(С) $\mu(x_1) > 0$ для всех $x_1 \neq 0$, замкнутые орбиты устойчивы, а радиус орбиты (при изменении μ) растет как $\sqrt{\mu}^{-1}$.

Смысл выражения «слабый аттрактор» будет выяснен в дальнейшем, в гл. 4, когда будут проведены подробные

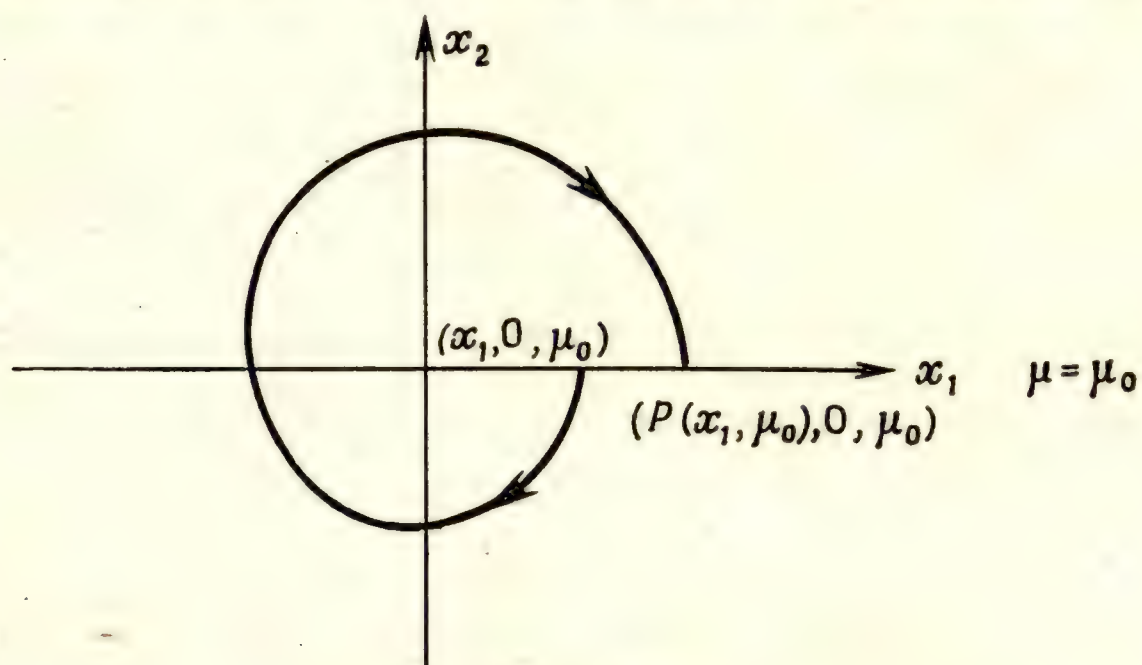


Рис. 3.2.

вычисления, связанные с условием, содержащим это определение (см. также гл. 5А). В гл. 3А показано, что соответствующее условие можно ослабить, заменив «слабый аттрактор» аттрактором в обычном ляпуновском смысле.

Во всяком случае, в примерах выполнение этого условия обычно не является очевидным, и поэтому ниже оно будет подробно обсуждаться.

В нашем доказательстве мы следуем Рюэлю и Такенсу [1] с некоторыми дополнениями. В конце главы мы обсудим, что произойдет в случае $d(\operatorname{Re} \lambda(\mu))/d\mu = 0$ (см. гл. 3А).

Доказательство. Суть доказательства состоит в применении теоремы о неявной функции. Мы покажем, что для малых μ существует C^{k-1} -функция, которая отображает точку $(x_1, 0, \mu)$ в точку $(P(x_1, \mu), 0, \mu)$ первого такого пересечения орбиты потока X , проходящей через $(x_1, 0, \mu)$, с осью x_1 , при котором x_1 и $P(x_1, \mu)$ имеют одинаковый знак (рис. 3.2). Пусть $V(x_1, \mu) = P(x_1, \mu) - x_1$. V есть функция смещения.

Используя теорему о неявной функции, получим кривую $(x_1, 0, \mu(x_1))$ нулей V , соответствующих замкнутым орбитам

¹⁾ Теорема о рождении циклов из сложного фокуса подробно рассмотрена в книгах А. А. Андронова, Е. А. Леонтович, И. И. Гордона, А. Г. Майера [1, 2]. — Прим. ред.

потока X . Отображение $(x, 0) \mapsto (P(x, \mu(x_1)), 0)$ есть отображение Пуанкаре, построенное для замкнутой орбиты, проходящей через точку $(x_1, 0, \mu(x_1))$. Затем, пользуясь стандартными результатами относительно отображения Пуанкаре, мы найдем условия устойчивости замкнутой орбиты. Единственность замкнутых орбит получается, по существу, из единственности функции, определяемой теоремой о неявной функции (доказательство единственности замкнутых орбит в высших размерностях более сложно, см. гл. 5 и 5А).

Шаг 1. Делая линейную замену координат в $\mathbb{R}^2$, зависящую от μ , мы можем считать, что

$$dX_\mu(0, 0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda(\mu) & \operatorname{Im} \lambda(\mu) \\ -\operatorname{Im} \lambda(\mu) & \operatorname{Re} \lambda(\mu) \end{pmatrix},$$

где $\lambda(\mu)$ выбрано так, что $\operatorname{Im} \lambda(\mu) > 0$. В новых координатах X_μ имеет непрерывные производные до порядка k . Кроме того, для каждого μ ось x_1 инвариантна относительно замены (т. е. новая ось та же, что и старая, мы меняем только ось x_2). Приведем несколько простых лемм, из которых вытекает все сказанное.

(3.2) **Лемма.** Пусть

$$\mu \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{pmatrix}$$

функция класса C^k из $U \subseteq \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^4$. Пусть матрица имеет два различных собственных значения для всех $\mu \in [a, b] \subset U$. Тогда собственные значения являются C^k функциями из (a, b) в $\mathbb{C}$.

*Доказательство*¹⁾. По формуле решений квадратного уравнения собственные значения равны

$$\frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21}}}{2}.$$

По предположению $(a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21}$ отделено от нуля на (a, b) , поэтому собственные значения являются C^k -функциями параметра μ на этом интервале. ■

(3.3) **Лемма.** Пусть $T: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ — линейное преобразование, принимающее действительные значения на действительных векторах и не имеющее действительных собственных зна-

¹⁾ Эта лемма есть следствие теоремы о том, что простой корень многочлена от одной переменной является аналитической функцией коэффициентов. — Прим. ред.

чений. Пусть $v_1 + iv_2$ — собственный вектор с собственным значением λ . Тогда существует собственный вектор вида $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, имеющий то же собственное значение.

Доказательство. Умножая $v_1 + iv_2$ на комплексное число, мы получаем собственный вектор с тем же собственным значением λ . Поэтому достаточно показать, что существует $z = x + iy$, для которого

$$(x + iy) \left[\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Это эквивалентно решению системы уравнений

$$\begin{aligned} xv_{11} - yv_{12} &= 1, \\ xv_{21} - yv_{22} &= 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} v_{11} & -v_{12} \\ v_{21} & -v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы линейно независимы над полем $\mathbb{R}$, так как если $v_2 = cv_1$, то $v_1 + iv_2 = (1 + ic)v_1$. Поэтому $v_1 = (1 + ic)^{-1}(v_1 + iv_2)$ — действительный собственный вектор, чего не может быть. Поэтому уравнение имеет решение. ■

(3.4) **Лемма.** Пусть T — то же преобразование, что и в предыдущей лемме. Тогда

$$Tv_1 = \operatorname{Re} \lambda \cdot v_1 - \operatorname{Im} \lambda \cdot v_2, \quad Tv_2 = \operatorname{Im} \lambda \cdot v_1 + \operatorname{Re} \lambda \cdot v_2.$$

Доказательство. $Tv_1 = \operatorname{Re} T(v_1 + iv_2)$, так как T — действительное число. $Tv_1 = \operatorname{Re} [\lambda(v_1 + iv_2)] = \operatorname{Re} \lambda \cdot v_1 - \operatorname{Im} \lambda \cdot v_2$.

$$Tv_2 = \operatorname{Im} [\lambda(v_1 + iv_2)] = \operatorname{Im} \lambda \cdot v_1 + \operatorname{Re} \lambda \cdot v_2. \quad \blacksquare$$

Используя предыдущие леммы, мы видим, что если

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \alpha(\mu) \\ \beta(\mu) \end{pmatrix}$$

— собственный вектор $dX_\mu(0, 0)$ с собственным значением $\lambda(\mu)$, то $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \alpha(\mu) \\ \beta(\mu) \end{pmatrix}$ — линейно-независимые векторы, та-

кие, что матрица $dX_\mu(0, 0)$ относительно базиса $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \alpha(\mu) \\ \beta(\mu) \end{pmatrix}$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda(\mu) & \operatorname{Im} \lambda(\mu) \\ -\operatorname{Im} \lambda(\mu) & \operatorname{Re} \lambda(\mu) \end{pmatrix}.$$

Теперь мы покажем, что вектор $\begin{pmatrix} \alpha(\mu) \\ \beta(\mu) \end{pmatrix}$ является C^k -функцией μ . Пусть

$$dX_\mu(0, 0) = \begin{pmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{pmatrix}.$$

Решаем уравнение

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + i\alpha(\mu) \\ i\beta(\mu) \end{pmatrix} = \lambda(\mu) \begin{pmatrix} 1 + i\alpha(\mu) \\ i\beta(\mu) \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем уравнения

$$a_{11}(\mu) = \operatorname{Re} \lambda(\mu) - \operatorname{Im} \lambda(\mu) \cdot \alpha(\mu), \quad a_{21}(\mu) = -\operatorname{Im} \lambda(\mu) \cdot \beta(\mu).$$

Поэтому

$$\alpha(\mu) = \frac{\operatorname{Re} \lambda(\mu) - a_{11}(\mu)}{\operatorname{Im} \lambda(\mu)}, \quad \beta(\mu) = \frac{-a_{21}(\mu)}{\operatorname{Im} \lambda(\mu)}.$$

Так как замена координат линейна для каждого μ , а α и β суть C^k -функции μ , в новых координатах X будет иметь непрерывные k -е частные производные. В частности, $\frac{\partial X}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial X}{\partial x_2}$ суть C^{k-1} -функции в новых координатах.

Начиная с этого места, мы будем предполагать, что замена координат уже сделана, т. е. что

$$dX_\mu(0, 0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda(\mu) & \operatorname{Im} \lambda(\mu) \\ -\operatorname{Im} \lambda(\mu) & \operatorname{Re} \lambda(\mu) \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Существует единственное C^{k-1} -векторное поле $\tilde{X}_\mu$ на $\mathbb{R}^2$ такое, что $\psi_* \tilde{X}_\mu = X_\mu$, где $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — отображение перехода к полярным координатам $\psi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, а ψ_* — дифференциал ψ .

Пусть $\tilde{X} = \tilde{X}_r \frac{\partial}{\partial r} + \tilde{X}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$ — любое векторное поле¹⁾ на $\mathbb{R}^2$. Тогда

$$\psi_*(\tilde{X}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_r \\ \tilde{X}_\theta \end{pmatrix},$$

¹⁾ Заметим, что $\tilde{X}_\theta$ есть угловая скорость $\tilde{X}$, а не компонента поля $\tilde{X}$ вдоль единичного вектора e_θ в направлении $\frac{\partial}{\partial \theta}$, которую часто обозначают $\tilde{X}_\theta$.

Так как $\psi_*(\tilde{X}_\mu) = X_\mu$, то

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_{\mu r} \\ \tilde{X}_{\mu \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{\mu 1} \\ X_{\mu 2} \end{pmatrix}, \quad r \neq 0.$$

Поэтому если векторное поле $\tilde{X}_\mu$ можно продолжить до C^{k-1} -поля на всем $\mathbb{R}^2$, то такое продолжение единственно. $\tilde{X}_{\mu r} = \cos \theta \cdot X_{\mu 1} + \sin \theta \cdot X_{\mu 2}$, и оно класса C^{k-1} для всех (r, θ) . Рассмотрим при $r \neq 0$

$$\tilde{X}_{\mu \theta}(r, \theta) = \frac{-\sin \theta}{r} X_{\mu 1}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \frac{\cos \theta}{r} X_{\mu 2}(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \tilde{X}_{\mu \theta}(r, \theta) &= -\sin \theta \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \frac{X_{\mu 1}(r \cos \theta, r \sin \theta) - X_{\mu 1}(0, 0)}{r} + \\ &+ \cos \theta \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \frac{X_{\mu 2}(r \cos \theta, r \sin \theta) - X_{\mu 2}(0, 0)}{r}, \end{aligned}$$

так как $X_\mu(0, 0) = 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \tilde{X}_{\mu \theta}(r, \theta) &= (-\sin \theta) dX_{\mu 1}(0, 0)(\cos \theta, \sin \theta) + \\ &+ (\cos \theta) dX_{\mu 2}(0, 0)(\cos \theta, \sin \theta) = \\ &= (-\sin \theta)(\cos \theta \cdot \operatorname{Re} \lambda(\mu) + \sin \theta \operatorname{Im} \lambda(\mu) + \\ &+ (\cos \theta)(-\cos \theta \operatorname{Im} \lambda(\mu) + \sin \theta \cdot \operatorname{Re} \lambda(\mu)) = \\ &= -\operatorname{Im} \lambda(\mu). \end{aligned}$$

Поэтому мы определим

$$\begin{aligned} \tilde{X}_\mu(r, \theta) &= \\ &= \begin{cases} (\cos \theta \cdot X_{\mu 1}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \cdot X_{\mu 2}(r \cos \theta, r \sin \theta)) \frac{\partial}{\partial r} + \\ + \left(\frac{-\sin \theta}{r} X_{\mu 1}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \frac{\cos \theta}{r} X_{\mu 2}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right) \frac{\partial}{\partial \theta}, & r \neq 0, \\ -\operatorname{Im} \lambda(\mu) \frac{\partial}{\partial \theta}, & r = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_{\mu \theta}(r, \theta) &= \\ &= \begin{cases} \frac{-\sin \theta}{r} X_{\mu 1}(r \cos \theta, \sin \theta) + \frac{\cos \theta}{r} X_{\mu 2}(r \cos \theta, r \sin \theta), & r \neq 0, \\ -\operatorname{Im} \lambda(\mu), & r = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Чтобы установить, что $\tilde{X}_{\mu \theta}(r, \theta)$ принадлежит классу C^{k-1} , мы покажем, что функции $\frac{1}{r} X_{\mu 1}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ и $\frac{1}{r} X_{\mu 2}(r \cos \theta, r \sin \theta)$

$\times (r \cos \theta, r \sin \theta)$ принадлежит C^{k-1} , когда они продолжены, как указано выше.

(3.5) Лемма. Пусть $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса C^k . Тогда

$$A(x, y) - A(0, 0) = \int_0^1 \left[\frac{\partial A(tx, ty)}{\partial x} x + \frac{\partial A(tx, ty)}{\partial y} y \right] dt.$$

Если

$$A_1(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial A(tx, ty)}{\partial x} dt, \quad A_2(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial A(tx, ty)}{\partial y} dt,$$

то

$$A_1(0, 0) = \frac{\partial A}{\partial x}(0, 0) \text{ и } A_2(0, 0) = \frac{\partial A}{\partial y}(0, 0).$$

Доказательство. Первое утверждение следует из формулы Тейлора, а второе легко доказывается по индукции. По лемме

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} X_{\mu j}(rt \cos \theta, rt \sin \theta) &= \cos \theta \int_0^1 \frac{\partial X_{\mu j}(rt \cos \theta, rt \sin \theta)}{\partial x} dt + \\ &+ \sin \theta \int_0^1 \frac{\partial X_{\mu j}(rt \cos \theta, rt \sin \theta)}{\partial y} dt, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Так как все k -е частные производные X непрерывны и под-интегральные функции принадлежат классу C^{k-1} , то сами интегралы — функции класса C^k . ■

Шаг 3. Отображение Пуанкаре (подробности см. в гл. 2В).

Пусть потоки векторных полей $\tilde{X}$ и X будут $\tilde{\Phi}_t$ и Φ_t соответственно. Очевидно, что $\psi \circ \tilde{\Phi}_t = \Phi_t \circ \psi$. Рассмотрим векторное поле $\tilde{X}$. Так как $\tilde{X}(0, \theta) = -\operatorname{Im} \lambda(\mu) \frac{\partial}{\partial \theta}$, то $\tilde{\Phi}_{\mu t}(0, \theta) = (0, \theta - \operatorname{Im} \lambda(\mu)t, \mu)$. Если $\tau = 2\pi/|\lambda(0)|$, то $\tilde{\Phi}_{0\tau}(0, 0) = (0, 0 - |\lambda(0)| \cdot 2\pi/|\lambda(0)|, 0) = (0, -2\pi, 0)$ (рис. 3.3). Так как поле $\tilde{X}$ периодически с периодом 2π , то оно — C^{k-1} -векторное поле на заполненном цилиндре, а орбита точки 0 замкнута. Мы можем связать с этой орбитой отображение Пуанкаре P (рис. 3.4). Тогда существует окрестность $U = \{(r, 0, \mu) \mid r \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ и } \mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$, такая, что определено отображение $\tilde{P}(r, 0, \mu) = (\tilde{P}(r, \mu), -2\pi, \mu)$, где $\tilde{P}(r, \mu)$ — r -координата первого пересечения орбиты, начинающейся в точке $(r, 0, \mu)$, с прямой $\theta = -2\pi$. Это отображение класса C^{k-1} .

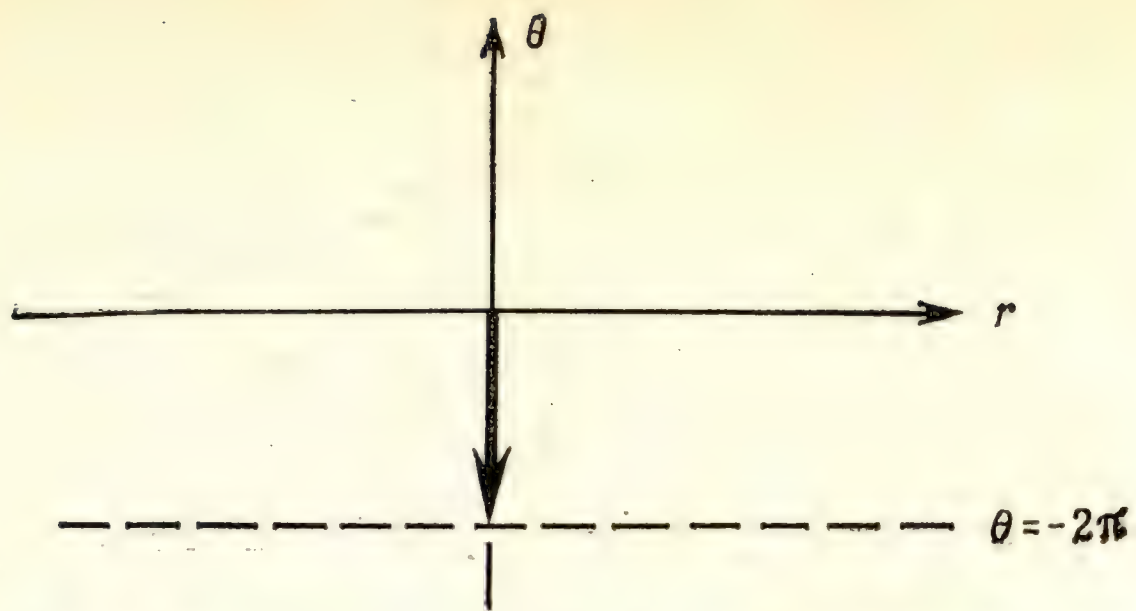


Рис. 3.3. Траектория точки $(0, 0, 0)$ под действием $\tilde{\Phi}_{ot}$.

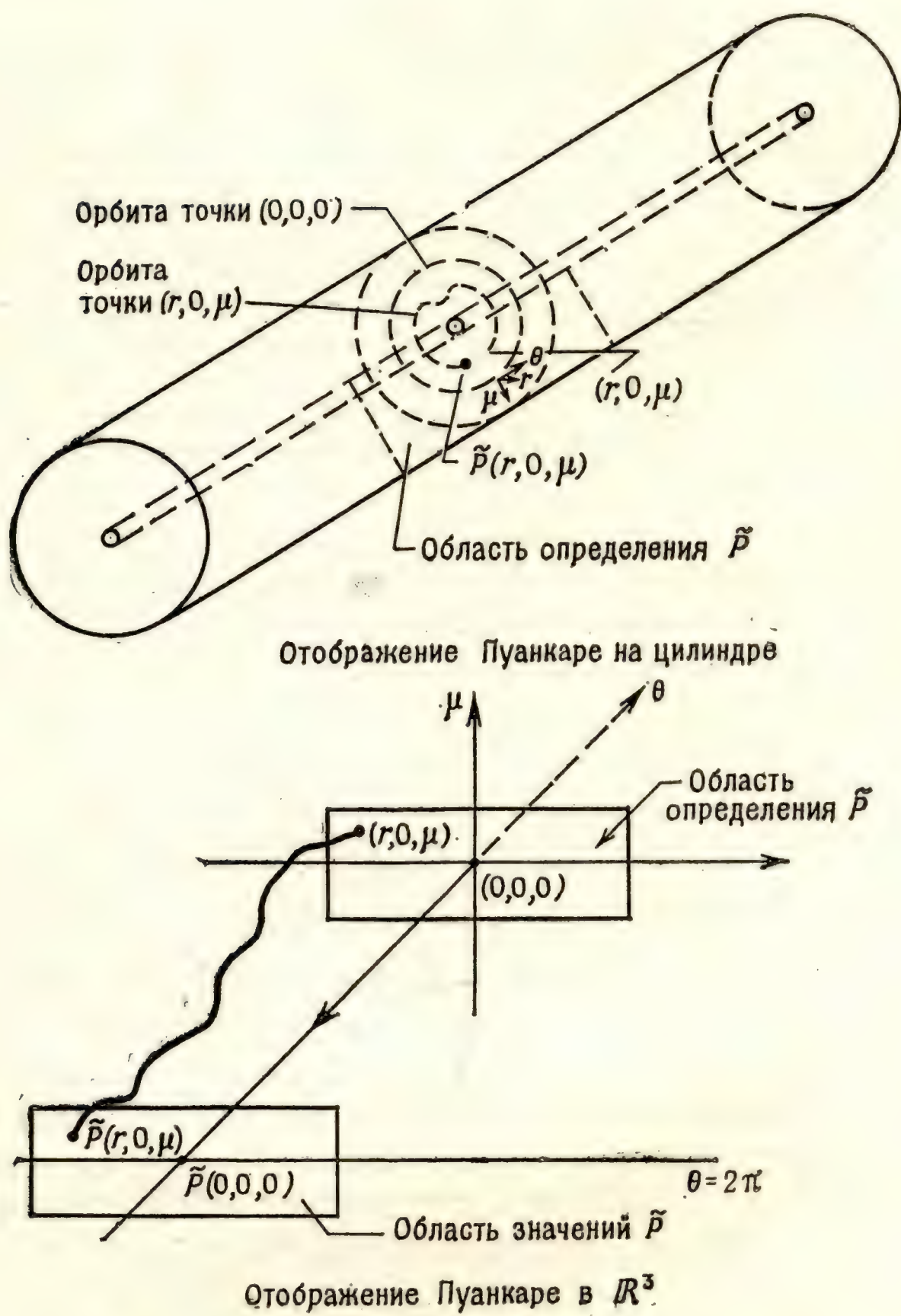


Рис. 3.4.

Функция $T(r, \mu)$, которая задает время, когда $\tilde{\Phi}_t(r, 0, \mu) = \tilde{P}(r, 0, \mu)$, также класса C^{k-1} . Заметим, что отображение ψ переводит ось r в ось x_1 . Поэтому функция последования $(x_1, 0, \mu) \mapsto (x_1 + V(x_1, \mu), 0, \mu)$ определена и класса C^{k-1} в окрестности $U = \{(x_1, 0, \mu) \mid x_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ и } \mu \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$. Точка $(x_1 + V(x_1, \mu), 0, \mu)$ является первым пересечением орбиты точки $(x_1, 0, \mu)$ с осью x_1 , причем такой, что знаки x_1 и $P(x_1, \mu) = x_1 + V(x_1, \mu)$ одинаковы.

(3.6) **Замечание.** Используя равномерную непрерывность и θ -периодичность $\tilde{\Phi}_t$, нетрудно доказать существование окрестности $\tilde{N} = \{(r, \theta, \mu) \mid r^2 + \mu^2 < \delta\}$, в которой нет неподвижных точек $\tilde{\Phi}_t$. Следовательно, неподвижными точками Φ_t в $N = \{(x_1, x_2, \mu) \mid x_1^2 + x_2^2 + \mu^2 < \delta\}$ являются только точки $(0, 0, \mu)$.

(3.7) **Лемма.**

$$\left. \frac{\partial P(x_1, \mu)}{\partial x_1} \right|_{(0, \mu)} = e^{2\pi(\operatorname{Re} \lambda(\mu)/\operatorname{Im} \lambda(\mu))}.$$

Доказательство. Пусть $\Phi_{\mu t}(x_1, x_2) = (a_{\mu t}(x_1, x_2), b_{\mu t}(x_1, x_2))$. Имеет место следующее уравнение:

$$V(x_1, \mu) = P(x_1, \mu) - x_1 = \int_0^{T(x_1, \mu)} \mu_{1\mu}(a_{\mu t}(x_1, 0), b_{\mu t}(x_1, 0)) dt.$$

Чтобы получить нужный результат, продифференцируем это уравнение по x_1 :

$$\begin{aligned} \frac{V(x_1 + \Delta x_1, \mu) - V(x_1, \mu)}{\Delta x_1} &= \frac{1}{\Delta x_1} \left[\int_0^{T(x_1 + \Delta x_1, \mu)} \mu_{1\mu}(a_{\mu t}(x_1 + \Delta x_1, 0), b_{\mu t}(x_1 + \Delta x_1, 0)) dt - \right. \\ &\quad \left. \int_0^{T(x_1, \mu)} \mu_{1\mu}(a_{\mu t}(x_1, 0), b_{\mu t}(x_1, 0)) dt \right] = \\ &= \int_0^{T(x_1, \mu)} \frac{1}{\Delta x_1} [\mu_{1\mu}(a_{\mu t}(x_1 + \Delta x_1, 0), b_{\mu t}(x_1 + \Delta x_1, 0)) - \\ &\quad - \mu_{1\mu}(a_{\mu t}(x_1, 0), b_{\mu t}(x_1, 0))] dt + \frac{1}{\Delta x_1} \times \\ &\quad \times \int_{T(x_1, \mu)}^{T(x_1 + \Delta x_1, \mu)} \mu_{1\mu}(a_{\mu t}(x_1 + \Delta x_1, 0), b_{\mu t}(x_1 + \Delta x_1, 0)) dt. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$\frac{\partial V(x_1, \mu)}{\partial x_1} = \int_0^{T(x_1, \mu)} \frac{\partial X_{1\mu}}{\partial x_1}(a_{\mu t}(x_1, 0), b_{\mu t}(x_1, 0)) dt + \\ + \frac{\partial T(x_1, \mu)}{\partial x_1} X_{1\mu}(a_{\mu T(x_1, \mu)}(x_1, 0), b_{\mu T(x_1, \mu)}(x_1, 0)).$$

В случае $x_1 = 0$ мы можем вычислить это выражение. Так как $a_{\mu t}(0, 0) = b_{\mu t}(0, 0) = 0$ и $X_{1\mu}(0, 0) = 0$, то второй член правой части равен нулю. Напомним, что $T(0, \mu) = 2\pi/\operatorname{Im} \lambda(\mu)$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial X_{1\mu}}{\partial x_1}(a_{\mu t}(0, 0), b_{\mu t}(0, 0)) = \frac{\partial X_{1\mu}}{\partial a}(0, 0) \frac{\partial a_{\mu t}}{\partial x_1}(0, 0) + \\ + \frac{\partial X_{1\mu}}{\partial b} \frac{\partial b_{\mu t}}{\partial x_1}(0, 0).$$

Так как $\frac{\partial X_{1\mu}}{\partial a}(0, 0) = \operatorname{Re} \lambda(\mu)$ и $\frac{\partial X_{1\mu}}{\partial b}(0, 0) = \operatorname{Im} \lambda(\mu)$, а $(0, 0)$ — особая точка $\Phi_{\mu t}$, то мы можем вычислить производные от потока

$$d\Phi_{\mu t}(0, 0) = \exp[t dX_{\mu}(0, 0)] = \exp\left[t \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \lambda(\mu) & \operatorname{Im} \lambda(\mu) \\ -\operatorname{Im} \lambda(\mu) & \operatorname{Re} \lambda(\mu) \end{pmatrix}\right] = \\ = \begin{pmatrix} e^{t \operatorname{Re} \lambda(\mu)} \cos \operatorname{Im} \lambda(\mu) t & e^{t \operatorname{Re} \lambda(\mu)} \sin \operatorname{Im} \lambda(\mu) t \\ -e^{t \operatorname{Re} \lambda(\mu)} \sin \operatorname{Im} \lambda(\mu) t & e^{t \operatorname{Re} \lambda(\mu)} \cos \operatorname{Im} \lambda(\mu) t \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial a_{\mu t}}{\partial x_1}(0, 0) = e^{t \operatorname{Re} \lambda(\mu)} \cos \operatorname{Im} \lambda(\mu) t$$

и

$$\frac{\partial b_{\mu t}}{\partial x_1}(0, 0) = -e^{t \operatorname{Re} \lambda(\mu)} \sin \operatorname{Im} \lambda(\mu) t.$$

Отсюда

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}(0, \mu) = \int_0^{2\pi/\operatorname{Im} \lambda(\mu)} e^{t \operatorname{Re} \lambda(\mu)} (\operatorname{Re} \lambda(\mu) \cos \operatorname{Im} \lambda(\mu) t - \\ - \operatorname{Im} \lambda(\mu) \sin \operatorname{Im} \lambda(\mu) t) dt = e^{2\pi (\operatorname{Re} \lambda(\mu))/\operatorname{Im} \lambda(\mu)} - 1. \quad \blacksquare$$

Шаг 4. Использование теоремы о неявной функции для нахождения замкнутых орбит

Наиболее очевидный путь отыскания замкнутых орбит потока Φ_t — это нахождение нулей функции V . Так как $V(0, 0) = 0$, то если бы $\frac{\partial V}{\partial x_1}(0, 0)$ или $\frac{\partial V}{\partial \mu}(0, 0)$ не были бы равны нулю, условия теоремы о неявной функции были бы

выполнены и мы могли бы получить кривую вида $(x_1(\mu), \mu)$ или $(x_1, \mu(x_1))$, на которой $V = 0$. К сожалению, $\frac{\partial V}{\partial \mu}(0, 0) = 0 = \frac{\partial V}{\partial x_1}(0, 0)$. Воспользуемся вместо V функцией

$$\tilde{V}(x_1, \mu) = \begin{cases} \frac{V(x_1, \mu)}{x_1}, & x_1 \neq 0, \\ \frac{\partial V}{\partial x_1}(0, \mu), & x_1 = 0. \end{cases}$$

(3.8) Лемма. $\tilde{V}$ принадлежит классу C^{k-2} .

Доказательство. Напомним, что V класса C^{k-1} . Так как $V(0, \mu) = 0$, то

$$V(x_1, \mu) = \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x_1}(tx_1, \mu) x_1 dt,$$

$$\frac{V(x_1, \mu)}{x_1} = \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x_1}(tx_1, \mu) dt, \quad x_1 \neq 0.$$

Последний интеграл, как нетрудно видеть, есть функция класса C^{k-2} . ■

(3.9). Лемма. $\tilde{V}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mu}(0, 0) \neq 0$. Поэтому существуют окрестности N_1 и N_2 точки 0 и единственная функция $\mu: N_1 \rightarrow N_2$, для которой $\mu(0) = 0$ и $V(x_1, \mu(x_1)) = 0$.

Доказательство. Так как $\operatorname{Re} \lambda(0) = 0$, то

$$\begin{aligned} \tilde{V}(0, 0) &= \frac{\partial V}{\partial x_1}(0, 0) = e^{2\pi(\operatorname{Re} \lambda(0))/\operatorname{Im} \lambda(0)} - 1 = 0, \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mu}(0, 0) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\tilde{V}(0, \mu) - \tilde{V}(0, 0)}{\mu} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}(0, \mu) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial V}{\partial x_1}(0, 0) \right] = \frac{\partial^2 V}{\partial \mu \partial x_1}(0, 0) = \frac{d}{d\mu} [e^{2\pi(\operatorname{Re} \lambda(\mu))/\operatorname{Im} \lambda(\mu)} - 1] \Big|_{\mu=0} = \\ &= \frac{2\pi}{\operatorname{Im} \lambda(0)} \frac{d(\operatorname{Re} \lambda(\mu))}{d\mu} \Big|_{\mu=0} \neq 0. \end{aligned}$$

(Отметим, что это как раз то место, где используется предположение о ненулевой скорости пересечения мнимой оси собственными значениями.) Остальная часть леммы легко следует из теоремы о неявной функции. ■

Шаг 5. Условия устойчивости. Соберем теперь результаты, относящиеся к производным от μ и V в нуле.

(3.10) Лемма. $\mu'(0) = 0$.

Доказательство. В силу способа, которым выбиралась область определения V , мы знаем, что если $V(x_1, \mu(x_1)) = 0$, то орбита, проходящая через $(x_1, 0, \mu(x_1))$, пересекает ось x_1 в точке $(\hat{x}_1, 0, \mu(x_1))$, где x_1 и $\hat{x}_1$ имеют противоположные знаки (в полярных координатах это соответствует тому, что орбита точки $(x_1, 0, \mu(x_1))$ пересекает прямую $\theta = -\pi$ при $x = \hat{x}_1$). Выберем последовательность точек $x_n \downarrow 0$. Тогда для каждой точки x_n существует y_n , такое, что $y_n < 0$ и $\mu(x_n) = \mu(y_n)$. Из непрерывности Φ следует, что $y_n \rightarrow 0$ (поскольку $T(x_1, \mu)$ ограничена в окрестности точки $(0, 0)$, а Φ равномерно непрерывно на ограниченных множествах). Следовательно, так как $\mu(0) = 0$ и $\mu(x_n)/x_n$ имеет знак, противоположный знаку $\mu(y_n)/y_n$, то $\mu'(0) = 0$. ■

$$(3.11) \text{ Лемма. } V(0, 0) = \frac{\partial V}{\partial x_1}(0, 0) = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}(0, 0) = 0.$$

Доказательство. Мы уже знаем, что $V(0, 0) = \frac{\partial V}{\partial x_1}(0, 0) = 0$. Чтобы доказать, что $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}(0, 0) = 0$, продифференцируем уравнение $V(x, \mu(x_1)) = 0$. Тогда

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x_1} \right|_{(x_1, \mu(x_1))} + \left. \frac{\partial V}{\partial \mu} \right|_{(x_1, \mu(x_1))} \cdot \mu'(x_1) = 0$$

и

$$\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \mu} \mu'(x_1) + \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2} (\mu'(x_1))^2 + \frac{\partial V}{\partial \mu} \cdot \mu''(x_1) \right] \Big|_{(x_1, \mu(x_1))} = 0.$$

Если $x_1 = 0$, то $\mu(x_1) = 0$, и мы получаем равенство $\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} \Big|_{(0, 0)} = 0$. ■

(3.12) **Определение.** $(0, 0)$ называется *слабым аттрактором* поля X_0 , если $\frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3}(0, 0) < 0^1$.

(3.13) **Лемма.** Если $(0, 0)$ — *слабый аттрактор* поля X_0 , то орбиты, проходящие через точку $(x_1, \mu(x_1))$, являются устойчивыми и $\mu(x_1) > 0$ для малых $x_1 \neq 0^2$.

¹⁾ Это условие в каждом конкретном случае может быть проверено; см. гл. 4.

²⁾ Формулировка этого предложения не является наиболее общей. Обобщение см. в гл. 3В.

Доказательство. Чтобы показать, что $\mu(x_1) > 0$ для малых $x_1 \neq 0$, мы докажем неравенство $\mu''(0) > 0$. Так как $\mu(0) = \mu'(0) = 0$, отсюда следует, что μ имеет локальный минимум в точке $x_1 = 0$. Дифференцируем уравнение $V(x_1, \mu(x_1)) = 0$. Делая это трехкратно и проводя вычисления при $x_1 = 0$, мы получаем

$$\mu''(0) = \frac{-\frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3}(0, 0)}{3 \frac{\partial^2 V}{\partial \mu \partial x_1}(0, 0)}.$$

Напомним, что $\frac{\partial^2 V}{\partial \mu \partial x_1}(0, 0) = \frac{2\pi}{\operatorname{Im} \lambda(0)} \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=0} > 0$. Поэтому $\mu''(0) > 0$. Чтобы показать устойчивость замкнутой орбиты, проходящей через $(x_1, 0, \mu(x_1))$, мы должны показать, что собственные значения производной отображения Пуанкаре, связанного с этой орбитой, меньше единицы по абсолютной величине (см. гл. 2В). Ясно, что отображением Пуанкаре, связанным с орбитой точки $(x_1, 0, \mu(x_1))$, является $P_{\mu(x_1)}(x'_1) = P(x'_1, \mu(x_1))$. Производная $P_{\mu(x_1)}$ в точке x_1 равна $\frac{\partial P}{\partial x_1} \Big|_{(x_1, \mu(x_1))}$. Так как $\frac{\partial P}{\partial x_1} \Big|_{(0, 0)} = 1$, то существует окрестность точки $(0, 0)$, в которой $\frac{\partial P}{\partial x_1} > -1$. Таким образом, нам необходимо только показать, что для $x_1 \neq 0$

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} \Big|_{(x_1, \mu(x_1))} < 1, \text{ т.е. } \frac{\partial V}{\partial x_1} \Big|_{(x_1, \mu(x_1))} < 0.$$

Докажем, что функция $f(x_1) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \Big|_{(x_1, \mu(x_1))}$ имеет локальный минимум в точке $x_1 = 0$. Как мы уже знаем,

$$f(0) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \Big|_{(0, 0)} = 0. \quad f'(x_1) = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} \Big|_{(x_1, \mu(x_1))} + \mu'(x_1) \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \mu \partial x_1} \Big|_{(x_1, \mu(x_1))}.$$

$$\begin{aligned} \text{Таким образом, } f'(0) = 0; \quad f''(x_1) = & \frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3} \Big|_{(x_1, \mu(x_1))} + \\ & + 2\mu'(x_1) \frac{\partial^3 V}{\partial x_1^2 \partial \mu} \Big|_{(x_1, \mu(x_1))} + [\mu'(x_1)]^2 \frac{\partial^3 V}{\partial x_1 \partial \mu^2} \Big|_{(x_1, \mu(x_1))} + \\ & + \mu''(x_1) \frac{\partial^2 V}{\partial \mu \partial x_1} \Big|_{(x_1, \mu(x_1))}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f''(0) &= \frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3}(0, 0) + \mu''(0) \frac{\partial^2 V}{\partial \mu \partial x_1}(0, 0) = \\ &= \frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3}(0, 0) - \frac{\partial^2 V}{\partial \mu \partial x_1}(0, 0) \frac{\frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3}(0, 0)}{3 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \mu}(0, 0)} = \frac{2}{3} \frac{\partial^3 V}{\partial x_1^3}(0, 0) < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $f(x_1)$ имеет локальный максимум в точке $x_1 = 0$, и орбиты устойчивы. ■

Шаг 6. Единственность замкнутых орбит.

(3.14) **Лемма.** *Существует окрестность N точки $(0, 0, 0)$, такая, что любая замкнутая орбита потока X в N проходит через одну из точек вида $(x_1, 0, \mu(x_1))$.*

Доказательство. Существует окрестность N_ε точки $(0, 0, 0)$, такая, что если $(x_1, x_2, \mu) \in N_\varepsilon$, то орбита потока Φ_t , проходящая через точку (x_1, x_2, μ) , пересекает ось x_1 в точке $(\hat{x}_1, 0, \mu)$, где $|\hat{x}_1| < \varepsilon$. Это доказывается теми же рассуждениями, которые были использованы для доказательства существования функции $P(x_1, \mu)$. Выберем $N = \{(x_1, x_2, \mu) \mid (x_1, \mu) \text{ принадлежит области определения } P, \frac{\partial P}{\partial x_1} \Big|_{(x_1, \mu)} > 0 \text{ и } T(x_1, \mu) > \varepsilon > 0\}$, и μ столь малым, чтобы $V(x_1, \mu) = 0$ для $\mu \in N$ тогда и только тогда, когда $\mu = \mu(x_1)$. Предположим, что $(x_1, 0, \mu) \in N$ и лежит на замкнутой орбите γ потока Φ_t . Если $V(x_1, \mu) = 0$, то $\mu = \mu(x_1)$, т. е. утверждение леммы выполняется. Допустим, что $V(x_1, \mu) \neq 0$. Тогда $P(x_1, \mu) > x_1 \times \times (P(x_1, \mu) < x_1)$. Так как $\gamma \subseteq N$, то $P^n(x_1, \mu)$ определено для всех $n \geq 0$. Далее,

$$P^n(x_1, \mu) - P^{n-1}(x_1, \mu) = \frac{\partial P}{\partial x_1}(\xi, \mu) \cdot (P^{n-1}(x_1, \mu) - P^{n-2}(x_1, \mu)).$$

Таким образом, $P^n(x_1, \mu) - P^{n-1}(x_1, \mu)$ имеет тот же знак, что и $P^{n-1}(x_1, \mu) - P^{n-2}(x_1, \mu)$. По индукции

$$P^n(x_1, \mu) > P^{n-1}(x_1, \mu) \text{ (} P^n(x_1, \mu) < P^{n-1}(x_1, \mu) \text{)}$$

для всех n . Для $T(x_1, \mu)$ существует ненулевая нижняя грань при $(x_1, 0, \mu) \in N$; отсюда следует, что $(x_1, 0, \mu)$ не лежит на замкнутой орбите потока Φ_t . ■

Теорема Хопфа в $\mathbb{R}^n$

Теперь рассмотрим n -мерный случай. Мы будем ссылаться на теорему 3.1.

(3.15) **Теорема.** Пусть X_μ — векторное поле на $\mathbb{R}^n$ класса C^{k+1} , $k \geq 4$, которое удовлетворяет всем предположениям теоремы 3.1, за исключением того, что будем считать оставшуюся часть спектра отличной от двух уже рассматривавшихся простых собственных значений $\lambda(\mu)$, $\overline{\lambda(\mu)}$. Тогда выполняется заключение (A). Заключение (B) верно, если остаток спектра остается в левой полуплоскости, когда μ проходит через нуль. Заключение (C) верно, если относительно $\lambda(\mu)$, $\overline{\lambda(\mu)}$ точка 0 является «слабым аттрактором» в том же смысле, как и в теореме 3.1, и если координаты выбраны так, что

$$dX_0(0) = \begin{pmatrix} 0 & |\lambda(0)| & d_3 X^1(0) \\ -|\lambda(0)| & 0 & d_3 X^2(0) \\ 0 & 0 & d_3 X^3(0) \end{pmatrix}, \quad \lambda(0) \notin \sigma(d_3 X^3(0)).$$

(3.16) Замечания

(1) Условие $\lambda(0) \notin \sigma(d_3 X^3(0))$ не зависит от способа разложения $\mathbb{R}^n$ на пространство, соответствующее $\lambda(0)$, $\overline{\lambda(0)}$, и на его дополнение, поскольку выбор различных дополнительных подпространств, как нетрудно видеть, приводит только к замене $d_3 X^3(0)$ сопряженным оператором $C d_3 X^3(0) C^{-1}$.

(2) Условие $\lambda(0) \notin \sigma(d_3 X^3(0))$ выполняется автоматически, если $n = 3$, так как матрица $dX_0(0)$ действительна.

(3) Дальнейшие детали, касающиеся этой теоремы, будут даны в гл. 4.

Доказательство теоремы 3.15 получается комбинацией теоремы о центральном многообразии с теоремой 3.1, т. е. мы находим центральное многообразие, касательное к собственному подпространству $\lambda(\mu)$ и $\overline{\lambda(\mu)}$, и к нему применяем теорему 3.1. Важное отличие состоит в том, что в пункте (B) теоремы 3.1 мы утверждали устойчивость замкнутой орбиты на центральном многообразии. Здесь же в (B) мы утверждаем устойчивость замкнутой орбиты в полной окрестности в $\mathbb{R}^n$. Дело в том, что мы можем свести нашу задачу к той, в которой центральным многообразием является плоскость (x_1, x_2) , причем последняя инвариантна относительно потока. Если $(x, 0, \mu)$ лежит на замкнутой орбите периода τ , то

$$d\Phi_{\tau, \mu}(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & d_3 \Phi_\tau^1(x) \\ a_{21} & a_{22} & d_3 \Phi_\tau^2(x) \\ 0 & 0 & d_3 \Phi_\tau^3(x) \end{pmatrix}.$$

Из двумерной теоремы мы получим, что спектр верхнего блока на трансверсали к замкнутой орбите лежит в $\{z \mid |z| < 1\}$, а наши предположения плюс непрерывная зависимость спектра от параметра дают то же самое для $\sigma(d_3\Phi_\tau^3(x))$. Так как спектр отображения Пуанкаре равен спектру отображения $d\Phi_{\tau, \mu}(x)$, ограниченного на подпространство трансверсальное к замкнутой орбите, то $\sigma(dP(x)) \subset \{z \mid |z| < 1\}$ и орбита устойчива. ■

(3.17) *Упражнение.* Показать, что векторное поле $X_\mu(x_1, x_2) = (x_2, \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1.

(3.18) *Упражнение.* Ниже все уравнения даны в полярных координатах. Для каждого уравнения указать соответствующую ему картинку и установить, какое из предположений теоремы о рождении цикла нарушено (если задачу решить не удастся, попробуйте вернуться к ней после чтения гл. 3А).

$$1. \dot{r} = -r(r + \mu)^2,$$

$$\dot{\theta} = 1.$$

$$2. \dot{r} = r(\mu - r^2)(2\mu - r^2)^2,$$

$$\dot{\theta} = 1.$$

$$3. \dot{r} = r(r + \mu)(r - \mu),$$

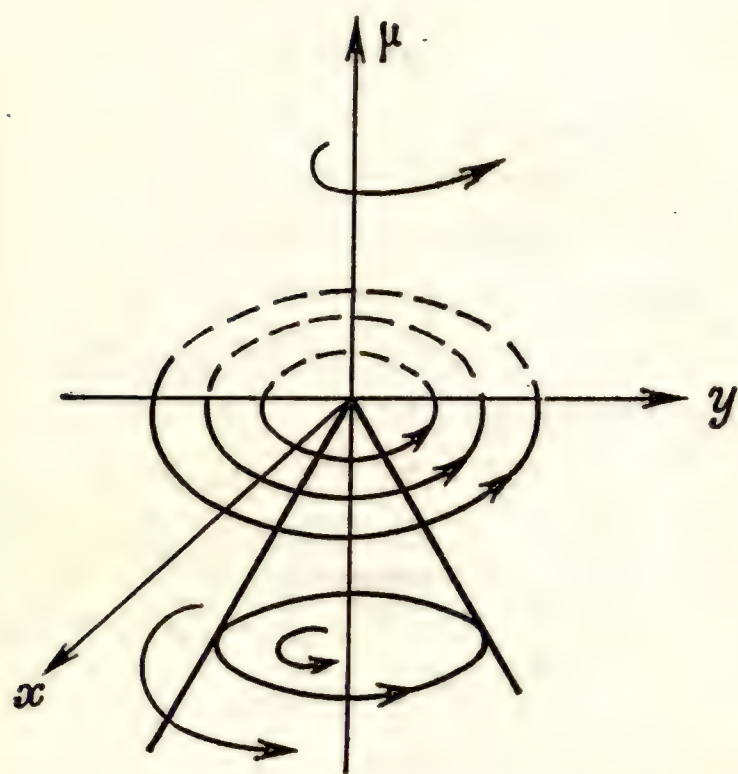
$$\dot{\theta} = 1.$$

$$4. \dot{r} = \mu r(r + \mu)^2,$$

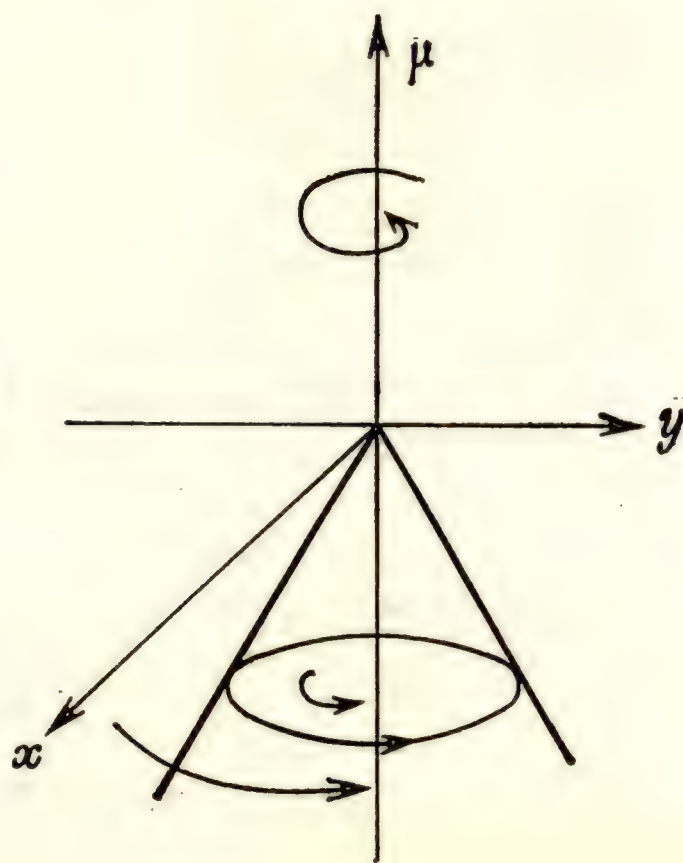
$$\dot{\theta} = 1.$$

$$5. \dot{r} = -\mu^2 r(r + \mu)^2(r - \mu)^2,$$

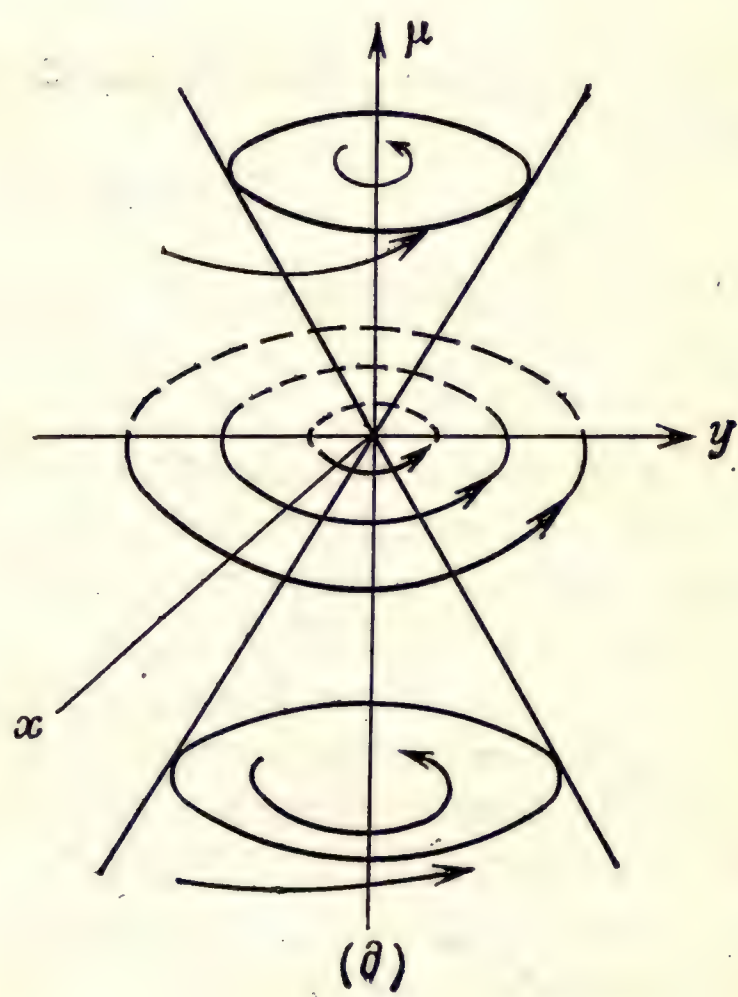
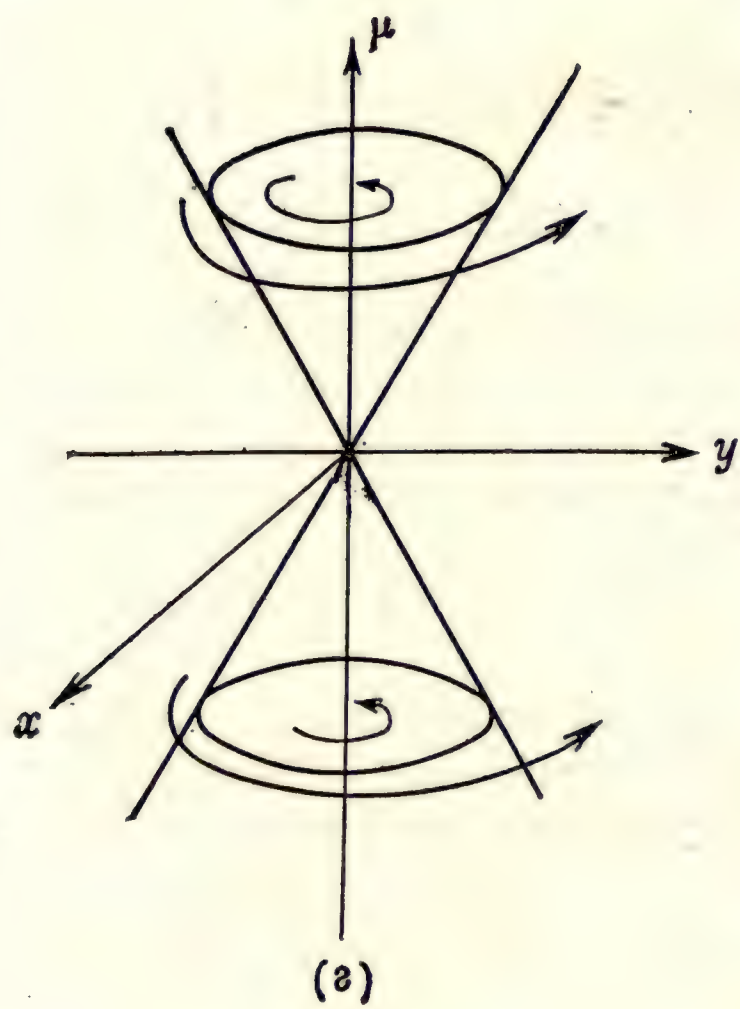
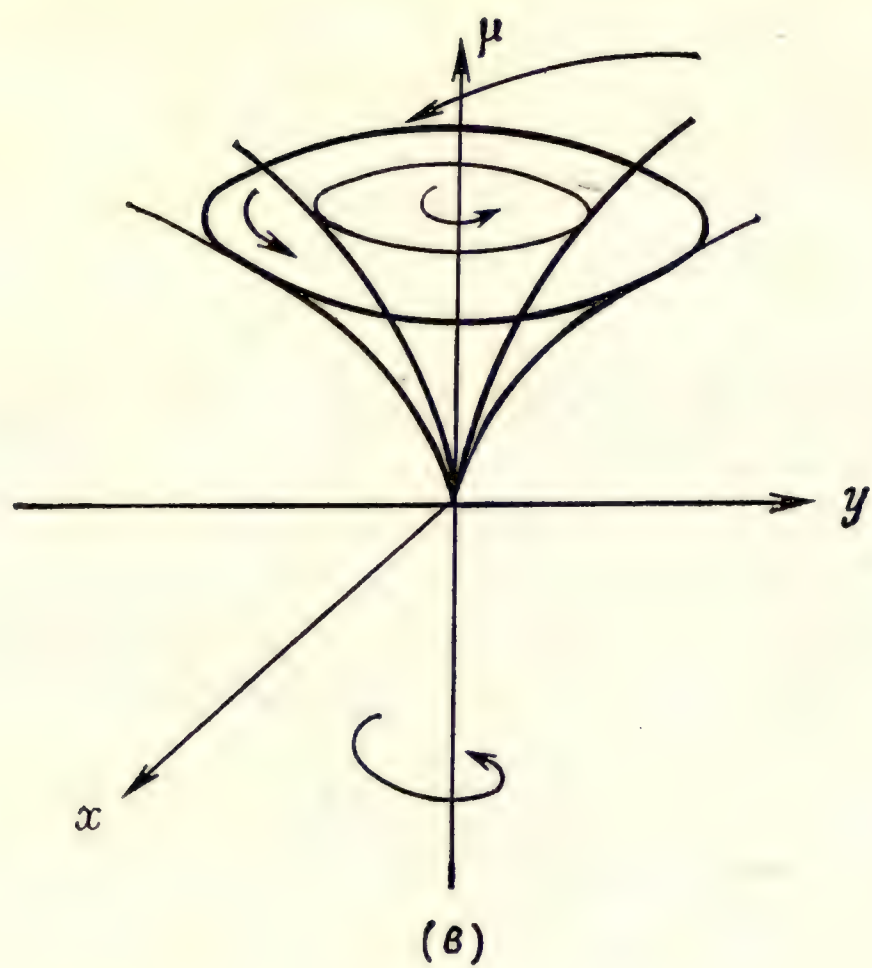
$$\dot{\theta} = 1.$$



(a)



(b)



ДРУГИЕ БИФУРКАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ

Многие авторы получили обобщения теоремы Хопфа¹⁾. В частности, Чейфи [1] исключил условие о том, что собственное значение $\lambda(\mu)$ пересекает мнимую ось с ненулевой скоростью. В этом случае рождение периодической орбиты происходит, однако число рождающихся семейств периодических орбит невозможно предсказать, используя только условия на собственные значения.

Результат Чейфи дает хорошее описание поведения потока вблизи точки бифуркации (см. также Баутин [1]²⁾ и главу 3С).

Теорема Чейфи

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = P(\varepsilon)x + X(x, \varepsilon), \quad (3A.1)$$

где x и X принадлежат евклидову пространству $\mathbb{R}^n$ ($n > 2$), $\varepsilon \geq 0$ — малый параметр (в предыдущей главе он обозначался через μ), а P — действительная $(n \times n)$ -матрица. Мы будем считать выполненными следующие предположения.

(П₁) Существуют числа $r_0 > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, такие, что P непрерывна на замкнутом интервале $[0, \varepsilon_0]$, а X непрерывна в области $B^n(r_0) \times [0, \varepsilon_0]$.

(П₂) $X(0, \varepsilon) = 0$ для любого ε из интервала $[0, \varepsilon_0]$, так что $x = 0$ — состояние равновесия уравнения (3A.1).

(П₃) Для любого $r \in [0, r_0]$ существует $k(r) > 0$, такое, что в области $B^n(r) \times [0, \varepsilon_0]$ функция X равномерно липшиц-непрерывна по x с константой Липшица $k(r)$; более того, $k(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$.

¹⁾ Таким обобщением является также теорема о рождении циклов из сложного фокуса в книге Андронова, Леонтовича, Гордона, Майера [1]. — *Прим. ред.*

²⁾ В статье Баутина рассматривается вопрос о рождении цикла в другом аспекте. Именно, в ней изучается вопрос о максимальном числе циклов, рождающихся из сложного фокуса или центра квадратичной системы. — *Прим. ред.*

(П₄) Для каждого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ матрица $P(\varepsilon)$ имеет пару комплексно-сопряженных собственных значений $a(\varepsilon) \pm ib(\varepsilon)$, у которых действительная и мнимая части удовлетворяют условиям

$$a(0) = 0, \quad a(\varepsilon) > 0 \quad (0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0), \quad b(\varepsilon) > 0 \quad (0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0).$$

Другие собственные значения $\lambda_1(\varepsilon), \lambda_2(\varepsilon), \dots, \lambda_{n-2}(\varepsilon)$ матрицы $P(\varepsilon)$ имеют отрицательные действительные части для всех ε из $[0, \varepsilon_0]$.

(П₅) При $\varepsilon = 0$ находящееся в начале координат состояние равновесия уравнения (3А.1) асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова¹⁾ (Лефшец [1] и гл. 1 выше).

Предположения (П₁) и (П₃) гарантируют обычные свойства существования, единственности и непрерывности по начальным условиям решений уравнения (3А.1). Решение (3А.1) с начальным условием x_0 при $t = 0$ будем обозначать $x(t, x_0, \varepsilon)$. В связи с этим обозначением напомним хорошо известное свойство автономности уравнения (3А.1): решение (3А.1) с начальным условием x_0 при фиксированном t , скажем, t_0 , имеет вид $x(t - t_0, x_0, \varepsilon)$. Предположение (П₅) заменяет ранее рассмотренное предположение о «слабом аттракторе».

(3А.1) **Теорема.** Пусть для уравнения (3А.1) выполнены предположения (П₁)—(П₅), и пусть r_0, ε_0 выбраны в соответствии с (П₁). Тогда существуют числа r_1, r_2 и ε_1 , $0 < r_2 \leq r_1 \leq r_0$, $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, такие, что имеют место следующие утверждения:

I. Для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ существуют две замкнутые орбиты $\gamma_1(\varepsilon), \gamma_2(\varepsilon)$ уравнения (3А.1) (не обязательно различные), которые лежат внутри окрестности вида $B^n(r(\varepsilon))$, где $0 < r(\varepsilon) \leq r_2$, $r(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Кроме того, $\gamma_1(\varepsilon)$ и $\gamma_2(\varepsilon)$ лежат на локальном интегральном многообразии $M^2(\varepsilon)$, гомеоморфном открытому диску в $\mathbb{R}^2$ и содержащем начало координат $x = 0$. Если эти кривые различны, то рассматриваемые как замкнутые жордановы кривые в $M^2(\varepsilon)$, они концентрически расположены вокруг начала координат, например $\gamma_1(\varepsilon)$ внутри $\gamma_2(\varepsilon)$.

II. Для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ часть $M^2(\varepsilon)$, лежащая внутри $\gamma_1(\varepsilon)$, заполнена решениями (3А.1), которые приближаются к началу при $t \rightarrow -\infty$ и которые, за исключением состояния равновесия $x = 0$, стремятся к $\gamma_1(\varepsilon)$ при $t \rightarrow +\infty$. Не существует других решений (3А.1), остающихся в $B^n(r_1)$ при всех $t < 0$.

¹⁾ См. Ляпунов [1]. — Прим. ред.

III. Для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ часть $M^2(\varepsilon)$, лежащая вне $\gamma_2(\varepsilon)$, но содержащаяся в $B^n(r_2)$, заполнена решениями уравнения (3А.1), которые остаются в $M^2(\varepsilon) \cap B^n(r_1)$ для всех $t > 0$ и которые стремятся к $\gamma_2(\varepsilon)$ при $t \rightarrow +\infty$.

IV. Для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ существуют решения (3А.1), которые стремятся к началу координат $x = 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Эти решения заполняют локальное интегральное многообразие (т. е. инвариантное многообразие) $M^{n-2}(\varepsilon)$, гомеоморфное открытому шару в $\mathbb{R}^{n-2}$ и содержащее начало координат $x = 0$.

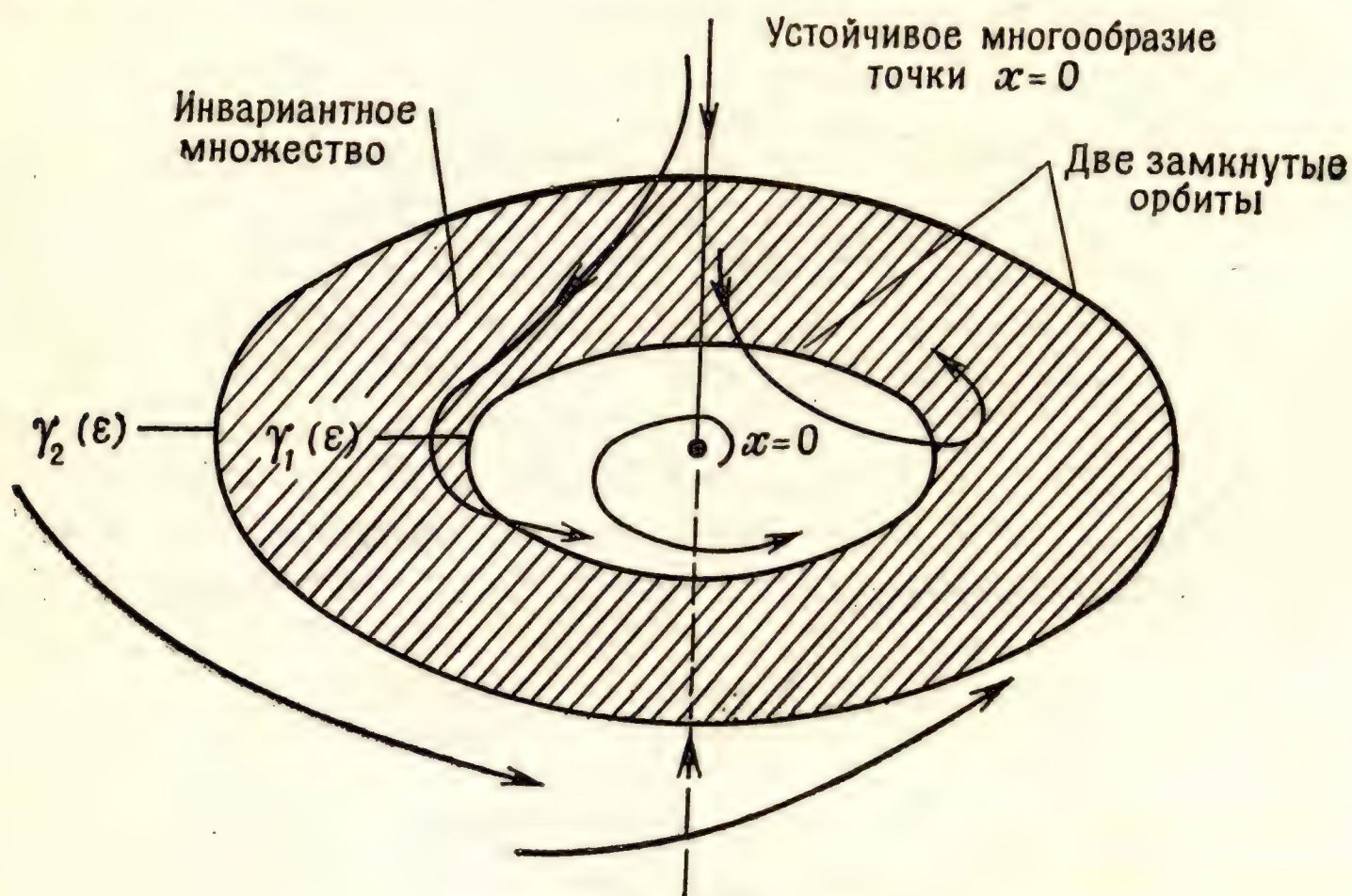


Рис. 3А.1.

V. Если для данного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $x(t, x_0, \varepsilon)$ есть решение (3А.1), для которого $x_0 \in B^n(r_2)$, то $x(t, x_0, \varepsilon)$ остается в $B^n(r_1)$ при всех $t > 0$. Кроме того, если $x(t, x_0, \varepsilon) \not\rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ (см. (IV)), то при $t \rightarrow +\infty$, $x(t, x_0, \varepsilon)$ стремится к замкнутому инвариантному множеству $\Omega(\varepsilon)$, состоящему из тех точек в $M^2(\varepsilon)$, которые лежат на $\gamma_1(\varepsilon)$, или $\gamma_2(\varepsilon)$, или между ними. Решения, которые стремятся к $\Omega(\varepsilon)$, содержат в своем ω -предельном множестве одну или большее число замкнутых орбит (которые могут совпадать с $\gamma_1(\varepsilon)$ или $\gamma_2(\varepsilon)$). (См. рис. 3А.1.)

Чейфи [2] также доказал теорему, аналогичную 3А.1, для случая, когда векторное поле в момент t зависит от потока в момент $t - \alpha$ для некоторого $\alpha \geq 0$, т. е. $\dot{x} = F(t, x_t)$, где $x_t = x(t - \alpha)$.

Следующий пример (см. Чейфи [1]) показывает, что, вообще говоря, невозможно предсказать число различных се-

мейств рождающихся замкнутых орбит. Пусть в цилиндрических координатах

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r (\varepsilon - r^2)^{n_1} (2\varepsilon - r^2)^{n_2} (3\varepsilon - r^2)^{n_3} \dots (m\varepsilon - r^2)^{n_m} = \\ &= rf(r, \varepsilon), \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1, \\ \frac{dz}{dt} &= -z, \end{aligned} \right\} \quad (3A.2)$$

где $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ нечетно.

Это уравнение класса C^∞ в прямоугольных координатах. Кроме того, оно имеет m различных семейств замкнутых орбит, которые рождаются из начала координат при $\varepsilon = 0$ (т. е. при $r^2 = j\varepsilon$, $z = 0$). В прямоугольных координатах производная векторного поля в начале координат есть

$$\begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где $\alpha = (\varepsilon^j)^{\sum n_j} \prod_j (j^{n_j})$. Собственные значения равны -1 и $\alpha \pm i$. Меняя m и n_j , можно изменить число различных замкнутых орбит независимо от порядка малости α в нуле. Например,

$$\frac{dr}{dt} = r (\varepsilon - r^2) (2\varepsilon - r^2) (3\varepsilon - r^2), \quad \text{или} \quad \frac{dr}{dt} = r (\varepsilon - r^2)^3,$$

$$\text{или} \quad \frac{dr}{dt} = r (\varepsilon - r^2) (2\varepsilon - r^2)^2.$$

Чейфи указал нам другие примеры, показывающие, что дифференцируемость по параметру необходима, чтобы обеспечить единственность замкнутых орбит. Пусть в полярных координатах задана система

$$\frac{dr}{dt} = r (r - \sqrt[3]{\varepsilon})^2 (2\sqrt[3]{\varepsilon} - r), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1.$$

(3A.2) *Упражнение.* Показать, что, хотя $\left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 2 > 0$, происходит рождение двух различных периодических орбит (при $r = \varepsilon^{1/3}$ и $r = 2\varepsilon^{1/3}$).

(3A.3) *Замечания.* В работе Иоста и Зендера [1] рассмотрена ситуация, где X зависит более чем от одного параметра. (См. также Такенс [1].)

Из некоторых недавних интересных результатов Джозефа следует другое доказательство результата Чейфи, состоящего в том, что условие $V'''(0) \neq 0$ не является необходимым, и достаточно лишь потребовать устойчивости особой точки при $\mu = 0$ (см. также гл. 3В). Джозеф тоже умеет рассматривать случай рождения периодических орбит конечной амплитуды. Детали см. в работах Джозефа и Нилда [1] и Джозефа [2]. Для случая, когда число параметров больше 1, Такенс [1] также получил бифуркации с конечной амплитудой.

В работе Александера и Йорка [1] доказано, грубо говоря, следующее предложение: если векторное поле X_μ имеет замкнутую орбиту γ_μ , то при возрастании μ или γ_μ остается замкнутой орбитой, или период γ_μ становится бесконечным, или γ_μ влипает в особую точку¹⁾. Делается это без предположений устойчивости γ_μ . Другое доказательство см. у Изэ [1] (мы благодарим Л. Ниренберга, обратившего наше внимание на эту работу).

¹⁾ Здесь рассматривается ситуация, когда векторное поле зависит от параметра μ и замкнутая орбита существует при $\mu \in [\mu_1, \mu_2)$, непрерывно зависит от параметра на этом множестве и ставится вопрос: что будет с этой орбитой при $\mu = \mu_2$? — *Прим. перев.*

Глава 3В

БОЛЕЕ ОБЩИЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Здесь мы докажем, что наименьшее n , для которого $\frac{\partial^n V}{\partial x_1^n}(0, 0) \neq 0^1$, нечетно и что в случае, когда этот коэффициент отрицателен, периодическая орбита, которая получалась в теореме 3.1 с использованием теоремы о неявной функции, устойчива и рождается при $\mu > 0$ (мы предполагаем, что векторное поле достаточное число раз дифференцируемо, так что V класса C^n).

Мы покажем также, что если для потока X_0 начало координат устойчиво по Ляпунову, то периодическая орбита, получаемая из теоремы 3.15 (части (А) и (В) заключения теоремы), устойчива и возникает при $\mu > 0$.

(3В.1) **Лемма.** Пусть векторное поле X класса C^{2k} , $k \geq 2$. Тогда функция $\mu(x_1)$ класса $C^{2(k-1)}$. Допустим, что существует $j \leq 2(k-1)$, для которого $\mu^{(j)}(0) \neq 0$. Тогда наименьшее j , для которого это выполняется, четно.

Доказательство. Пусть n будет наименьшее целое j , для которого $\mu^{(j)}(0) \neq 0$. Допустим, что $\mu^{(n)}(0) > 0$, и выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы для всех x_1 , $|x_1| < \varepsilon$ выполнялось $\mu^{(n)}(x_1) > 0$. Тогда по теореме о среднем получим $\mu(x_1) = \mu^{(n)}(\alpha_n)x_1\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$, где $0 < \alpha_j < x_1$ (или $x_1 < \alpha_j < 0$) для всех j .

Пусть n нечетно, тогда $\text{sign}(x_1) = \text{sign}(x_1\alpha_1 \dots \alpha_{n-1})$. Поэтому для всех x_1 , для которых $|x_1| < \varepsilon$, из $x_1 > 0$ следует $\mu(x_1) > 0$, а из $x_1 < 0$ следует $\mu(x_1) < 0$. Однако, как мы знаем, это невозможно. Пусть $x_1^{(n)} \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; тогда для каждого $x_1^{(n)}$ существует $y_1^{(n)} < 0$, для которого $\mu(x_1^{(n)}) = \mu(y_1^{(n)})$ и $y_1^{(n)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Из тех же соображений следует, что если $\mu^{(n)}(x_1) < 0$, то n должно быть четным. Поэтому n всегда

1) $\frac{\partial^{2n+1} V}{\partial x_1^{2n+1}}(0, 0)$ обычно называется n -й ляпуновской величиной (см.

Ляпунов [1], Андронов, Леонтович, Гордон, Майер [1]). — Прим. перев.

четно. Это показывает также, что бифуркация может происходить как выше, так и ниже порога критичности. ■

(3В.2) **Лемма.** Пусть X принадлежит классу C^{2k} , $k \geq 2$. Предположим, что существует $j \leq 2(k-1)$, для которого $\mu^{(j)}(0) \neq 0$, и пусть n означает то же, что в предыдущей лемме. В этом случае $\frac{\partial^j V}{\partial x_1^j}(0, 0) = 0$ для всех $j \leq n$ и $\frac{\partial^{n+1} V}{\partial x_1^{n+1}}(0, 0) = -3 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \mu}(0, 0) \mu^{(n)}(0)$.

Доказательство. Дифференцируя уравнение $V(x_1, \mu(x_1)) = 0$ j раз и подставляя $x_1 = 0$, мы получаем $\frac{\partial^j V}{\partial x_1^j}(0, 0) + (*) = 0$, $(*)$ есть сумма членов вида $A_l \mu^{(l)}(0)$ при $l \leq j$ и $A_j = \frac{\partial V}{\partial \mu}(0, 0) = 0$, так как $V(0, \mu) = 0$ при всех μ . Поэтому если $j \leq n$, то $\frac{\partial^j V}{\partial x_1^j}(0, 0) = 0$. Чтобы найти $\frac{\partial^{n+1} V}{\partial x_1^{n+1}}(0, 0)$, мы должны найти коэффициент при $\mu^{(n)}(0)$ в уравнении $\frac{\partial^{n+1} V}{\partial x_1^{n+1}}(0, 0) + (*) = 0$. Этот коэффициент, как нетрудно видеть, равен $3 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \mu}(0, 0) + 3 \frac{\partial^2 V}{\partial \mu^2}(0, 0) \mu'(0)$. Поэтому

$$\frac{\partial^{n+1} V}{\partial x_1^{n+1}}(0, 0) = -3 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \mu}(0, 0) \mu^{(n)}(0). \quad \blacksquare$$

(3В.3) **Теорема.** Пусть X — векторное поле класса C^{2k} , $k \geq 2$. Тогда функция $\mu(x_1)$ принадлежит классу $C^{2(k-1)}$. Предположим, что существует целое $j \leq 2(k-1)$, для которого $\mu^{(j)}(0) \neq 0$, и n — наименьшее такое число. Если

$$\frac{\partial^{n+1} V}{\partial x_1^{n+1}}(0, 0) < 0, \quad \text{то} \quad \mu(x_1) > 0$$

для всех достаточно малых $x_1 \neq 0$. Кроме того, периодические орбиты, полученные из теоремы о неявной функции, устойчивы.

Доказательство. Мы уже видели, что $\mu'(x_1) > 0$ при всех малых $x_1 \neq 0$. Для того чтобы доказать устойчивость периодических орбит, мы должны показать, что функция

$$f(x_1) = \left. \frac{\partial V}{\partial x_1} \right|_{(x_1, \mu(x_1))}$$

имеет локальный максимум в точке $x_1 = 0$ (по этому поводу см. шаг 5 доказательства теоремы 3.1). Для всех $j < n$ выполнено $f^{(j)}(0) = 0$, так как $f^{(j)}(0) = \frac{\partial^{j+1}V}{\partial x_1^{j+1}}(0, 0) + (*)$, где $(*)$ обозначает сумму членов вида $A_l \mu^{(l)}(0)$ при $l \leq j$.

$$f^{(n)}(0) = \frac{\partial^{n+1}V}{\partial x_1^{n+1}}(0, 0) + \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial \mu}(0, 0) \mu^{(n)}(0) = \frac{2}{3} \frac{\partial^{n+1}V}{\partial x_1^{n+1}}(0, 0) < 0.$$

Напоминаем, что n четно. Тогда по теореме о среднем получаем, что $f(x_1)$ имеет локальный максимум в точке $x_1 = 0$. ■

Замечание. Условие $\frac{\partial^{n+1}V}{\partial x_1^{n+1}}(0, 0) < 0$ в теореме (3В.3)

означает, что при $\mu = 0$ нулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво. Заключение теоремы (3В.3) уже не будет верно, если это условие заменить условием асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия при $\mu = 0$. Приведем соответствующий пример (принадлежащий Негрини и Сальвадори¹⁾). Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - y - x f(x, y) - x(x^2 + y^2)^{s+1}, \\ \dot{y} &= x + \mu y - y f(x, y) - y(x^2 + y^2)^{s+1}, \end{aligned}$$

где $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 3$, а $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 \sin^2(x^2 + y^2)^{-1}$ при $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. В качестве функции Ляпунова возьмем $u = x^2 + y^2$. Тогда производная u в силу системы равна

$$\begin{aligned} \dot{u}(x, y) &= (x^2 + y^2)(\mu - (x^2 + y^2)^s \sin^2(x^2 + y^2)^{-1} - \\ &\quad - (x^2 + y^2)^{s+1}), \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ \dot{u}(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Тогда для $\mu = 0$ состояние равновесия $(0, 0)$ асимптотически устойчиво. В полярных координатах $(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ $\dot{\rho} = \mu \rho - \rho f(\rho^2) - \rho \cdot \rho^{2(s+1)}$, $f(\rho) = \rho^s \sin^2 \frac{1}{\rho}$. Отсюда ясно, что семейство

$$\mu = f(\rho^2) + \rho^{2(s+1)}$$

определяет все замкнутые орбиты в окрестности U точки $(0, 0, 0) \subset \mathbb{R}^3$. Знак производной определяет устойчивость соответствующей периодической орбиты

$$\frac{d\mu}{d\rho} = 2\rho^{2s-3} [(s+1)\rho^4 + s\rho^2 \sin^2(\rho^{-2}) - \sin(2\rho^{-2})].$$

¹⁾ Этот пример был любезно прислан нам авторами книги. — Прим. ред.

Если $n \in \mathbb{N}$ достаточно велико, то числа $\rho_n = 2[\pi(4n+1)]^{-1/2}$ близки к нулю и, следовательно, соответствующие периодические орбиты лежат в U . С другой стороны, при достаточно больших n в этих точках $\mu'(\rho_n) > 0$, и поэтому $\dot{\rho} < 0$ при $\mu = f(\rho^2) + \rho^{2(s+1)}$, т. е. орбиты неустойчивы. Происходит это вследствие того, что функция $\mu(\rho)$ не взаимно однозначна около нуля, поэтому при данном μ поле имеет не одну периодическую орбиту (см. теорему Чейфи, гл. 3А).

Нетрудно доказать, пользуясь теоремой Чейфи, что если функция $\mu(x_1)$ взаимно однозначна, то из асимптотической устойчивости нулевого состояния равновесия при $\mu = 0$ и условий теоремы 3.15 следует устойчивость рождающихся периодических орбит. [2]

Глава 3С

БИФУРКАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ХОПФА И ТЕОРЕМА ЛЯПУНОВА О ЦЕНТРЕ

Дитер С. Шмидт

Введение

В последние годы большое число работ было посвящено рождению периодических орбит из состояния равновесия. Исходным пунктом большинства этих исследований является либо теорема Ляпунова [1], либо теорема Хопфа [1]; некоторые из этих локальных результатов, полученные Чейфи [1], Хенрадом [1], Шмидтом и Свитом [1], отмечались в предыдущих разделах. В то же время Александером и Йорком [1] обсуждались и глобальные проблемы бифуркаций периодических орбит. В своей работе они показали, что теорему Ляпунова о центре можно получить как следствие теоремы Хопфа.

Дж. А. Йорк высказал идею, что и локально можно получить теорему Ляпунова из теоремы Хопфа. Для того чтобы показать это, мы проведем аналитическое доказательство теоремы Хопфа, основанное на альтернативном методе и описанное в общих чертах в статье Бергера из книги Антмана и Келлера [1]. Это доказательство является столь общим, что содержит в качестве следствия теорему Ляпунова. Кроме того, наше доказательство теоремы Хопфа позволяет достаточно просто обсудить некоторые исключительные случаи.

Бифуркационная теорема Хопфа

Рассмотрим n -мерную автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, \mu), \quad (3С.1)$$

зависящую от действительного параметра μ . Мы предполагаем, что (3С.1) допускает аналитическое семейство $x = x(\mu)$ состояний равновесия, т. е. $F(x(\mu), \mu) = 0$. Без ограничения общности можно считать, что этим семейством является $x \equiv 0$, т. е. $F(0, \mu) = 0$. Допустим, что при некотором μ , например при $\mu = 0$, матрица $F_x(0, \mu)$ имеет два чисто мнимых собственных значения $\pm i\beta$ и не существует других собственных значений $F_x(0, 0)$, целочисленно кратных $i\beta$.

Пусть $\alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ является продолжением по параметру собственного значения $i\beta$.

Будем предполагать, что $\alpha'(0) \neq 0$.

(3С.1) **Теорема Хопфа.** При сформулированных условиях существуют непрерывные функции $\mu = \mu(\varepsilon)$ и $T = T(\varepsilon)$, зависящие от параметра ε , $\mu(0) = 0$, $T(0) = 2\pi\beta^{-1}$ и такие, что у уравнения (3С.1) существуют периодические решения $x(t, \varepsilon)$ периода $T(\varepsilon)$, которые влипают начало координат при $\varepsilon \rightarrow 0$.

(3С.2) **Замечание.** Сформулированные нами в теореме Хопфа условия немного слабее, чем обычно: мы не требуем отсутствия других мнимых собственных значений. Кроме того, в нашем доказательстве не используется аналитичность $F(x, \mu)$, однако определенная гладкость ее необходима.

Доказательство. С помощью линейной замены координат вида $y = S(\mu)x$ и замены независимой переменной $\tau = \beta(\mu)t$ мы можем привести уравнение (3С.1) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (u(\mu) + i)y_1 + \varphi_1(y_1, y_2, \tilde{y}, \mu), \\ \dot{y}_2 &= (u(\mu) - i)y_2 + \varphi_2(y_1, y_2, \tilde{y}, \mu), \\ \dot{\tilde{y}} &= B(\mu)\tilde{y} + \tilde{\varphi}(y_1, y_2, \tilde{y}, \mu). \end{aligned} \quad (3С.2)$$

Здесь y_1 и y_2 являются двумя первыми комплексными компонентами вектора y . Действительные решения получаются, только если $y_1 = \bar{y}_2$. Остальные $(n-2)$ компоненты вектора y действительны и обозначаются через $\tilde{y}$. $B(\mu)$ — действительная квадратная $(n-2)$ -матрица, не обязательно имеющая нормальную форму, а функции φ_1 , φ_2 , $\tilde{\varphi}$ по крайней мере квадратичны по компонентам вектора y .

Введем теперь такие полярные координаты:

$$y_1 = re^{i\theta}, \quad y_2 = re^{-i\theta}, \quad \tilde{y} = r\eta.$$

Система (3С.2) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= u(\mu)r + \operatorname{Re}\{e^{-i\theta}\varphi_1\}, \\ \dot{\theta} &= 1 + \frac{1}{r}\operatorname{Im}\{e^{-i\theta}\varphi_1\}, \\ \dot{\eta} &= B(\mu)\eta - u(\mu)\eta + \frac{1}{r}(\varphi - \operatorname{Re}\{e^{-i\theta}\varphi_1\}\eta). \end{aligned} \quad (3С.3)$$

В эту систему мы введем скалярный множитель ε , полагая $r = \varepsilon r$ и $\mu = \varepsilon\mu_1$. Так как $\dot{\theta} = 1 + O(\varepsilon)$, мы можем использовать θ как новую независимую переменную, чтобы преодо-

леть автономность системы. В результате дифференциальные уравнения приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\theta} &= \varepsilon R(\theta, \rho, \eta, \varepsilon), \\ \frac{d\eta}{d\theta} &= B(0)\eta + V(\theta, \rho, \eta, \varepsilon),\end{aligned}\tag{3С.4}$$

и мы ищем 2π -периодические решения этой системы. В силу наших предположений о собственных значениях матрицы $B(0)$ мы получаем, что при $\varepsilon = 0$ 2π -периодическим решением является только $\rho = \rho_0 = \text{const}$, $\eta = 0$. Это решение сохраняется при $\varepsilon \neq 0$, если уравнение разветвления имеет решение (см. Бергер [1])

$$\int_0^{2\pi} R(\theta, \rho, \eta, \varepsilon) d\theta = 0.$$

В подинтегральном выражении ρ и η являются 2π -периодическими решениями данной системы (3С.4). Члены порядка ε^0 уже известны, и мы можем вычислить члены того же порядка в уравнении разветвления. Отсюда получаем

$$\mu_1 u'(0) \rho_0 + O(\varepsilon) = 0.$$

Это уравнение можно решить с помощью теоремы о неявной функции, так как $u'(0) \neq 0$ по предположению, а $\rho_0 \neq 0$ в силу того, что мы ищем нетривиальные решения. Поэтому мы однозначно находим $\mu_1 = \mu_1(\varepsilon) = O(\varepsilon)$. Следовательно, функция $\mu = \mu(\varepsilon) = \varepsilon \mu_1(\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$ найдена. Период решения в исходных x -координатах определяется из выражения для $\frac{d\theta}{dt}$ и равен

$$T = T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\beta(0)} (1 + O(\varepsilon^2)).$$

Теорема Ляпунова

(3С.3) Теорема Ляпунова. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + f(x),\tag{3С.5}$$

где $f(x)$ — гладкая функция, которая равна нулю вместе с первыми производными при $x = 0$. Предположим, что система допускает первый интеграл вида $I(x) = \frac{1}{2} x^T S x + \dots$, где $S = S^T$ и $\det S \neq 0$. Пусть A имеет собственными значениями числа $\pm i\beta$, $\lambda_3, \dots, \lambda_n$, $\beta \neq 0$. Тогда если $\frac{\lambda_j}{\beta i} \neq$ целому

числу для $j = 3, \dots, n$, то система имеет однопараметрическое семейство периодических решений, стягивающихся к началу координат, при этом их периоды стремятся к $\frac{2\pi}{\beta}$.

Обычное доказательство см. у Келли [1].

Доказательство. Как уже говорилось во введении, мы покажем, что эта теорема является следствием теоремы Хопфа. Для этого мы рассмотрим модифицированную систему

$$\dot{x} = Ax + f(x) + \mu \operatorname{grad} I(x) \quad (3С.6)$$

и покажем, что все условия теоремы о рождении цикла удовлетворяются, а нестационарные периодические орбиты могут быть только при $\mu = 0$.

Вторую часть этого утверждения легко получить, вычисляя $\frac{dI}{dt}$ вдоль решений (3С.6), что дает

$$\frac{dI}{dt} = \langle \operatorname{grad} I(x), Ax + f(x) + \mu \operatorname{grad} I(x) \rangle = \mu |\operatorname{grad} I(x)|^2.$$

Второе равенство следует из того, что $I(x)$ — интеграл (3С.5). Поэтому $\frac{1}{\mu} I$ монотонно возрастает всюду кроме точек, где $\operatorname{grad} I(x(t)) = 0$, откуда получаем $\dot{x}(t) = x(0)$, т. е. стационарную точку¹⁾.

Для того чтобы применить теорему предыдущего раздела, мы должны проверить только условия на действительную часть собственного значения, близкого к $i\beta$. Снова с помощью линейной замены мы приведем линейную часть системы (3С.5) к нормальной форме. Будем предполагать, что это уже сделано, и, таким образом, матрица A имеет следующую действительную форму:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A} \end{pmatrix},$$

где $\tilde{A}$ — действительная квадратная матрица порядка $n - 2$. Как следует из равенства $A^T S + SA = 0$, матрица S в интеграле имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{S} \end{pmatrix}$$

¹⁾ Не нужно забывать, что рассмотрение ведется в окрестности $x = 0$, где $\operatorname{grad} I(x) = 0$ только в точке $x = 0$. — Прим. перев.

с $a \neq 0$, так как $\det S \neq 0$. Наконец, из вида матрицы

$$A + \mu S = \begin{pmatrix} \mu a & \beta & 0 \\ -\beta & \mu a & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A} + \mu \tilde{S} \end{pmatrix}$$

следует, что собственное значение, близкое к $i\beta$, имеет действительную часть $\alpha(\mu) = a\mu$, и поэтому $\alpha'(0) = a \neq 0$ [3]. ■

Особый случай теоремы Хопфа

Наше доказательство теоремы Хопфа нетрудно приспособить к случаю, когда действительная часть собственного значения не удовлетворяет условию $\alpha'(0) \neq 0$, а вместо этого $\alpha''(0) \neq 0$. Член с μ_1 в бифуркационном уравнении равен нулю, и мы должны вычислить некоторые члены более высокого порядка.

Воспользуемся той же самой нормальной формой, которая ранее использовалась в уравнении (3С.2), и для простоты предположим, что φ_1 и φ_2 — аналитические функции своих переменных. Будем считать, что предварительно нелинейным преобразованием исключены смешанные квадратичные члены, содержащие y_1 или y_2 и компоненты $\tilde{y}$. Этого можно добиться методом, аналогичным тому, который используется при биркгофовой нормализации гамильтоновых систем, т. е. с помощью преобразования вида (см. гл. 6А)

$$\begin{aligned} y_1 &\rightarrow y_1 + y_1 \alpha^T \tilde{y} + y_2 \beta^T \tilde{y}, \\ y_2 &\rightarrow y_2 + y_1 \bar{\beta}^T \tilde{y} + y_2 \bar{\alpha}^T \tilde{y}, \\ \tilde{y} &\rightarrow \tilde{y}. \end{aligned}$$

Если потребовать, чтобы в новых переменных уравнения не содержали членов, упомянутых выше, то это позволяет однозначно найти $(n-2)$ -мерные комплексные векторы α и β , так как матрица в системе (3С.2) не имеет при малых μ собственными значениями ни 0, ни $2i$.

Нам необходимо знать квадратичные и кубичные по y_1, y_2 члены функции φ_1 , т. е.

$$\varphi_1 = ay_1^2 + by_1y_2 + cy_2^2 + \dots + \alpha y_1^3 + \beta y_1^2y_2 + \lambda y_1y_2^2 + \delta y_2^3 + \dots$$

Многоточие означает либо члены, содержащие только $\tilde{y}$, либо члены более высокого порядка. Коэффициенты, конечно, зависят от параметра μ , и мы можем записать $a = a(\mu) = a_0 + a_1\mu + O(\mu^2)$ и аналогично для других коэффициентов.

В переменных θ , r , η самое важное уравнение — это уравнение для r , и оно записывается в виде

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{u(\mu)r + \operatorname{Re}\{e^{-i\theta}\varphi_1\}}{1 + r^{-1}\operatorname{Im}\{e^{-i\theta}\varphi_1\}}.$$

Введем масштабный множитель

$$r = \varepsilon^2 \rho, \quad \mu = \varepsilon \mu_1$$

и получим

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \varepsilon^2 (R_0 + \varepsilon^2 R_1 + \varepsilon \mu_1 R_2 + \mu_1^2 R_3 + \dots),$$

$$\frac{d\eta}{d\theta} = B(0)\eta + O(\varepsilon^2),$$

где

$$R_0 = \rho^2 \operatorname{Re}\{a_0 e^{i\theta} + b_0 e^{-i\theta} + c_0 e^{-3i\theta} + \dots\},$$

$$R_1 = \rho^3 (\operatorname{Re}\{\alpha_0 e^{2i\theta} + \beta_0 + \gamma_0 e^{-2i\theta} + \delta_0 e^{-4i\theta} + \dots\} - \\ - \operatorname{Re}\{a_0 e^{i\theta} + b_0 e^{-i\theta} + c_0 e^{-3i\theta} + \dots\} \cdot \operatorname{Im}\{a_0 e^{i\theta} + b_0 e^{i\theta} + \\ + c_0 e^{-3i\theta} + \dots\}),$$

$$R_2 = \rho^2 \operatorname{Re}\{a_1 e^{i\theta} + b_1 e^{-i\theta} + c_1 e^{-3i\theta} + \dots\},$$

$$R_3 = \frac{1}{2} u''(0) \rho.$$

Многоточием в функциях R_0 , R_1 , R_2 обозначены члены, содержащие η . Так как $\eta = O(\varepsilon^2)$, то эти члены несущественны при отыскании уравнения разветвления 2π -периодических решений, которое имеет ту же форму, что и ранее, и записывается в виде

$$\int_0^{2\pi} (R_0 + \varepsilon^2 R_1 + \varepsilon \mu_1 R_2 + \mu_1^2 R_3 + \dots) d\theta = 0.$$

При вычислении этого интеграла сразу видно, что отсутствует постоянный член. Тем не менее следует обратить внимание на интегрирование R_0 , так как оно дает вклад в член с ε^2 вследствие вида решения для ρ :

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon^2 \rho_0^2 \operatorname{Re}\left\{a_0 i (1 - e^{i\theta}) + b_0 i (e^{-i\theta} - 1) + \frac{c_0 i}{3} (e^{-3i\theta} - 1)\right\} + \\ + O(\varepsilon^3).$$

Благодаря предварительно проведенному преобразованию переменные η в R_0 входят квадратично, и поэтому они вносят вклад только в члены высшего порядка по ε и μ_1 . Интегри-

рование приводит нас к следующему уравнению разветвления:

$$2\pi (\varepsilon^2 \rho_0^3 \operatorname{Re} \{\beta_0 + i a_0 b_0\} + \frac{1}{2} \mu_1^2 u''(0) \rho_0 + \dots) = 0$$

Теорема о неявной функции позволяет нам получить следующий результат: если $u''(0) \operatorname{Re} \{\beta_0 + i a_0 b_0\} < 0$, то существуют два различных решения приведенного выше уравнения разветвления, имеющих вид $\mu_1 = O(\varepsilon)$. Эти решения соответствуют двум семействам периодических орбит, рождающихся из состояния равновесия. В случае $u''(0) \operatorname{Re} \{\beta_0 + i a_0 b_0\} > 0$ таких решений нет. Наконец, если дискриминант равен нулю, то необходимо учитывать члены более высокого порядка, чтобы выяснить, какой случай здесь имеет место. В случае $u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-1)}(0) = 0$, $u^{(n)}(0) \neq 0$ мы вводим масштабный множитель с помощью соотношений $r = \varepsilon^n \rho$, $\mu = \varepsilon \mu_1$ и после аналогичных вычислений приходим к уравнению разветвления

$$\frac{\rho_0}{n!} u^{(n)}(0) \mu_1^n + \rho_0^3 \operatorname{Re} \{\beta_0 + i a_0 b_0\} \varepsilon^n + \dots = 0.$$

Обозначим $D = u^{(n)}(0) \operatorname{Re} \{\beta_0 + i a_0 b_0\}$. Если n нечетно и $D \neq 0$, то всегда существует при малых ε решение вышеприведенного уравнения разветвления, имеющее вид $\mu_1 = \mu_1(\varepsilon) = O(\varepsilon)$. Если n четно, то существуют два таких решения при $D < 0$ и нет ни одного решения при $D > 0$.

(3С.4) Теорема. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (3С.2), и пусть она записана в нормальной форме, как описано выше. Предположим, что $u(0) = u'(0) = \dots = u^{(n-1)}(0) = 0$, $u^{(n)}(0) \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$ и $D = u^{(n)}(0) \operatorname{Re} \{\beta_0 + i a_0 b_0\}$. Тогда если n нечетно и $D \neq 0$, то существует, по крайней мере локально, однопараметрическое семейство периодических орбит, которое стягивается в начало, а период этих орбит стремится к 2π , когда параметр стремится к нулю. Если n четно, то существует два таких семейства в случае $D < 0$ и ни одного — в случае $D > 0$.

Этот результат очень близок к результату Чейфи [1], который обсуждался в гл. 3А. (См. также Такенс [1].) [4]

ВЫЧИСЛЕНИЕ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Как мы уже видели, в основе применения теоремы Хопфа в каждом конкретном случае лежит анализ спектра линеаризованных уравнений, т. е. задача о собственных значениях. Эта процедура обычно достаточно проста (случай дифференциальных уравнений с частными производными см. в гл. 8). Более сложной является задача определения устойчивости рождающихся периодических решений. В настоящей главе мы хотели бы развить такой метод, с помощью которого легко считались бы конкретные примеры. Именно, *будет предложен некий специфический алгоритм вычислений*, подытоженный в гл. 4А ниже. (Сравните с аналогичными формулами, рассматриваемыми в гл. 5А, основанными на методе Хопфа.) Эти результаты базируются на работе Мак-Кракен [1].

Сведение к двумерному случаю

Начнем с подробного изложения сведения к двумерному случаю. Пусть $X: N \rightarrow T(N)$ — гладкое векторное поле класса C^k на банаховом многообразии N , гладко зависящее от параметра μ , и $X_\mu(a(\mu)) = 0$ для всех μ , где $a(\mu)$ — гладкое однопараметрическое семейство нулей X_μ . Предположим, что для $\mu < \mu_0$ спектр $\sigma(dX_\mu(a(\mu))) \subset \{z | \operatorname{Re} z < 0\}$, так что $a(\mu)$ — устойчивое состояние равновесия потока X_μ . Чтобы узнать, применима ли бифуркационная теорема Хопфа, вычислим $dX_\mu(a(\mu))$. Если два простых комплексно-сопряженных ненулевых собственных значения $\lambda(\mu)$ и $\overline{\lambda}(\mu)$ с ненулевой скоростью при $\mu = \mu_0$ пересекают мнимую ось, а оставшаяся часть спектра $\sigma(dX_\mu(a(\mu)))$ лежит в левой полуплоскости и отделена от мнимой оси, тогда происходит рождение периодических орбит.

Однако поскольку неустойчивые периодические орбиты наблюдаемы в природе лишь при наличии специальных условий (см. гл. 7), нам важно научиться определять, устойчивы или нет рождающиеся периодические орбиты. Чтобы применить теорему 3.1, мы должны свести задачу к двумерному случаю. Предположим, что мы работаем в локальной карте,

т. е. $N = E$ (банахову пространству). Для упрощения обозначений предположим также, что $\mu_0 = 0$ и $a(\mu) = 0$ для всех μ . Пусть $X_\mu = (X_\mu^1, X_\mu^2, X_\mu^3)$, где X_μ^1 и X_μ^2 — координаты поля в собственном подпространстве оператора $dX_0(0)$, соответствующем собственным значениям $\lambda(0)$ и $\bar{\lambda}(0)$, а X_μ^3 — координаты поля в подпространстве F , дополнительном к этому собственному подпространству. Предположим, что координаты в собственном подпространстве выбраны так, что

$$dX_0(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & |\lambda(0)| & 0 \\ -|\lambda(0)| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 X_3(0, 0, 0) \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Этого всегда можно добиться, разлагая E на подпространства, соответствующие расщеплению спектра оператора $dX_0(0)$ на множества $\{z | \operatorname{Re} z < 0\} \cup \{\lambda(0), \bar{\lambda}(0)\}$, как в 2А.2. По теореме о центральном многообразии существует центральное многообразие для потока $X = (X_\mu, 0)$, касающееся собственного подпространства, соответствующего $\lambda(0)$, $\bar{\lambda}(0)$ и оси μ в точке $(0, 0, 0, 0)$. Центральное многообразие локально может быть представлено как график функции, то есть как $\{(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu)\}$ для (x_1, x_2, μ) из некоторой окрестности $(0, 0, 0)$. Кроме того, $f(0, 0, 0) = df(0, 0, 0) = 0$ и отображение проекции $P(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu) = (x_1, x_2, \mu)$ определяет локальную карту для центрального многообразия. В окрестности начала координат векторное поле X касательно к центральному многообразию, так как последнее локально инвариантно относительно потока, определяемого векторным полем X . Рассмотрим теперь проекцию векторного поля X с центрального многообразия на плоскость (x_1, x_2, μ) : $\hat{X}(x_1, x_2, \mu) = TP \circ X(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu) = (X_\mu^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu)), X_\mu^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu)), 0)$ в силу линейности P . Если положить $\hat{X}_\mu(x_1, x_2) = (X_\mu^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu)), X_\mu^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu)))$, то $\hat{X}_\mu$ будет гладким однопараметрическим семейством векторных полей на R^2 , таким, что $\hat{X}_\mu(0, 0) = 0$ для всех μ . Мы покажем, что $\hat{X}_\mu$ удовлетворяет условиям теоремы Хопфа (конечно, за исключением условий устойчивости). Если φ_t и $\hat{\varphi}_t$ — потоки, определяемые векторными полями X и $\hat{X}$ соответственно, то $P \circ \hat{\varphi}_t = \hat{\varphi}_t \circ P$ для точек на центральном многообразии. Поэтому, если получающиеся периодические орбиты потока $\hat{\varphi}_t$ не являются притягивающими, то и орбиты потока φ_t не будут такими. Мы также покажем, что если начало координат — слабый аттрактор для $\hat{\varphi}_t$ при $\mu = 0$, то замкнутые орбиты потока φ_t устойчивы.

Центральное многообразие обладает тем свойством, что содержит всю локальную рекуррентность потока φ_t , поэтому точки $(0, 0, 0, \mu)$ лежат на нем для всех малых μ , т. е. $f(0, 0, \mu) = 0$ для малых μ . Таким образом, $\hat{X}_\mu(0, 0) = (X_\mu^1(0, 0, f(0, 0, \mu)), X_\mu^2(0, 0, f(0, 0, \mu))) = (X^1(0, 0, 0), X^2(0, 0, 0)) = 0$. Поскольку $P \circ X = \hat{X} \circ P$, то $P \circ dX = d\hat{X} \circ P$ для векторов, касательных к центральному многообразию. Обычно векторное поле, касательное к центральному многообразию, имеет вид

$$(u, v, d_1f(x_1, x_2, \mu)u + d_2f(x_1, x_2, \mu)v + d_3f(x_1, x_2, \mu)w, w)^1),$$

где $(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu)$ — точка приложения вектора. Поскольку нам нужно вычислить $\sigma(d\hat{X}_\mu(0, 0))$, то мы будем интересоваться случаем $w = 0$. Теперь

$$\begin{aligned} P \circ dX(0, 0, 0, \mu)(u, v, d_1f(0, 0, \mu)u + d_2f(0, 0, \mu)v, 0) = \\ = d\hat{X}(0, 0, \mu)(u, v, 0). \end{aligned}$$

То есть $dX_\mu^i(0, 0, 0)(u, v, d_1f(0, 0, \mu)u + d_2f(0, 0, \mu)v) = d\hat{X}_\mu^i(0, 0)(u, v)$ для $i = 1, 2$. Пусть $\lambda \in \sigma(d\hat{X}_\mu(0, 0))$. Так как $d\hat{X}_\mu(0, 0)$ — это (2×2) -матрица, то λ является собственным значением, и поэтому существует комплексный вектор (u, v) , такой, что $d\hat{X}_\mu(0, 0)(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$. Покажем, что λ — собственное значение $dX_\mu(0, 0, 0)$, а $(u, v, d_1f(0, 0, \mu)u + d_2f(0, 0, \mu)v)$ — собственный вектор. Поскольку X касателен к центральному многообразию, то $X^3(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu) = d_1f(x_1, x_2, \mu)X^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu) + d_2f(x_1, x_2, \mu)X^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu)$. Поэтому

$$\begin{aligned} d_1X^3(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu)u + \\ + d_3X^3(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu) \circ d_1f(x_1, x_2, \mu)u = \\ = d_1d_1f(x_1, x_2, \mu) \circ X^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu)u + \\ + d_1f(x_1, x_2, \mu) \circ d_1X^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu)u + \\ + d_1f(x_1, x_2, \mu) \circ d_3X^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu) \circ d_1f(x_1, x_2, \mu)u + \\ + d_1d_2f(x_1, x_2, \mu)X^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu)u + \\ + d_2f(x_1, x_2, \mu) \circ d_1X^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu)u + \\ + d_2f(x_1, x_2, \mu) \circ d_3X^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu) \circ d_1f(x_1, x_2, \mu)u \end{aligned}$$

¹⁾ $d_1f(x_1, x_2, x_3)$ означает производную по x_1 , т. е. $\frac{\partial f}{\partial x_1}$. — Прим. перев.

и

$$\begin{aligned}
 & d_2 X^3(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu) v + d_3 X^3(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu) \circ \\
 & \quad \circ d_2 f(x_1, x_2, \mu) v = \\
 & = d_2 d_1 f(x_1, x_2, \mu) \circ X^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu) v + \\
 & + d_1 f(x_1, x_2, \mu) \circ d_2 X^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu) v + \\
 & + d_1 f(x_1, x_2, \mu) \circ d_3 X^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu) \circ d_2 f(x_1, x_2, \mu) v + \\
 & + d_2 d_2 f(x_1, x_2, \mu) X^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu) v + \\
 & + d_2 f(x_1, x_2, \mu) \circ d_2 X^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu) v + \\
 & + d_2 f(x_1, x_2, \mu) \circ d_3 X^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu) \circ d_2 f(x_1, x_2, \mu) v.
 \end{aligned}$$

В точке $(0, 0, 0, \mu)$ $X^1 = X^2 = 0$, поэтому

$$\begin{aligned}
 & dX^3(0, 0, 0, \mu)(u, v, d_1 f(0, 0, \mu)u + d_2 f(0, 0, \mu)v) = \\
 & = d_1 X^3(0, 0, 0, \mu)u + d_2 X^3(0, 0, 0, \mu)v + \\
 & + d_3 X^3(0, 0, 0, \mu) \circ d_1 f(0, 0, \mu)u + \\
 & + d_3 X^3(0, 0, 0, \mu) \circ d_2 f(0, 0, \mu)v = \\
 & = d_1 f(0, 0, \mu) \circ (d_1 X^1(0, 0, 0, \mu)u + \\
 & + d_2 X^1(0, 0, 0, \mu)v + d_3 X^1(0, 0, 0, \mu) \circ d_1 f(0, 0, \mu)u + \\
 & + d_3 X^1(0, 0, 0, \mu) \circ d_2 f(0, 0, \mu)v) + \\
 & + d_2 f(0, 0, \mu) \circ (d_1 X^2(0, 0, 0, \mu)u + d_2 X^2(0, 0, 0, \mu)v + \\
 & + d_3 X^2(0, 0, 0, \mu) \circ d_1 f(0, 0, \mu)u + \\
 & + d_3 X^2(0, 0, 0, \mu) \circ d_2 f(0, 0, \mu)v) = \\
 & = d_1 f(0, 0, \mu)\lambda u + d_2 f(0, 0, \mu)\lambda v = \\
 & = \lambda(d_1 f(0, 0, \mu)u + d_2 f(0, 0, \mu)v)
 \end{aligned}$$

в силу предположения о том, что (u, v) является собственным вектором $d\hat{X}_\mu(0, 0)$ с собственным значением λ .

При $\mu = 0$ $df = 0$, следовательно,

$$d\hat{X}_0(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & |\lambda(0)| \\ -|\lambda(0)| & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения $d\hat{X}_\mu(0, 0)$ непрерывны по μ , поскольку они являются корнями квадратного трехчлена. Обозначим эти корни через $\alpha_1(\mu)$ и $\alpha_2(\mu)$, так что $\alpha_1(0) = \lambda(0)$ и $\alpha_2(0) = \overline{\lambda(0)}$. Поскольку $\alpha_1(\mu), \alpha_2(\mu) \in \sigma(dX_\mu(0, 0, 0))$, то если бы $\alpha_1(\mu) \neq \lambda(\mu)$, $\alpha_2(\mu) \neq \overline{\lambda(\mu)}$, то $\operatorname{Re} \alpha_i(\mu)$ было бы отделено от нуля для всех малых μ . Это не так, и поэтому

$\alpha_1(\mu) = \lambda(\mu)$ и $\alpha_2(\mu) = \overline{\lambda(\mu)}$. Кроме того, так как $\lambda(\mu)$ и $\overline{\lambda(\mu)}$ — простые собственные значения из $\sigma(dX_\mu(0, 0, 0))$, то центральное многообразие должно касаться в точке $(0, 0, 0, \mu)$ собственного подпространства, соответствующего $\{\lambda(\mu), \overline{\lambda(\mu)}\}$.

Покажем теперь, что если $V'''(0) < 0$ для X , то замкнутая орбита потока φ_t устойчива. Отображение $Q(x_1, x_2, x_3, \mu) = (x_1, x_2, x_3 - f(x_1, x_2, \mu), \mu)$ является диффеоморфизмом окрестности $\mathcal{U}$ точки $(0, 0, 0, 0)$ в окрестность V этой же точки, где $\mathcal{U}$ выбрана настолько малой, чтобы X касалось центрального многообразия M в точках $(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu) \in \mathcal{U}$. Ясно, что $Q|_M = P$, $\tilde{X}|_{\{x_3=0\}} = \hat{X}$ и $\tilde{\varphi}_t|_{\{x_3=0\}} = \hat{\varphi}_t$. Поэтому задача естественно свелась к случаю векторного поля Y_μ на $R^2 \oplus F$, где R^2 инвариантно относительно Y_μ и Y_μ удовлетворяет условиям теоремы Хопфа на R^2 — собственном подпространстве, соответствующем $\lambda(\mu)$ и $\overline{\lambda(\mu)}$ в точке $(0, 0, 0, \mu)$. Предположим, что $V'''(0) < 0$ для $Y = Y_{\{x_3=0\}}$, и пусть точка $(x_1, 0, 0, \mu(x_1))$ лежит на замкнутой орбите потока φ_t , соответствующего векторному полю Y . Поскольку R^2 инвариантно, то

$$d\varphi_{T(x_1)}(x_1, 0, 0, \mu(x_1)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{13} \\ 0 & 0 & d_3\varphi_{T(x_1)}^3(x_1, 0, 0, \mu(x_1)) & \end{pmatrix}.$$

По предположению $(d_3\varphi_{T(0)}^3(0, 0, 0, 0)) = (e^{T(0)} d_3X^3(0, 0, 0)) = e^{\sigma(T(0) d_3X^3(0, 0, 0))}$ лежит внутри единичной окружности. По непрерывности это же справедливо и для $\sigma(d_3\varphi_{T(x_1)}^3(x_1, 0, 0, \mu(x_1)))$. Так как $V'''(0) < 0$, то собственные значения отображения Пуанкаре в R^2 по модулю меньше единицы, поэтому все собственные значения отображения Пуанкаре лежат внутри единичной окружности, и, следовательно, траектория является устойчивой (см. гл. 2В).

Вывод. Мы показали, что задача об устойчивости замкнутых орбит потока X_μ сводится к задаче об устойчивости замкнутых траекторий потока $\hat{X}_\mu$, где $\hat{X}_\mu(x_1, x_2) = (X_\mu^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu)), X_\mu^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu)))$. При этом координаты выбирались так, чтобы x_1, x_2 были координатами в собственном подпространстве $dX_0(0, 0, 0)$, а третья компонента лежала в дополнительном подпространстве F . Множество $\{(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu), \mu) \mid (x_1, x_2, \mu) \text{ лежит в окрестности точки } (0, 0, 0)\}$ и является центральным многообразием.

Схема вычислений устойчивости

Из доказательства теоремы 4.5 нам известно, что замкнутая орбита поля $\hat{X}_\mu$ будет устойчивой, если $V'''(0) < 0$ (или, в более общем случае (см. гл. 3В), если первая ненулевая производная V в начале координат отрицательна). Производные V в точке $(0, 0)$ можно вычислить, если известны производные X_0 в точке $(0, 0, 0)$. Сделаем это в два этапа. Во-первых, выразим $V'''(0)$ через производные векторного поля $\hat{X}_0$ на центральном многообразии в точке $(0, 0)$, используя уравнение

$$V(x_1) = \int_0^{T(x_1)} \hat{X}^1(a_t(x_1, 0), b_t(x_1, 0)) dt, \quad (4.2)$$

где (a_t, b_t) — поток, порожденный $\hat{X}$. (Заметим, что в двумерном случае $X = \hat{X}$.) Затем производные $\hat{X}_0$ в точке $(0, 0)$ выразим через производные X_0 в точке $(0, 0, 0)$. Так как

$$\hat{X}_\mu(x_1, x_2) = (X_\mu^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu)), X_\mu^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu))),$$

то нам необходимо знать производные f в точке $(0, 0, 0)$. Мы найдем их, используя локальную инвариантность центрального многообразия относительно потока, порожденного векторным полем X . Воспользуемся уравнением

$$X_\mu^3(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu)) = d_1 f(x_1, x_2, \mu) \circ X_\mu^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu)) + \\ + d_2 f(x_1, x_2, \mu) \circ X_\mu^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu)). \quad (4.3)$$

Вычисление $V'''(0)$ через $\hat{X}$

Используя (4.2), выразим $V'''(0)$ через производные поля $\hat{X}_0$ в точке $(0, 0)$. Предположим, что координаты были выбраны так, что

$$d\hat{X}_0(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{X}_0^1}{\partial x_1}(0, 0, 0) & \frac{\partial \hat{X}_0^1}{\partial x_2}(0, 0, 0) \\ \frac{\partial \hat{X}_0^2}{\partial x_1}(0, 0, 0) & \frac{\partial \hat{X}_0^2}{\partial x_2}(0, 0, 0) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & |\lambda(0)| \\ -|\lambda(0)| & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Такой выбор переменных не необходим, но он значительно упрощает вычисления, и хотя наш метод нахождения $V'''(0)$ и будет работать, если переменные специально не выбирать, однако в этом случае нашей формулой нельзя пользоваться.

Из (4.2) видно, что

$$\begin{aligned}
 V'(x_1) &= \int_0^{T(x_1)} \frac{d}{dx_1} [\hat{X}^1(a_t(x_1, 0), b_t(x_1, 0))] dt + \\
 &\quad + T'(x_1) \hat{X}^1(a_{T(x_1)}(x_1, 0), b_{T(x_1)}(x_1, 0)). \\
 V''(x_1) &= \int_0^{T(x_1)} \frac{d^2}{dx_1^2} [\hat{X}^1(a_t(x_1, 0), b_t(x_1, 0))] dt + \\
 &\quad + T'(x_1) \frac{d}{dx_1} [\hat{X}^1(a_{T(x_1)}(x_1, 0), b_{T(x_1)}(x_1, 0))] + \\
 &\quad + T''(x_1) \hat{X}^1(a_{T(x_1)}(x_1, 0), b_{T(x_1)}(x_1, 0)) + \\
 &\quad + T'(x_1) \frac{d}{dx_1} [\hat{X}^1(a_{T(x_1)}(x_1, 0), b_{T(x_1)}(x_1, 0))].
 \end{aligned}$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$\begin{aligned}
 V''(x_1) &= \int_0^{T(x_1)} \frac{d^2}{dx_1^2} [\hat{X}^1(a_t(x_1, 0), b_t(x_1, 0))] dt + \\
 &\quad + T'(x_1) \left[\frac{\partial \hat{X}^1}{\partial a} \frac{\partial a_t}{\partial x_1} \Big|_{(T(x_1), x_1, 0)} + \frac{\partial \hat{X}^1}{\partial b} \frac{\partial b_t}{\partial x_1} \Big|_{(T(x_1), x_1, 0)} \right] + \\
 &\quad + T''(x_1) \hat{X}^1(a_{T(x_1)}(x_1, 0), b_{T(x_1)}(x_1, 0)) + \\
 &\quad + T'(x_1) \left[T'(x_1) \frac{\partial \hat{X}^1}{\partial a} \frac{\partial a_t}{\partial t} \Big|_{(T(x_1), x_1, 0)} + \frac{\partial \hat{X}^1}{\partial a} \frac{\partial a_t}{\partial x_1} \Big|_{(T(x_1), x_1, 0)} + \right. \\
 &\quad \left. + T'(x_1) \frac{\partial \hat{X}^1}{\partial b} \frac{\partial b_t}{\partial t} \Big|_{(T(x_1), x_1, 0)} + \frac{\partial \hat{X}^1}{\partial b} \frac{\partial b_t}{\partial x_1} \Big|_{(T(x_1), x_1, 0)} \right] + \\
 &\quad + T'(x_1)^2 \left[\frac{\partial \hat{X}^1}{\partial a} \frac{\partial a_t}{\partial t} \Big|_{(T(x_1), x_1, 0)} + \frac{\partial \hat{X}^1}{\partial b} \frac{\partial b_t}{\partial t} \Big|_{(T(x_1), x_1, 0)} \right] + \\
 &\quad + T''(x_1) \hat{X}^1(a_{T(x_1)}(x_1, 0), b_{T(x_1)}(x_1, 0)).
 \end{aligned}$$

Дифференцируя еще раз, получим

$$\begin{aligned}
 V'''(x_1) &= \int_0^{T(x_1)} \frac{d^3}{dx_1^3} [\hat{X}^1(a_t(x_1, 0), b_t(x_1, 0))] dt + \\
 &\quad + T'(x_1) \frac{d^2}{dx_1^2} [\hat{X}^1(a_{T(x_1)}(x_1, 0), b_{T(x_1)}(x_1, 0))] + \\
 &\quad + 2T''(x_1) \left[\frac{\partial \hat{X}^1}{\partial a} \frac{\partial a_t}{\partial x_1} \Big|_{(T(x_1), x_1, 0)} + \frac{\partial \hat{X}^1}{\partial b} \frac{\partial b_t}{\partial x_1} \Big|_{(T(x_1), x_1, 0)} \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2T'(x_1) \left[\frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial a_t}{\partial x_1} \left[\frac{\partial a_t}{\partial t} T'(x_1) + \frac{\partial a_t}{\partial x_1} \right] + \right. \\
 & + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a \partial b} \frac{\partial a_t}{\partial x_1} \left(\frac{\partial b_t}{\partial t} T'(x_1) + \frac{\partial b_t}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial \hat{X}^1}{\partial a} \left(\frac{\partial^2 a_t}{\partial t \partial x_1} T'(x_1) + \frac{\partial^2 a_t}{\partial x_1^2} \right) + \\
 & + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial b^2} \frac{\partial b_t}{\partial x_1} \left(\frac{\partial b_t}{\partial t} T'(x_1) + \frac{\partial b_t}{\partial x_1} \right) + \\
 & \left. + \frac{\partial \hat{X}^1}{\partial b} \left(\frac{\partial^2 b_t}{\partial t \partial x_1} T'(x_1) + \frac{\partial^2 b_t}{\partial x_1^2} \right) \right] \Big|_{(T(x_1), x_1, 0)} + \\
 & + 2T'(x_1) T''(x_1) \left(\frac{\partial \hat{X}^1}{\partial a} \cdot \frac{\partial a_t}{\partial t} + \frac{\partial \hat{X}^1}{\partial b} \cdot \frac{\partial b_t}{\partial t} \right) \Big|_{(T(x_1), x_1, 0)} + \\
 & + T'(x_1)^2 \left[\frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial a_t}{\partial t} \left(\frac{\partial a_t}{\partial t} T'(x_1) + \frac{\partial a_t}{\partial x_1} \right) + \right. \\
 & + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a \partial b} \frac{\partial a_t}{\partial t} \left(\frac{\partial b_t}{\partial t} T'(x_1) + \frac{\partial b_t}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial \hat{X}^1}{\partial a} \left(\frac{\partial^2 a_t}{\partial t^2} T'(x_1) + \frac{\partial^2 a_t}{\partial x_1 \partial t} \right) + \\
 & + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial b^2} \frac{\partial b_t}{\partial t} \left(\frac{\partial b_t}{\partial t} T'(x_1) + \frac{\partial b_t}{\partial x_1} \right) + \\
 & \left. + \frac{\partial \hat{X}^1}{\partial b} \left(\frac{\partial^2 b_t}{\partial t^2} T'(x_1) + \frac{\partial^2 b_t}{\partial x_1 \partial t} \right) \right] \Big|_{(T(x_1), x_1, 0)} + \\
 & + T'''(x_1) \hat{X}^1(a_{T(x_1)}(x_1, 0), b_{T(x_1)}(x_1, 0)) + \\
 & + T''(x_1) \left[\frac{\partial \hat{X}^1}{\partial a} \frac{\partial a_t}{\partial t} \cdot T'(x_1) + \frac{\partial \hat{X}^1}{\partial a} \cdot \frac{\partial a_t}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{X}^1}{\partial b} \cdot \frac{\partial b_t}{\partial t} T'(x_1) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \hat{X}^1}{\partial b} \cdot \frac{\partial b_t}{\partial x_1} \right] \Big|_{(T(x_1), x_1, 0)}.
 \end{aligned}$$

При $x_1 = 0$ это уравнение можно значительно упростить. Относительно поля в точке $(0, 0)$ известно следующее:

$$a_t(0, 0) = b_t(0, 0) = 0 \text{ для всех } t, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial a_t}{\partial t}(0, 0) = \frac{\partial b_t}{\partial t}(0, 0) = 0, \quad (4.6)$$

$$d\hat{X}(a_t(0, 0), b_t(0, 0)) = d\hat{X}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & |\lambda(0)| \\ -|\lambda(0)| & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

$$d\hat{\Phi}_t(0, 0) = e^{td\hat{X}(0, 0)} = \begin{pmatrix} \cos|\lambda(0)|t & \sin|\lambda(0)|t \\ -\sin|\lambda(0)|t & \cos|\lambda(0)|t \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$$T(0) = \frac{2\pi}{|\lambda(0)|} \quad (4.9)$$

и

$$T'(0) = 0. \quad (4.10)$$

Доказательство (4.10). Пусть $S(x_1) = T(x_1, \mu(x_1))$. Тогда $S'(0) = 0$, потому что для данного малого $x > 0$ существует малое $y < 0$, такое, что $S(x) = S(y)$. Таким образом, $\frac{S(x) - S(0)}{x}$ и $\frac{S(y) - S(0)}{y}$ имеют противоположные знаки.

Выбирая $x_n \downarrow 0$, получаем требуемый результат. Далее, $S'(0) = \frac{\partial T}{\partial x_1}(0, 0) + \mu'(0) \frac{\partial T}{\partial \mu}(0, 0)$. Но $\mu'(0) = 0$, как было показано в доказательстве теоремы 3.1 (см. стр. 59). Поэтому

$$V''''(0) = \int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} \frac{\partial^3 \hat{X}^1}{\partial x_1^3}(a_t(x_1, 0), b_t(x_1, 0)) dt.$$

Вычисляя $\left. \frac{\partial^3 \hat{X}^1}{\partial x_1^3} \right|_{a_t(0, 0), b_t(0, 0)}$, будем иметь

$$\begin{aligned} V''''(0) &= \int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} \left[\frac{\partial^3 \hat{X}}{\partial a^3}(0, 0) \cos^3 |\lambda(0)|t - \frac{\partial^3 \hat{X}}{\partial b^3}(0, 0) \sin^3 |\lambda(0)|t + \right. \\ &\quad + 3 \frac{\partial^3 \hat{X}^1}{\partial a \partial b^2}(0, 0) \cos |\lambda(0)|t \sin^2 |\lambda(0)|t - \\ &\quad - 3 \frac{\partial^3 \hat{X}^1}{\partial a^2 \partial b}(0, 0) \cos^2 |\lambda(0)|t \sin |\lambda(0)|t + \\ &\quad + 3 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a^2}(0, 0) \frac{\partial^2 a_t}{\partial x_1^2}(0, 0) \cos |\lambda(0)|t - \\ &\quad - 3 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial b^2}(0, 0) \cdot \frac{\partial^2 b_t}{\partial x_1^2}(0, 0) \sin |\lambda(0)|t + \\ &\quad + 3 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a \partial b}(0, 0) \left(\frac{\partial^2 b_t}{\partial x_1^2}(0, 0) \cos |\lambda(0)|t - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 a_t}{\partial x_1^2}(0, 0) \sin |\lambda(0)|t \right) + |\lambda(0)| \frac{\partial^3 b_t}{\partial x_1^3}(0, 0) \left. \right] dt = \\ &= \int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} \left[3 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a^2}(0, 0) \frac{\partial^2 a_t}{\partial x_1^2}(0, 0) \cos |\lambda(0)|t - \right. \\ &\quad - 3 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial b^2}(0, 0) \frac{\partial^2 b_t}{\partial x_1^2}(0, 0) \sin |\lambda(0)|t + \\ &\quad + 3 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a \partial b}(0, 0) \left(\frac{\partial^2 b_t}{\partial x_1^2}(0, 0) \cos |\lambda(0)|t - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 a_t}{\partial x_1^2}(0, 0) \sin |\lambda(0)|t \right) + |\lambda(0)| \frac{\partial^3 b_t}{\partial x_1^3}(0, 0) \left. \right] dt. \end{aligned}$$

Чтобы получить формулу для $V'''(0)$, зависящую лишь от производных X в начале координат, мы должны выразить производные потока (например, $\frac{\partial^3 b_t}{\partial x_1^3}(0, 0)$) через производные поля X в точке $(0, 0)$. Это сделать можно потому, что начало координат является неподвижной точкой потока, порожденного векторным полем X . В силу важности этой идеи установим этот факт в более общем случае.

(4.1) **Теорема.** Пусть X — гладкое векторное поле класса C^k на R^n , такое, что $X(0) = 0$ (или $X(p) = 0$). Пусть φ_t — поток поля X . Тогда первые три (или первые j) производные φ_t в 0 могут быть вычислены через первые три (или первые j) производные векторного поля X в точке 0.

Доказательство. Рассмотрим $\frac{\partial \varphi_t^i}{\partial x_j}(0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi_t^i}{\partial x_j}(0) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_t^i}{\partial t}(0) = \frac{\partial}{\partial x_j} X^i \circ \varphi_t(0) = \frac{\partial X^i}{\partial x_k} \circ \varphi_t(0) \frac{\partial \varphi_t^k}{\partial x_j}(0) = \\ &= \frac{\partial X^i}{\partial x_k}(0) \frac{\partial \varphi_t^k}{\partial x_j}(0), \end{aligned}$$

потому что $\varphi_t(0) = 0$. Далее, $\frac{\partial \varphi_0^i}{\partial x_j}(0) = \delta_{ij}$, так как $\varphi_0(x) = x$ для всех x . Поэтому $d\varphi_t(0)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{\partial}{\partial t}(d\varphi_t(0)) = dX(0) \cdot d\varphi_t(0)$, и $d\varphi_0(0) = I$. Поэтому $d\varphi_t(0) = e^{t dX(0)}$.

Рассмотрим $\frac{\partial^2 \varphi_t^i}{\partial x_j \partial x_k}(0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi_t^i}{\partial x_j \partial x_k}(0) &= \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial \varphi_t^i}{\partial t}(0) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} X^i \circ \varphi_t(0) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial X^i}{\partial x_l} \circ \varphi_t \frac{\partial \varphi_t^l}{\partial x_k} \right)(0) = \\ &= \frac{\partial^2 X^i}{\partial x_p \partial x_l} \circ \varphi_t \frac{\partial \varphi_t^p}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_t^l}{\partial x_k} + \frac{\partial X^i}{\partial x_l} \circ \varphi_t \frac{\partial^2 \varphi_t^l}{\partial x_j \partial x_k}(0) = \\ &= \frac{\partial^2 X^i}{\partial x_p \partial x_l}(0) \frac{\partial \varphi_t^p}{\partial x_j}(0) \frac{\partial \varphi_t^l}{\partial x_k}(0) + \frac{\partial X^i}{\partial x_l}(0) \frac{\partial^2 \varphi_t^l}{\partial x_j \partial x_k}(0). \end{aligned}$$

Кроме того, $\frac{\partial^2 \varphi_0^l}{\partial x_j \partial x_k}(0) = 0$. Получили дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 \varphi_t^l}{\partial x_j \partial x_k}(0) = d^2 X(0) \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x_j}(0), \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_k}(0) \right) + dX(0) \cdot \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Его решением является

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x_j \partial x_k}(0) &= e^{t dX(0)} \int_0^t e^{-s dX(0)} d^2 X(0) \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j}(0), \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k}(0) \right) ds + \\ &+ e^{t dX(0)} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_j \partial x_k}(0), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x_j \partial x_k}(0) = e^{t dX(0)} \int_0^t e^{-s dX(0)} d^2 X(0) \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j}(0), \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_k}(0) \right) ds.$$

Наконец, рассмотрим $\frac{\partial^3 \varphi_t^l}{\partial x_j \partial x_k \partial x_h}(0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^3 \varphi_t^l}{\partial x_j \partial x_k \partial x_h} \right) (0) &= \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_k \partial x_h} \left(\frac{\partial \varphi_t^l}{\partial t} \right) (0) = \\ &= \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_k \partial x_h} X^i \circ \varphi_t(0) = \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\frac{\partial^2 X^i}{\partial x_p \partial x_l} \circ \varphi_t \frac{\partial \varphi_t^p}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_t^l}{\partial x_k} + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial X^i}{\partial x_l} \circ \varphi_t \frac{\partial^2 \varphi_t^l}{\partial x_j \partial x_k} \right) (0) = \left[\frac{\partial^3 X^i}{\partial x_p \partial x_l \partial x_q} \circ \varphi_t \frac{\partial \varphi_t^q}{\partial x_h} \frac{\partial \varphi_t^p}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_t^l}{\partial x_k} + \right. \\ &+ \frac{\partial^2 X^i}{\partial x_p \partial x_l} \circ \varphi_t \left(\frac{\partial^2 \varphi_t^p}{\partial x_j \partial x_h} \frac{\partial \varphi_t^l}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_t^p}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_t^l}{\partial x_k \partial x_h} \right) + \\ &+ \left. \frac{\partial^2 X^i}{\partial x_p \partial x_l} \circ \varphi_t \frac{\partial \varphi_t^p}{\partial x_h} \frac{\partial^2 \varphi_t^l}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial X^i}{\partial x_l} \circ \varphi_t \frac{\partial^3 \varphi_t^l}{\partial x_j \partial x_k \partial x_h} \right] (0) = \\ &= \frac{\partial^3 X^i}{\partial x_p \partial x_l \partial x_q}(0) \frac{\partial \varphi_t^q}{\partial x_h}(0) \frac{\partial \varphi_t^p}{\partial x_j}(0) \frac{\partial \varphi_t^l}{\partial x_k}(0) + \\ &+ \frac{\partial^2 X^i}{\partial x_p \partial x_l}(0) \left(\frac{\partial^2 \varphi_t^p}{\partial x_j \partial x_h}(0) \frac{\partial \varphi_t^l}{\partial x_k}(0) + \frac{\partial \varphi_t^p}{\partial x_j}(0) \frac{\partial^2 \varphi_t^l}{\partial x_k \partial x_h}(0) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial^2 \varphi_t^l}{\partial x_j \partial x_k}(0) \frac{\partial \varphi_t^p}{\partial x_h}(0) \right) + \frac{\partial X^i}{\partial x_l}(0) \frac{\partial^3 \varphi_t^l}{\partial x_j \partial x_k \partial x_h}(0). \end{aligned}$$

При этом $\frac{\partial^3 \varphi_0^i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_h}(0) = 0$. Следовательно, мы получили дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^3 \varphi_t^i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_h}(0) \right) = & d^3 X(0) \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x_j}(0), \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_k}(0), \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_h}(0) \right) + \\ & + d^2 X(0) \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x_k}(0), \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x_j \partial x_h}(0) \right) + d^2 X(0) \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x_j}(0), \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x_k \partial x_h}(0) \right) + \\ & + d^2 X(0) \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x_h}(0), \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x_j \partial x_k}(0) \right) + dX(0) \left(\frac{\partial^3 \varphi_t}{\partial x_j \partial x_k \partial x_h}(0) \right) \end{aligned}$$

и $\frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x_j \partial x_k \partial x_h}(0) = 0$. Его решением является следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \varphi_t}{\partial x_j \partial x_k \partial x_h}(0) = & e^{t dX(0)} \int_0^t e^{-s dX(0)} \left\{ d^3 X(0) \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x_j}(0), \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_k}(0), \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_h}(0) \right) + \right. \\ & + d^2 X(0) \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x_k}(0), \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x_j \partial x_h}(0) \right) + d^2 X(0) \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x_j}(0), \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x_k \partial x_h}(0) \right) + \\ & \left. + d^2 X(0) \left(\frac{\partial \varphi_t}{\partial x_h}(0), \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x_j \partial x_k}(0) \right) \right\} ds. \end{aligned}$$

В рассматриваемом нами случае

$$d\hat{X}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & |\lambda(0)| \\ -|\lambda(0)| & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{и поэтому } d\hat{\varphi}_t(0, 0) = \begin{pmatrix} \cos |\lambda(0)|t & \sin |\lambda(0)|t \\ -\sin |\lambda(0)|t & \cos |\lambda(0)|t \end{pmatrix}.$$

Мы хотим вычислить

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}_t^{\bar{a}}}{\partial x_1^2}(0, 0) = \left(\frac{\partial^2 a_t}{\partial x_1^2}(0, 0), \frac{\partial^2 b_t}{\partial x_1^2}(0, 0) \right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3 b_t}{\partial x_1^3}(0, 0).$$

Заметим сначала, что $e^{-s dX(0)} = e^{-s \begin{pmatrix} 0 & |\lambda(0)| \\ -|\lambda(0)| & 0 \end{pmatrix}} =$
 $= \begin{pmatrix} \cos |\lambda(0)|s & -\sin |\lambda(0)|s \\ \sin |\lambda(0)|s & \cos |\lambda(0)|s \end{pmatrix}$. Далее,

$$\begin{aligned} d^2\hat{X}(0) \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_s}{\partial x_1}(0), \frac{\partial \hat{\Phi}_s}{\partial x_1}(0) \right) &= \left(\frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2}(0, 0) \cos^2 |\lambda(0)|s - \right. \\ &\quad - 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) \cos |\lambda(0)|s \cdot \sin |\lambda(0)|s + \\ &\quad + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2}(0, 0) \sin^2 |\lambda(0)|s, \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1^2}(0, 0) \cos^2 |\lambda(0)|s - \\ &\quad - 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) \cos |\lambda(0)|s \cdot \sin |\lambda(0)|s + \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2}(0, 0) \sin^2 |\lambda(0)|s \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} e^{-s d\hat{X}(0)} d^2\hat{X}(0) \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_s}{\partial x_1}(0), \frac{\partial \hat{\Phi}_s}{\partial x_1}(0) \right) &= \\ &= \left[\frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2}(0) \cos^3 |\lambda(0)|s - \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2}(0) \sin^3 |\lambda(0)|s + \right. \\ &\quad + \left(-2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1 \partial x_2}(0) - \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1^2}(0) \right) \sin |\lambda(0)|s \cdot \cos^2 |\lambda(0)|s + \\ &\quad + \left(2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1 \partial x_2}(0) + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2}(0) \right) \cos |\lambda(0)|s \cdot \sin^2 |\lambda(0)|s, \\ &\quad + \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1^2}(0) \cos^3 |\lambda(0)|s + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2}(0) \sin^3 |\lambda(0)|s + \\ &\quad + \left(-2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1 \partial x_2}(0) + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2}(0) \right) \sin |\lambda(0)|s \cdot \cos^2 |\lambda(0)|s + \\ &\quad \left. + \left(-2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1 \partial x_2}(0) + \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2}(0) \right) \cos |\lambda(0)|s \cdot \sin^2 |\lambda(0)|s \right] \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t e^{-s d\hat{X}(0)} d^2\hat{X}(0) \left(\frac{\partial \hat{\phi}_s}{\partial x_1}(0), \frac{\partial \hat{\phi}_s}{\partial x_1}(0) \right) ds = \\
 & = \frac{1}{3|\lambda(0)|} \left[\left(-2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1^2} \right) + 3 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2} \sin|\lambda(0)|t + \right. \\
 & + 3 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2} \cos|\lambda(0)|t + \left(-\frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2} \right) \sin^3|\lambda(0)|t + \\
 & + \left(-\frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1^2} \right) \cos^3|\lambda(0)|t, \\
 & \left(2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2} \right) + 3 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2} \sin|\lambda(0)|t - \\
 & - 3 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2} \cos|\lambda(0)|t + \left(-\frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2} \right) \sin^3|\lambda(0)|t + \\
 & \left. + \left(\frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2} \right) \cos^3|\lambda(0)|t \right]
 \end{aligned}$$

(где все производные вычислены в начале координат).

Собирая все вместе, получим

$$\begin{aligned}
 & e^{t d\hat{X}(0)} \int_0^t e^{-s d\hat{X}(0)} d^2\hat{X}(0) \left(\frac{\partial \hat{\phi}_s}{\partial x_1}(0), \frac{\partial \hat{\phi}_s}{\partial x_1}(0) \right) ds = \\
 & = \left(\frac{\partial^2 a_t}{\partial x_1^2}(0), \frac{\partial^2 b_t}{\partial x_1^2}(0) \right) = \\
 & = \frac{1}{3|\lambda(0)|} \left[\left(-2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1^2} \right) \cos|\lambda(0)|t + \right. \\
 & + \left(2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2} \right) \sin|\lambda(0)|t + \\
 & + \left(3 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2} - 3 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2} \right) \sin|\lambda(0)|t \cdot \cos|\lambda(0)|t + \\
 & + 3 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2} \cos^2|\lambda(0)|t + 3 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1^2} \sin^2|\lambda(0)|t + \\
 & \left. + \left(-\frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2} \right) \cos|\lambda(0)|t \cdot \sin^3|\lambda(0)|t + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2} \right) \sin |\lambda(0)|t \cdot \cos^3 |\lambda(0)|t + \\
& + \left(-\frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1^2} \right) \cos^4 |\lambda(0)|t + \\
& + \left(-\frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2} \right) \sin^4 |\lambda(0)|t, \\
& \left(2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2} \right) \cos |\lambda(0)|t + \\
& + \left(2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1^2} \right) \sin |\lambda(0)|t + \\
& + \left(3 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1^2} - 3 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2} \right) \sin |\lambda(0)|t \cdot \cos |\lambda(0)|t - \\
& - 3 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2} \sin^2 |\lambda(0)|t - 3 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2} \cos^2 |\lambda(0)|t + \\
& + \left(\frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1^2} \right) \sin |\lambda(0)|t \cdot \cos^3 |\lambda(0)|t + \\
& + \left(-\frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2} \right) \cos |\lambda(0)|t \cdot \sin^3 |\lambda(0)|t + \\
& + \left(\frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2} \right) \sin^4 |\lambda(0)|t + \\
& + \left(\frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2} \right) \cos^4 |\lambda(0)|t.
\end{aligned}$$

Перед вычислением $\frac{\partial^3 b_t}{\partial x_1^3}(0)$ (являющимся очень громоздким)

используем полученную выше информацию, чтобы упростить выражение для $V'''(0)$. Чтобы это сделать, мы должны считать:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} \frac{\partial^2 a_t}{\partial x_1^2}(0, 0) \cos |\lambda(0)|t \cdot dt, \\
& \int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} \frac{\partial^2 a_t}{\partial x_1^2}(0, 0) \sin |\lambda(0)|t \cdot dt, \\
& \int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} \frac{\partial^2 b_t}{\partial x_1^2}(0, 0) \cdot \cos |\lambda(0)|t \cdot dt
\end{aligned}$$

и

$$\int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} \frac{\partial^2 b_t}{\partial x_1^2} (0, 0) \cdot \sin |\lambda(0)| t dt.$$

Результаты этого вычисления следующие:

$$\int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} \frac{\partial^2 a_t}{\partial x_1^2} (0, 0) dt = \frac{\pi}{|\lambda(0)|^2} \left[\frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial b^2} \right].$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} \frac{\partial^2 a_t}{\partial x_1^2} (0, 0) \cos |\lambda(0)| t dt = \\ = \frac{\pi}{3|\lambda(0)|^2} \left(2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial b^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a^2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} \frac{\partial^2 a_t}{\partial x_1^2} (0, 0) \sin |\lambda(0)| t dt = \\ = \frac{\pi}{3|\lambda(0)|^2} \left(2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial b^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a^2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} \frac{\partial^2 b_t}{\partial x_1^2} (0, 0) \cos |\lambda(0)| t dt = \\ = \frac{\pi}{3|\lambda(0)|^2} \left(2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial b^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a^2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} \frac{\partial^2 b_t}{\partial x_1^2} (0, 0) \sin |\lambda(0)| t dt = \\ = \frac{\pi}{3|\lambda(0)|^2} \left(2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial b^2} + 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a^2} \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} V'''(0) = |\lambda(0)| \int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} \frac{\partial^3 b_t}{\partial x_1^3} (0, 0) dt + \\ + 3 \int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} \left\{ \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a^2} (0, 0) \frac{\partial^2 a_t}{\partial x_1^2} (0, 0) \cos |\lambda(0)| t - \right. \\ - \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial b^2} (0, 0) \frac{\partial^2 b_t}{\partial x_1^2} (0, 0) \sin |\lambda(0)| t + \\ + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a \partial b} (0, 0) \left[\frac{\partial^2 b_t}{\partial x_1^2} (0, 0) \cos |\lambda(0)| t - \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial^2 a_t}{\partial x_1^2} (0, 0) \sin |\lambda(0)| t \right] \right\} dt, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}
 V''''(0) &= |\lambda(0)| \int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} \frac{\partial^3 b_t}{\partial x_1^3}(0, 0) dt + \\
 &+ \frac{\pi}{|\lambda(0)|^2} \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a^2} \left(-2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial b^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a^2} \right) + \\
 &+ \frac{\pi}{|\lambda(0)|^2} \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial b^2} \left(-2 \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial b^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a \partial b} - \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a^2} \right) = \\
 &= |\lambda(0)| \int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} \frac{\partial^3 b_t}{\partial x_1^3}(0, 0) dt - \\
 &- \frac{\pi}{|\lambda(0)|^2} \left(2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial b^2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a^2} + 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a \partial b} + \right. \\
 &+ \left. 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial b^2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a^2} + 2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial b^2} \cdot \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial b^2} \right),
 \end{aligned}$$

где все производные взяты в начале координат. Чтобы вычислить $\frac{\partial^3 b_t}{\partial x_1^3}(0, 0)$, нам нужно пользоваться уравнением

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^3 a_t}{\partial x_1^3}(0, 0), \frac{\partial^3 b_t}{\partial x_1^3}(0, 0) \right) &= \\
 &= e^{t d\hat{X}(0)} \int_0^t e^{-s d\hat{X}(0)} \left\{ d^3 \hat{X}(0) \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_s}{\partial x_1}(0, 0), \frac{\partial \hat{\Phi}_s}{\partial x_1}(0, 0), \frac{\partial \hat{\Phi}_s}{\partial x_1}(0, 0) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 3 d^2 \hat{X}(0) \left(\frac{\partial \hat{\Phi}_s}{\partial x_1}(0, 0), \frac{\partial^2 \hat{\Phi}_s}{\partial x_1^2}(0, 0) \right) \right\} ds.
 \end{aligned}$$

Вычисления являются чрезвычайно длинными¹⁾, но простыми, поэтому мы укажем, как их проводить, и приведем окончательные результаты. После очень длинных вычислений по-

¹⁾ Мы не шутим! Чтобы выполнить предыдущие вычисления, нужно быть готовым к потере нескольких дней. Детали могут быть высланы, но лишь по серьезному поводу.

лучим

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} e^{t d\hat{X}(0)} \int_0^t e^{-s d\hat{X}(0)} d^2 \hat{X}(0) \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} (0) \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x_1^2} (0, 0) \right) ds dt = \\
 & = \left(\text{нечто, } \frac{2\pi}{|\lambda(0)|^3} \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2} + \frac{5\pi}{4|\lambda(0)|^3} \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1 \partial x_2} + \right. \\
 & + \frac{7\pi}{4|\lambda(0)|^3} \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1^2} + \frac{5\pi}{4|\lambda(0)|^3} \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2} + \\
 & + \frac{3\pi}{4|\lambda(0)|^3} \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1^2} + \frac{5\pi}{4|\lambda(0)|^3} \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2} + \\
 & \left. + \frac{\pi}{|\lambda(0)|^3} \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1^2} + \frac{3\pi}{4|\lambda(0)|^3} \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial x_2^2} \right) \text{ (в точке } (0, 0)).
 \end{aligned}$$

и легко видеть, что

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} e^{t d\hat{X}(0)} \int_0^t e^{-s d\hat{X}(0)} d^3 \hat{X}(0) \times \\
 & \times \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} (0, 0), \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} (0, 0), \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_1} (0, 0) \right) ds dt = \\
 & = \frac{3\pi}{4|\lambda(0)|^2} \left(\frac{\partial^3 \hat{X}^1}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 \hat{X}^1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 \hat{X}^1}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 \hat{X}^2}{\partial x_2^3} \right).
 \end{aligned}$$

Поэтому конечный результат следующий:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi/|\lambda(0)|} \frac{\partial^3 b_t}{\partial x_1^3} (0, 0) dt = \\
 & = \frac{3\pi}{4|\lambda(0)|^2} \left(\frac{\partial^3 \hat{X}^1}{\partial a^3} (0, 0) + \frac{\partial^3 \hat{X}^1}{\partial a \partial b^2} (0, 0) + \frac{\partial^3 \hat{X}^2}{\partial a^2 \partial b} (0, 0) + \frac{\partial^3 \hat{X}^2}{\partial b^3} (0, 0) \right) + \\
 & + \frac{\pi}{|\lambda(0)|^3} \left(2 \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a^2} (0, 0) \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial b^2} (0, 0) + \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial b^2} (0, 0) \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a^2} (0, 0) + \right. \\
 & + \frac{5}{4} \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a^2} (0, 0) \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a \partial b} (0, 0) + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial b^2} (0, 0) \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a \partial b} (0, 0) + \\
 & + \frac{7}{4} \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a^2} (0, 0) \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a^2} (0, 0) + \frac{5}{4} \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial b^2} (0, 0) \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial b^2} (0, 0) + \\
 & \left. + \frac{5}{4} \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a \partial b} (0, 0) \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial b^2} (0, 0) + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a \partial b} (0, 0) \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a^2} (0, 0) \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили искомую формулу.

(4.2) Формула [5]

$$\begin{aligned}
 V''''(0) = & \frac{3\pi}{4|\lambda(0)|} \left(\frac{\partial^3 \hat{X}^1}{\partial a^3}(0, 0) + \frac{\partial^3 \hat{X}^1}{\partial a \partial b^2}(0, 0) + \right. \\
 & + \frac{\partial^3 \hat{X}^2}{\partial a^2 \partial b}(0, 0) + \left. \frac{\partial^3 \hat{X}^2}{\partial b^3}(0, 0) \right) + \\
 & + \frac{3\pi}{4|\lambda(0)|^2} \left(-\frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a^2}(0, 0) \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a \partial b}(0, 0) + \right. \\
 & + \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial b^2}(0, 0) \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a \partial b}(0, 0) + \\
 & + \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a^2}(0, 0) \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a \partial b}(0, 0) - \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial b^2}(0, 0) \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a \partial b}(0, 0) + \\
 & + \left. \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial a^2}(0, 0) \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial a^2}(0, 0) - \frac{\partial^2 \hat{X}^1}{\partial b^2}(0, 0) \frac{\partial^2 \hat{X}^2}{\partial b^2}(0, 0) \right).
 \end{aligned}$$

В двумерном случае, когда $X = \hat{X}$, она может быть непосредственно использована для проверки условий устойчивости, правда, если $d\hat{X}_0(0, 0)$ имеет вид, как в (4.4).

**Определение условий устойчивости
через коэффициенты поля X**

Воспользуемся уравнением

$$\begin{aligned}
 X_\mu^3(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu)) = & d_1 f(x_1, x_2, \mu) \circ X^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu)) + \\
 & + d_2 f(x_1, x_2, \mu) \circ X^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2, \mu)),
 \end{aligned}$$

справедливым в окрестности точки $(0, 0, 0, 0)$, для того, чтобы вычислить производные поля $\hat{X}_0$ в точке $(0, 0)$ через производные X_0 в точке $(0, 0, 0)$. Так как дифференцирование производится при фиксированном μ , то писать μ в формулах не будем. После дифференцирования уравнения по x_1 и x_2 получаем

$$\begin{aligned}
 d_1 X^3(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) + d_3 X^3(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \circ d_1 f(x_1, x_2) = \\
 = d_1 d_1 f(x_1, x_2) \circ X^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) + \\
 + d_1 f(x_1, x_2) \circ d_1 X^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) + \\
 + d_1 f(x_1, x_2) \circ d_3 X^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \circ d_1 f(x_1, x_2) + \\
 + d_1 d_2 f(x_1, x_2) \circ X^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) + \\
 + d_2 f(x_1, x_2) \circ d_1 X^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) + \\
 + d_2 f(x_1, x_2) \circ d_3 X^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \circ d_1 f(x_1, x_2)
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& d_2 X^3(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) + d_3 X^3(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \circ d_2 f(x_1, x_2) = \\
& = d_2 d_2 f(x_1, x_2) \circ X^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) + \\
& + d_2 f(x_1, x_2) \circ d_2 X^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) + \\
& + d_2 f(x_1, x_2) \circ d_3 X^2(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \circ d_2 f(x_1, x_2) + \\
& + d_1 d_2 f(x_1, x_2) \circ X^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) + \\
& + d_1 f(x_1, x_2) \circ d_2 X^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) + \\
& + d_1 f(x_1, x_2) \circ d_3 X^1(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \circ d_2 f(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Продифференцируем теперь первое уравнение по x_1 и x_2 , а второе — только по x_2 . Получим три выражения. Эти выражения легко записать в точке $x_1 = x_2 = 0$, в которой $f = df = 0$ и

$$dX = \begin{pmatrix} 0 & |\lambda(0)| & 0 \\ -|\lambda(0)| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 X^3 \end{pmatrix}.$$

В результате такой процедуры получим

$$\begin{aligned}
d_1 d_1 X^3(0, 0, 0) + d_3 X^3(0, 0, 0) \circ d_1 d_1 f(0, 0) = \\
= -2|\lambda(0)| d_1 d_2 f(0, 0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 d_2 X^3(0, 0, 0) + d_3 X^3(0, 0, 0) \circ d_1 d_2 f(0, 0) = \\
= |\lambda(0)| d_1 d_1 f(0, 0) - |\lambda(0)| d_2 d_2 f(0, 0),
\end{aligned}$$

$$d_2 d_2 X^3(0, 0, 0) + d_3 X^3(0, 0, 0) \circ d_2 d_2 f(0, 0) = 2|\lambda(0)| d_1 d_2 f(0, 0),$$

т. е.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} d_3 X^3(0, 0, 0) & 2|\lambda(0)| & 0 \\ -|\lambda(0)| & d_3 X^3(0, 0, 0) & |\lambda(0)| \\ 0 & -2|\lambda(0)| & d_3 X^3(0, 0, 0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 d_1 f(0, 0) \\ d_1 d_2 f(0, 0) \\ d_2 d_2 f(0, 0) \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} -d_1 d_1 X^3(0, 0, 0) \\ -d_1 d_2 X^3(0, 0, 0) \\ -d_2 d_2 X^3(0, 0, 0) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(см. формулу 4А.6 для $d_i d_j f$, полученную обращением стоящей слева 3×3 матрицы). Так как определитель этой матрицы равен $d_3 X^3(0, 0, 0) (d_3 X^3(0, 0, 0)^2 + 4|\lambda(0)|^2)$ и так как из включений $\sigma(d_3 X^3(0, 0, 0)) \subset \sigma(dX(0, 0, 0)) \subset \{z | \operatorname{Re} z < 0\} \cup \{\lambda(0), \overline{\lambda(0)}\}$ следует, что и $d_3 X^3(0, 0, 0)$, и $d_3 X^3(0, 0, 0)^2 + 4|\lambda(0)|^2 = (d_3 X^3(0, 0, 0) + 2|\lambda(0)|i)(d_3 X^3(0, 0, 0) - 2|\lambda(0)|i)$ не обращаются в нуль, то матрица обратима.

Наконец, мы должны выразить первые три производных поля $\hat{X}_0$ в точке $(0,0)$ через производные поля X_0 в точке $(0,0,0)$. Напомним, что

$$\hat{X}^i(x_1, x_2) = X^i(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \quad \text{для } i = 1, 2,$$

$$d_j \hat{X}^i(x_1, x_2) =$$

$$= d_j X^i(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) + d_3 X^i(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \circ d_j f(x_1, x_2).$$

для $i, j = 1, 2$ и

$$d\hat{X}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & |\lambda(0)| \\ -|\lambda(0)| & 0 \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя дальше, получим

$$\begin{aligned} d_k d_j \hat{X}^i(x_1, x_2) &= d_k d_j X^i(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) + \\ &+ d_3 d_j X^i(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \circ d_k f(x_1, x_2) + \\ &+ d_k d_3 X^i(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \circ d_j f(x_1, x_2) + \\ &+ d_3 d_3 X^i(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \circ d_k f(x_1, x_2) \circ d_j f(x_1, x_2) + \\ &+ d_3 X^i(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \circ d_k d_j f(x_1, x_2), \quad i, j, k = 1, 2. \end{aligned}$$

Вычисляя при $t = 0$, видим, что

$$d_k d_j \hat{X}^i(0, 0) = d_k d_j X^i(0, 0, 0), \quad i, j, k = 1, 2.$$

Дифференцируя еще раз и вычисляя в точке 0, получим

$$\begin{aligned} d_l d_k d_j \hat{X}^i(0, 0) &= d_l d_k d_j X^i(0, 0, 0) + d_3 d_j X^i(0, 0, 0) \circ d_l d_k f(0, 0) + \\ &+ d_k d_3 X^i(0, 0, 0) \circ d_l d_j f(0, 0) + \\ &+ d_l d_3 X^i(0, 0, 0) \circ d_k d_j f(0, 0), \quad i, j, k = 1, 2. \end{aligned}$$

Теперь это можно подставить в предыдущее соотношение и получить явное выражение для $V'''(0)$ в точке p .

Ниже в главе 4А мы оформим полученные результаты в виде алгоритма, так что не нужно будет каждый раз прокручивать всю процедуру.

(4.3) *Упражнение.* В упражнении 1.16 дается анализ устойчивости для бифуркации рождения пары неподвижных точек. В этом доказательстве используется представление $f(\alpha, 0) = \alpha + A\alpha^3 + \dots$ и показывается, что при $A < 0$ осуществляется суперкритическая бифуркация и имеется устойчивость, а при $A > 0$ осуществляется субкритическая бифуркация и имеет место неустойчивость. Получить явную формулу для A и применить ее к примеру шарика в обруче (см. Рюэль и Такенс [1], стр. 189—191).

Глава 4А

АЛГОРИТМ ПРИМЕНЕНИЯ ФОРМУЛЫ УСТОЙЧИВОСТИ

Вычисления, проведенные выше, возможно, являются немногим громоздкими, однако они не сложны. Здесь мы подытожим результаты этих вычислений в виде некоего специального алгоритма, который можно применить к каждому конкретному векторному полю. В двумерном случае алгоритм заканчивает работу очень быстро, в общем случае — времени требуется значительно больше. Примеры будут приведены в следующей главе 4В.

Устойчивость определяется знаком $V'''(0)$; таким образом, объектом наших вычислений должно служить именно это число. Будем предполагать, что задача вычисления спектра линеаризованных уравнений уже решена.

Перед тем как перейти к вычислению $V'''(0)$, напомним, с чего мы начинали.

Пусть $X_\mu: E \rightarrow E$ — векторное поле класса C^k ($k \geq 5$) на банаховом пространстве E (если X_μ — векторное поле на многообразии, то при вычислении условий устойчивости всегда можно считать, что мы работаем с фиксированной локальной картой). Предположим, что $X_\mu(a(\mu)) = 0$ для всех μ , и пусть спектр $\sigma(dX_\mu(a(\mu)))$ удовлетворяет следующим условиям: $\sigma(dX_\mu(a(\mu))) \subset \{z | \operatorname{Re} z < 0\}$ для $\mu < \mu_0$, $dX_\mu(a(\mu))$ имеет два комплексно-сопряженных простых собственных значения $\lambda(\mu)$ и $\overline{\lambda(\mu)}$. При $\mu = \mu_0$ $\lambda(\mu)$ и $\overline{\lambda(\mu)}$ пересекает мнимую ось с ненулевой скоростью и $\lambda(\mu_0) \neq 0$. Остальная часть спектра лежит в левой полуплоскости и отделена от мнимой оси.

І. При этих условиях:

(А) Имеет место бифуркация периодических траекторий, описанная в теореме 3.1.

Выберем такие координаты, в которых $X_{\mu_0} = (X_{\mu_0}^1, X_{\mu_0}^2, X_{\mu_0}^3)$, где $X_{\mu_0}^1$ и $X_{\mu_0}^2$ — координаты поля в пространстве, соответствующем $\lambda(\mu_0)$ и $\overline{\lambda(\mu_0)}$, а $X_{\mu_0}^3$ — координата в некотором дополнительном подпространстве, подобранном таким обра-

зом, чтобы ¹⁾

$$dX_{u_0}a(\mu_0) = \begin{pmatrix} 0 & |\lambda(\mu_0)| & 0 \\ -|\lambda(\mu_0)| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 X_{\mu_0}^3(a(\mu_0)) \end{pmatrix}. \quad (4A.1)$$

(В) Если коэффициент $V'''(0)$, вычисляемый в п. II ниже, отрицателен, то периодическая траектория рождается при $\mu > \mu_0$ и является притягивающей. Если $V'''(0) > 0$, то периодическая орбита возникает при $\mu < \mu_0$, является отталкивающей на центральном многообразии и, следовательно, неустойчива в целом.

(С) Если $V'''(0) = 0$, то мы ничего не можем сказать и должны для вычисления $V^{(5)}(0)$ использовать процедуру, описанную в гл. 4. Желаем удачи!

II. Выпишем полностью выражение для $V'''(0)$:

$$\begin{aligned} V'''(0) = & \frac{3\pi}{4|\lambda(\mu_0)|} \left(\frac{\partial^3 \hat{X}_{\mu_0}^1}{\partial x_1^3}(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) + \right. \\ & + \frac{\partial^3 \hat{X}_{\mu_0}^1}{\partial x_1 \partial x_2^2}(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) + \frac{\partial^3 \hat{X}_{\mu_0}^2}{\partial x_1^2 \partial x_2}(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) + \\ & \left. + \frac{\partial^3 \hat{X}_{\mu_0}^2}{\partial x_2^3}(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) \right) + \\ & + \frac{3\pi}{4|\lambda(\mu_0)|^2} \left(- \frac{\partial \hat{X}_{\mu_0}^1}{\partial x_1^2}(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) \frac{\partial^2 \hat{X}_{\mu_0}^1}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) + \right. \\ & + \frac{\partial^2 X_{\mu_0}^2}{\partial x_2^2}(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) \cdot \frac{\partial^2 X_{\mu_0}^2}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) + \\ & + \frac{\partial^2 X_{\mu_0}^2}{\partial x_1^2}(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) \cdot \frac{\partial^2 X_{\mu_0}^2}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) - \\ & - \frac{\partial^2 X_{\mu_0}^1}{\partial x_2^2}(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) \cdot \frac{\partial^2 X_{\mu_0}^1}{\partial x_1 \partial x_2}(a_2(\mu_0), a_2(\mu_0)) + \\ & + \frac{\partial^2 X_{\mu_0}^1}{\partial x_1^2}(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) \cdot \frac{\partial^2 X_{\mu_0}^2}{\partial x_1^2}(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) - \\ & \left. - \frac{\partial^2 X_{\mu_0}^1}{\partial x_2^2}(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) \cdot \frac{\partial^2 X_{\mu_0}^2}{\partial x_2^2}(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) \right). \quad (4A.2) \end{aligned}$$

¹⁾ См. примеры 4B.2 и 4B.8. Для нахождения указанной системы координат имеются вычислительные программы. См., например: A program to Compute the Real Schur Form of a Real Square Matrix by B. N. Parlett and R. Feldman; ERL Memorandum M 526 (1975). Univ. of Calif., Berkeley.

(А) Если рассматриваемое пространство двумерно, то $\hat{X}^1 = X^1$, $\hat{X}^2 = X^2$, т. е. вычисление $V'''(0)$ уже сделано, а результаты сформулированы в п. I. В противном случае нужно выполнить шаг В.

(В) В выражении (4А.2) распишем

$$d_j \hat{X}_{\mu_0}^i(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) = d_j X_{\mu_0}^i(a(\mu_0)) \quad \text{для } i, j = 1, 2, \quad (4A.3)$$

$$d_k d_j \hat{X}_{\mu_0}^i(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) = d_k d_j X_{\mu_0}^i(a(\mu_0)) \quad \text{для } i, j, k = 1, 2 \quad (4A.4)$$

и

$$\begin{aligned} d_l d_k d_j \hat{X}_{\mu_0}^i(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) &= d_l d_k d_j X_{\mu_0}^i(a(\mu_0)) + \\ &+ d_3 d_l X_{\mu_0}^i(a(\mu_0)) \circ d_l d_k f(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) + \\ &+ d_3 d_k X_{\mu_0}^i(a(\mu_0)) \circ d_l d_j f(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) + \\ &+ d_3 d_l X_{\mu_0}^i(a(\mu_0)) \circ d_k d_j f(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) \end{aligned} \quad (4A.5)$$

для $i, j, k, l = 1, 2$.

(С) Выразим теперь $d_i d_j f$:

$$\begin{pmatrix} d_1 d_1 f(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) \\ d_1 d_2 f(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) \\ d_2 d_2 f(a_1(\mu_0), a_2(\mu_0)) \end{pmatrix} =$$

$$= \Delta^{-1} \begin{bmatrix} 2|\lambda(\mu_0)|^2 + (d_3 X_{\mu_0}^3(a(\mu_0)))^2 & -2|\lambda(\mu_0)| d_3 X_{\mu_0}^3(a(\mu_0)) \\ |\lambda(\mu_0)| d_3 X_{\mu_0}^3(a(\mu_0)) & (d_3 X_{\mu_0}^3(a(\mu_0)))^2 \\ 2|\lambda(\mu_0)|^2 & 2|\lambda(\mu_0)| d_3 X_{\mu_0}^3(a(\mu_0)) \\ 2|\lambda(\mu_0)|^2 & -|\lambda(\mu_0)| d_3 X_{\mu_0}^3(a(\mu_0)) \\ 2|\lambda(\mu_0)|^2 + (d_3 X_{\mu_0}^3(a(\mu_0)))^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -d_1 d_1 X_{\mu_0}^3(a(\mu_0)) \\ -d_1 d_2 X_{\mu_0}^3(a(\mu_0)) \\ -d_2 d_2 X_{\mu_0}^3(a(\mu_0)) \end{pmatrix}, \quad (4A.6)$$

где $\Delta = (d_3 X_{\mu_0}^3(a(\mu_0))) ((d_3 X_{\mu_0}^3(a(\mu_0)))^2 + 4|\lambda(0)|^2)$. (Заметим, что если X^3 линейно, то все производные f равны нулю.)

(D) Если эти выкладки проделаны правильно, то $V'''(0)$ выразится через известные величины и в каждом конкретном случае будет известным действительным числом, после чего останется объяснить результаты.

Замечание. Недавно С. Ван получил формулу устойчивости, используя комплексные обозначения, что несколько проще. Кроме того, такой подход позволяет получить информацию о периоде (он тесно связан с выражением $\beta_0 + ia_0 b_0$ из гл. 3С; устойчивости определяется его действительной частью, а период — мнимой частью). Эти формулы запрограммированы, и на их основе сделана интересная численная работа Б. Хассаром (SUNY в Буффало).

Глава 4В

ПРИМЕРЫ

Применение изложенной теории продемонстрируем на нескольких примерах. Сначала мы приведем несколько простых примеров, предназначенных лишь для иллюстрации основных моментов. Закончим же мы довольно сложным примером 4В.8 из механики жидкости (уравнениями Лоренца).

(4В.1) *Пример* (происхождение примера см. Хирш и Смейл [1], гл. 10, и Зиман [2]). Рассмотрим дифференциальное уравнение $\ddot{x} + \dot{x}^3 - a\dot{x} + x = 0$, являющееся частным случаем уравнения Льенара. Перед тем как применять теорему Хопфа, преобразуем уравнение в систему дифференциальных уравнений на $\mathbb{R}^2$. Пусть $y = \dot{x}$. Тогда получим систему

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -y^3 + ay - x.$$

Пусть $X_a(x, y) = (y, -y^3 + ay - x)$. Тогда $X_a(0, 0) = 0$ для всех a и

$$dX_a(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

Собственные значения дифференциала равны $\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$. Будем рассматривать те a , для которых $|a| < 2$. В этом случае $\text{Im } \lambda(a) \neq 0$, где $\lambda(a) = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} = \frac{a}{2} + i \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2}$. Притом для $-2 < a < 0$ $\text{Re } \lambda(a) < 0$, для $a = 0$ $\text{Re } \lambda(a) = 0$, а для $0 < a < 2$ $\text{Re } \lambda(a) > 0$ и $\left. \frac{d(\text{Re } \lambda(a))}{da} \right|_{a=0} = \frac{1}{2}$. Следовательно, можно применять теорему Хопфа, из которой заключаем, что существует однопараметрическое семейство замкнутых орбит поля $X = (X_a, 0)$ в окрестности точки $(0, 0, 0)$. Чтобы выяснить, являются ли эти орбиты устойчивыми и существуют ли они при $a > 0$, рассмотрим векторное поле X_a при $a = 0$ вида

$$X_0(x, y) = (y, -y^3 - x); \quad \text{здесь } dX_0(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda(0) = i.$$

Напомним, что для использования формулы устойчивости, полученной в предыдущей главе, нам необходимо выбрать такие координаты, в которых

$$dX_0(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{Im} \lambda(0) \\ -\operatorname{Im} \lambda(0) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, уже исходные координаты подходят для вычислений (пример, где это не так, будет приведен ниже).

Вычислим частные производные до третьего порядка поля X_0 в точке $(0, 0)$:

$$\frac{\partial^n X^1}{\partial x^j \partial y^{n-j}}(0, 0) = 0 \text{ для всех } n > 1, \text{ так как } X^1(x, y) = y.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X^2}{\partial x_1^2}(0, 0) &= 0, & \frac{\partial^2 X^2}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) &= 0, & \frac{\partial^2 X^2}{\partial x_2^2}(0, 0) &= 0, \\ \frac{\partial^3 X^2}{\partial x_1^3}(0, 0) &= 0, & \frac{\partial^3 X^2}{\partial x_1^2 \partial x_2}(0, 0) &= 0, & \frac{\partial^3 X^2}{\partial x_1 \partial x_2^2}(0, 0) &= 0, \\ & & \frac{\partial^3 X^2}{\partial x_2^3}(0, 0) &= -6. \end{aligned}$$

Таким образом, $V'''(0) = \frac{3\pi}{4}(-6) < 0$, и, следовательно, периодические орбиты устойчивы, а бифуркация происходит выше порога критичности ($a > 0$).

(4В.2) *Пример.* Рассмотрим на $\mathbb{R}^2$ векторное поле

$$X_\mu(x, y) = (x + y, -x^3 - x^2y + (\mu - 2)x + (\mu - 1)y),$$

тогда $X_\mu(0, 0) = 0$ и

$$dX_\mu(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu - 2 & \mu - 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы суть $\frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2} = \frac{\mu \pm i\sqrt{4 - \mu^2}}{2}$. Пусть $-1 < \mu < 1$, тогда бифуркация рожде-

ния цикла происходит при $\mu = 0$ и осуществляется с $\operatorname{Im} \lambda(0) = 1$. Рассмотрим $X_0(x, y) = (x + y, -x^3 - x^2y - 2x - y)$. Дифференциал $dX_0(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, как видим,

не имеет требуемой формы. Мы должны отыскать такие координаты, в которых $dX_0(0, 0)$ имел бы вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, т. е.

мы должны найти такие векторы $\hat{e}_1$ и $\hat{e}_2$, что $dX_0(0, 0)\hat{e}_1 = -\hat{e}_2$ и $dX_0(0, 0)\hat{e}_2 = \hat{e}_1$. Векторы $\hat{e}_1 = (1, -1)$ и $\hat{e}_2 = (0, 1)$

как раз таковы. (Процедура нахождения $\hat{e}_1$ и $\hat{e}_2$ сводится к нахождению комплексных собственных векторов α и $\bar{\alpha}$, после чего берется $\hat{e}_1 = \alpha + \bar{\alpha}$ и $\hat{e}_2 = i(\alpha - \bar{\alpha})$; детали см. в гл. 4, шаг 1)

$$X_0(x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2) = X_0(x, y - x) = (y, -x^3 - x^2(y - x) - 2x - (y - x)) = (y, -x^2y - x - y) = y\hat{e}_1 + (-x^2y - x)\hat{e}_2.$$

Поэтому в новой системе координат

$$X_0(x, y) = (y, -x^2y - x),$$

$$\frac{\partial^n X^1}{\partial x^j \partial y^{n-j}}(0, 0) = 0 \quad \text{для всех } n > 1,$$

$$\frac{\partial^2 X^2}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 X^2}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 X^2}{\partial y^2}(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial^3 X^2}{\partial x^3}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^3 X^2}{\partial x^2 \partial y}(0, 0) = -2, \quad \frac{\partial^3 X^2}{\partial x \partial y^2}(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial^3 X^2}{\partial y^3}(0, 0) = 0.$$

Поэтому $V'''(0) = \frac{3\pi}{4|\lambda(0)|}(-2) < 0$. [6] Цикл устойчив, и бифуркация осуществляется выше порога критичности ($\mu > 0$).

(4В.3) Пример. Уравнение Ван-дер-Поля

Уравнение Ван-дер-Поля $\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$ имеет большое значение в теории электровакуумных приборов (подробнее см. Минорский [1], Ла-Саль и Лефшец [1]). Как хорошо известно, для всех $\mu > 0$ существует устойчивое колебательное решение этого уравнения. Легко проверить, что условия на собственные значения, необходимые для применения теоремы Хопфа, таковы, что бифуркация происходит справа от $\mu = 0$. Однако если $\mu = 0$, то уравнение линейно, и поэтому $V^{(n)}(0) = 0$ для всех n . При $\mu = 0$ все окружности с центром в начале координат являются замкнутыми орбитами потока. В силу единственности (п. В. теоремы 3.1), это те замкнутые орбиты, которые даются теоремой Хопфа. Таким образом, мы не можем здесь пользоваться теоремой Хопфа для установления существования устойчивых колебаний при $\mu > 0$. И действительно, замкнутая траектория отбивается от окружности радиуса два (более полное изложение см. у Ла-Саля и Лефшеца [1] стр. 190¹⁾). Чтобы получить этот результат из теоремы Хопфа, необходимо выбрать систему координат, переводящую окружность радиуса 2

¹⁾ См. также Андронов, Витт, Хайкин [1]. — Прим. перев.

в начало координат. Фактически, общее уравнение Ван-дер-Поля $u'' + f(u)u' + g(u) = 0$ может быть преобразовано в общее уравнение Лье́нара $x' = y - F(x)$, $y' = -g(x)$ заменой $x = u$, $y = u' + F(u)$ ¹⁾. При помощи этой замены рассматриваемый пример сводится к (4В.1). Более полная информация об этом содержится в работе Брауэра и Ноэля ([1], стр. 219). [7]

(4В.4) *Пример.* Пусть векторное поле на $\mathbb{R}^3$ задается формулой

$$X_\mu(x, y, z) = (\mu x + y + 6x^2, -x + \mu y + yz, (\mu^2 - 1)y - x - z + x^2).$$

Здесь

$$X_\mu(0, 0, 0) = 0 \quad \text{и} \quad dX_\mu(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \mu & 1 & 0 \\ -1 & \mu & 0 \\ -1 & \mu^2 - 1 & -1 \end{pmatrix}$$

с собственными значениями -1 и $\mu \pm i$. При $\mu = 0$ собственное подпространство оператора $dX_0(0, 0, 0)$, соответствующее $\pm i$, является линейной оболочкой векторов $(1, 0, -1)$ и $(0, 1, 0)$. Дополнительное подпространство порождается вектором $(0, 0, 1)$. В этом базисе

$$X_\mu(x, y, z) = (\mu x + y + 6x^2, -x + \mu y + yz, \mu x + \mu^2 y - z + x^2).$$

Вычислим теперь условия устойчивости. $|\lambda(0)| = 1$, а

$$d_3 X_0^3(0, 0, 0) = -1.$$

$$\begin{pmatrix} d_1 d_1 f(0, 0) \\ d_1 d_2 f(0, 0) \\ d_2 d_2 f(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ -2/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

$$d_1 d_j d_k \hat{X}_0^1(0, 0) = 0,$$

$$d_1 d_1 d_1 \hat{X}_0^2(0, 0) = 0,$$

$$d_1 d_1 d_2 \hat{X}_0^2(0, 0) = 1 \cdot (6/5) = 6/5,$$

$$d_1 d_2 d_2 \hat{X}_0^2(0, 0) = 3 \cdot 1 \cdot 4/5 = 12/5.$$

Поэтому $V''''(0) = \frac{3\pi}{4} (6/5 + 12/5) > 0$, а следовательно, замкнутая траектория неустойчива.

¹⁾ Здесь $F'(u) = f(u)$. — Прим. перев.

В качестве упражнений приведем два несложных примера.

(4В.5) *Упражнение*. Пусть $X(x, y) = A_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B(x, y)$,

где $B(x, y) = (ax^2 + cy^2, dx^2 + fy^2)$, а $A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$. Показать, что $\mu_0 = 0$ — бифуркационное значение параметра и что при условии $cf > ad$ устойчивое периодическое движение возникает при $\mu > 0$. (Этот пример является двумерным прототипом уравнений Навье — Стокса; заметим, что X является суммой линейного и квадратичного полей.)

(4В.6) *Упражнение* (см. Арнольд [2]). Пусть $\dot{z} = z(i\omega + \mu + cz\bar{z})$ — поле на $\mathbb{R}^2$, записанное в комплексных обозначениях. Показать, что бифуркация периодической траектории происходит при $z = \mu = 0$. Показать, кроме того, что если $c < 0$, то рождающаяся замкнутая орбита устойчива.

Некоторые другие несложные двумерные примеры приведены в книге Минорского [1], стр. 173—177. Там имеется пример колебательной неустойчивости усилителя из теории электрических цепей, а также пример колебаний судов. Читатель может также рассмотреть пример маятника с малым трением под действием вращающего момента $M = \ddot{x} + \sin x + \varepsilon \dot{x}$ (см. Арнольд [1], стр. 85 и Андронов и Хайкин [1]).

Чтобы подготовить читателя к следующему примеру, приведем довольно простое упражнение.

(4В.7) *Упражнение*. Пусть

$$X_\mu(x, y, z, w) = (\mu x + y + z - w, -x + \mu y, -z, -w + y^3).$$

Показать, что рождение устойчивой замкнутой орбиты происходит из точки $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$ при $\mu = 0$. (Ответ: $V'''(0) = -9\pi/4$.)

Следующий пример, являющийся наиболее сложным из всех, которые мы будем обсуждать, имеет ряд интересных особенностей. В частности, имеющаяся здесь бифуркация рождения цикла является субкритической. Кроме того, в системе имеется сложный «аттрактор Лоренца» (см. гл. 12)¹⁾.

(4В.8) *Пример* (предложен Дж. А. Йорком и Д. Рюэлем). Уравнения Лоренца (см. Лоренц [1]). Уравнения Лоренца — это идеализация уравнений движения жидкости в слое постоянной глубины, в котором поддерживается постоянная

¹⁾ См. также дополнение II в данной книге. — Прим. перев.

разность температур между поверхностью и дном. Эти уравнения следующие:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz.\end{aligned}$$

Лоренц [1] пишет: «... x пропорционально интенсивности конвективного движения, y пропорционально разности температур между поднимающимися и опускающимися потоками, одинаковые знаки перед x и y означают, что теплая жидкость поднимается, а холодная опускается. Переменная z пропорциональна отклонению профиля вертикального распределения температуры от линейного; положительное значение показывает, что наибольшие градиенты реализуются вблизи границ». $\sigma = K^{-1}\nu$ — число Прандтля, где K — коэффициент теплового расширения, а ν — вязкость; r — число Релея, принимаемое за бифуркационный параметр.

При $r > 1$ система имеет два состояния равновесия в точках $x = y = \pm \sqrt{b(r-1)}$, $z = r - 1$. Линеаризация векторного поля в точке $x = y = +\sqrt{b(r-1)}$, $z = r - 1$ имеет вид

$$\begin{aligned}M &\equiv \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix} = \\ &= dX_r(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1).\end{aligned}$$

Характеристический полином этой матрицы

$$\chi^3 + (\sigma + b + 1)\chi^2 + (r + \sigma)b\chi + 2\sigma b(r - 1) = 0$$

имеет один отрицательный и два комплексно-сопряженных корня. Для $\sigma > b + 1$ бифуркация рождения цикла происходит при $r = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$. Покажем это и определим устойчивость.

Представим характеристический полином в виде $(\chi - \lambda)(\chi - \bar{\lambda})(\chi - \alpha) = 0$, где $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, т. е. $\chi^3 - (2\lambda_1 + \alpha)\chi^2 + (|\lambda|^2 + 2\lambda_1\alpha)\chi - |\lambda|^2\alpha = 0$. Ясно, что он имеет два чисто мнимых корня тогда и только тогда, когда произведение коэффициентов при χ^2 и χ равно свободному члену, т. е.

$(\sigma + b + 1)(r_0 + \sigma) = 2\sigma b(r_0 - 1)$ или $r_0 = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$. Таким образом, мы получили бифуркационное значение. Най-

дем $\lambda'_1(r_0)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях χ , получим

$$\begin{aligned} -(\sigma + b + 1) &= 2\lambda_1 + \alpha \\ (r + \sigma)b &= |\lambda|^2 + 2\lambda_1\alpha, \\ -2\sigma b(r - 1) &= |\lambda|^2\alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha = -(\sigma + b + 1 + 2\lambda_1)$ и $(r + \sigma)b\alpha = 2\lambda_1\alpha^2 - 2\lambda_1b(r - 1)$, т. е. $-(\sigma + b + 1 + 2\lambda_1)(r + \sigma)b = -2\sigma b(r - 1) + 2\lambda_1(\sigma + b + 1 + 2\lambda_1)^2$. Дифференцируя по r , полагая $r = r_0$ и вспоминая, что $\lambda_1(r_0) = 0$, получаем, что

$$\lambda'_1(r_0) = \frac{b(\sigma - b - 1)}{2[b(r_0 + \sigma) + (\sigma + b + 1)^2]} > 0 \quad \text{для } \sigma > b + 1.$$

Таким образом, собственные значения пересекают мнимую ось с ненулевой скоростью, поэтому при $r_0 = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$ происходит бифуркация рождения цикла. Вычислим $V'''(r_0)$ для произвольных σ, b и определим ее значение при физически важных значениях параметров $\sigma = 10, b = 8/3$. При $r = r_0$ α равно коэффициенту при χ^2 с обратным знаком, поэтому $\alpha = -(\sigma + b + 1)$; $|\lambda|^2$ равно коэффициенту при χ , следовательно, $|\lambda|^2 = \frac{2\sigma b(\sigma + 1)}{\sigma - b - 1}$. В соответствии с п. I(A) гл. 4А, мы должны найти базис R^3 , в котором

$$\begin{aligned} dX_{r_0}(\sqrt{b(r_0 - 1)}, \sqrt{b(r_0 - 1)}, r_0 - 1) &= M = \\ &= \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r_0 - 1)} \\ \sqrt{b(r_0 - 1)} & \sqrt{b(r_0 - 1)} & -b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

станет равным

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2\sigma b(\sigma + 1)}{\sigma - b - 1}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{2\sigma b(\sigma + 1)}{\sigma - b - 1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\sigma + b + 1) \end{pmatrix}.$$

Базисными векторами будут u, v, w , где $Mu = -|\lambda|v$, $Mv = -|\lambda|u$, $Mw = \alpha w$. Собственный вектор матрицы M , соответствующий собственному значению α , равен

$$(-\sigma, b + 1, \sqrt{(\sigma + b + 1)(\sigma - b - 1)b/(\sigma + 1)}).$$

Собственное подпространство M , соответствующее собственным значениям $\lambda, \bar{\lambda}$, является ортогональным дополнением

к собственному вектору матрицы M^T , соответствующему собственному значению α . Этот собственный вектор равен

$$(\sigma + b - 1, -(\sigma - b - 1), -\sqrt{b(\sigma + b + 1)(\sigma - b - 1)/(\sigma + 1)}).$$

Выберем $u = (-(\sigma - b - 1), -(\sigma + b - 1), 0)$. В силу того что

$$M^2 = \begin{pmatrix} -|\lambda|^2 & 0 \\ 0 & -|\lambda|^2 \end{pmatrix}$$

на собственном подпространстве, соответствующем $\lambda, \bar{\lambda}$, мы можем также выбрать $v = -\frac{1}{|\lambda|} Mu = \left(\sqrt{\frac{2\sigma b(\sigma - b - 1)}{\sigma + 1}}, -\sqrt{\frac{2b(\sigma - b - 1)}{\sigma(\sigma + 1)}}, (\sigma - 1)\sqrt{\frac{2(\sigma + b + 1)}{\sigma}} \right)$.

Теперь мы получили новый базис и, как и в примере 4В.4, после записи дифференциального уравнения в этом базисе можем найти X^1, X^2, X^3 . Следовательно, все готово для вычисления $V'''(r_0)$. Это очень длинные вычисления, поэтому приведем лишь результаты. Это вычисление [8] было проделано Рошиным [1], который доказал, что при всех σ, b величина $V'''(r_0)$ положительна¹⁾. Поэтому бифуркация субкритическая при всех σ, b , в частности, и при $\sigma = 10, b = 8/3$. Таким образом, вычисления доказывают предположение Лоренца [1], который на основании численного счета полагал, что орбиты неустойчивы.

Можно изучить поведение системы при фиксированном $b > 0$ и $\sigma \rightarrow \infty$. Это было сделано также Мартином и Мак-лафлином [1].

Настоящий пример может оказаться важным для понимания возможных общих теорем о турбулентности (см. обсуждение в гл. 9). Идея показана на рис. 4В.1. Для дальнейшей информации о поведении решений выше порога критичности см. Лоренц [1] и гл. 12 (Ховард построил схему, динамика которой напоминает динамику этих уравнений).

(4В.9) *Упражнение.* Проанализировать асимптотику $V'''(r_0)$ при $b \rightarrow \infty$ и фиксированном σ , а также при $b \rightarrow \infty$ в случае $\sigma = \beta b$ для различных $\beta > 0$.

(4В.10) *Упражнение.* Выбрав надлежащим образом переменные, проанализировать устойчивость состояния равно-

¹⁾ В этом месте в оригинале были приведены результаты вычисления величины $V'''(r_0)$, из которых следует, что она может менять знак при изменении параметров. Это вычисление оказалось ошибочным, поэтому при переводе оно опущено. — Прим. перев.

весия $x = y = -\sqrt{b(r-1)}$, $z = r - 1$. Показать, что бифуркация рождения цикла происходит при $r_0 = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$, а рождающиеся замкнутые орбиты притягивающие тогда и только тогда, когда это имеет место для другого состояния равновесия.

(4В.11) *Упражнение.* Доказать, что для $r > 1$ матрица

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -1 \end{pmatrix}$$

имеет один отрицательный и два комплексно-сопряженных корня.

(4В.12) *Упражнение.* Пусть через F обозначено векторное поле на R^3 , определяемое правой частью уравнений Лоренца.

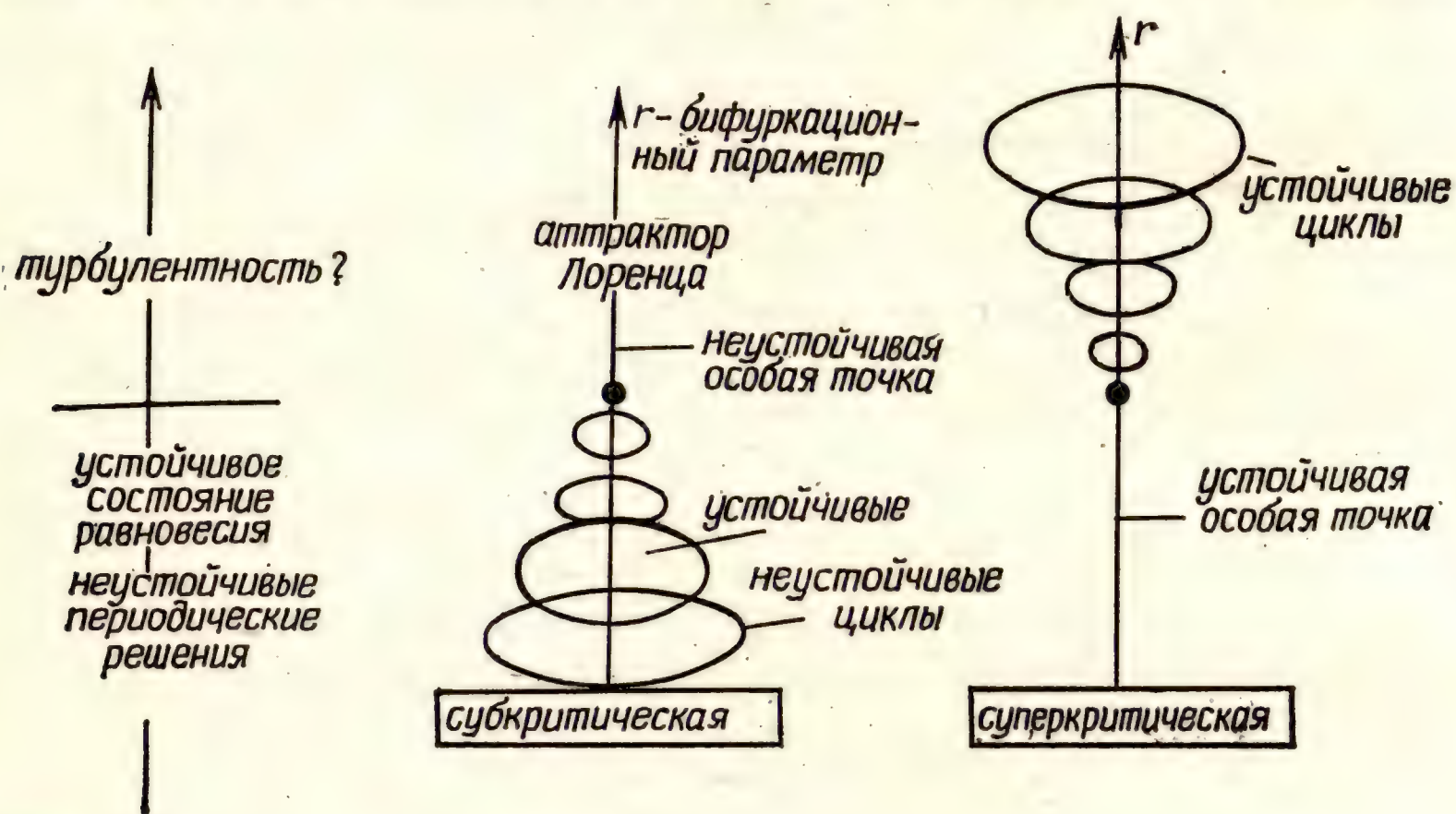


Рис. 4В.1.

(а) Заметим, что $\operatorname{div} F = -\sigma - b - 1$ — постоянная величина. Используя это, оценить порядок величин сжатия по главным направлениям в состояниях равновесия.

(б) Показать, что скалярное произведение $\langle F, V \rangle$, $V = (x, y, z)$, является квадратичной функцией x, y, z . Рассматривая $\frac{d}{dt} \langle V, V \rangle$, показать, что решения уравнений Лоренца определены при всех t (заметим, что многие квадратичные уравнения, например $\dot{x} = x^2$, имеют решения, определенные не для всех t).

(4В.13) *Упражнение.* Следующие уравнения появляются в колебательной реакции Жаботинского (см. Хастингс и Мюррей [1]).

$$\dot{x} = s(y - xy + x - qx^2),$$

$$\dot{y} = \frac{1}{s}(fz - y - xy),$$

$$\dot{z} = w(x - y).$$

(Сравните с уравнениями Лоренца!) Пусть f — бифуркационный параметр, и пусть, например, $s = 7,7 \times 10$, $q = 8,4 \times 10^{-6}$, $w = 1.61 \times 10^{-1}$. Показать, что бифуркация рождения

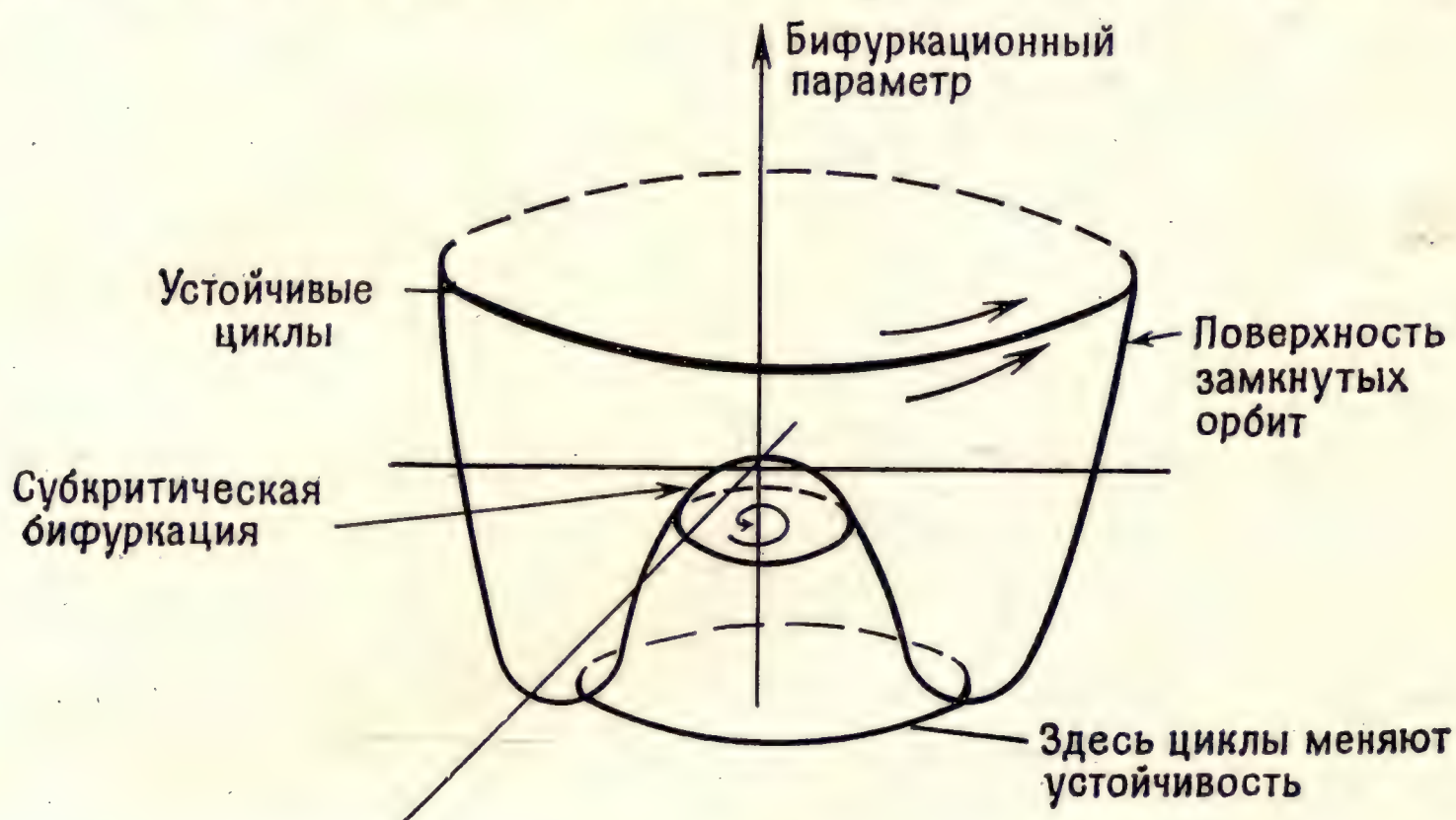


Рис. 4В.2.

цикла происходит при $f = f_c$, где

$$2q(2 + 3f_c) = (2f_c + q - 1)[(1 - f_c - q) + \{(1 - f_c - q)^2 + 4q(1 + f_c)\}^{1/2}].$$

Показать, что для этих значений параметров бифуркация субкритическая. С. Хастингс сообщил нам, что бифуркационная диаграмма выглядит, как на рис. 4В.2 (существование устойчивых замкнутых траекторий для значений параметра выше порога критичности доказано Хастингсом и Мюрреем [1]).

БИФУРКАЦИЯ РОЖДЕНИЯ ЦИКЛА И МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ

С. Чоу и Ж. Малле-Паре

Метод усреднения¹⁾ дает алгоритм для упрощения бифуркационной задачи, т. е. для приведения ее к нормальной форме. После того как это сделано, при помощи теоремы о неявной функции (или принципа сжимающих отображений) и теоремы о центральном многообразии легко определить некоторые качественные особенности бифуркации.

Рассмотрим сначала задачу о бифуркации рождения цикла.

$$\dot{z} = f(z, \alpha) \quad (4C.1)$$

для состояния равновесия $z = 0$. Предположим, что $z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (-\alpha_0, \alpha_0)$, f принимает значения в $\mathbb{R}^n$ и $f(0, \alpha) = 0$. Для простоты будем рассматривать обыкновенные дифференциальные уравнения, хотя мы могли бы точно так же рассмотреть дифференциальные уравнения в частных производных. В этом случае z и $\dot{z}$ принадлежит (вообще говоря, различным) банаховым пространствам X_1 и X_2 , а f — гладкое отображение $X_1 \times (-\alpha_0, \alpha_0)$ в X_2 .

Запишем (1) в виде

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A(\alpha)z + g(z, \alpha), \\ |g(z, \alpha)| &= O(|z|^2). \end{aligned} \quad (4C.2)$$

Относительно спектра $A(\alpha)$ имеют место обычные (см. гл. 1.3) предположения, а именно, что ему принадлежит пара $\lambda(\alpha)$, $\overline{\lambda(\alpha)}$ комплексно-сопряженных собственных значений вида

$$\lambda(\alpha) = \gamma(\alpha) + i\omega(\alpha),$$

где

$$\gamma(0) = 0, \quad \overset{\text{def}}{\gamma} = \gamma'(0) \neq 0, \quad \overset{\text{def}}{\omega} = \omega(0) \neq 0,$$

а остальной спектр $A(\alpha)$ равномерно отделен на положительное расстояние от мнимой оси. Представим $z \in \mathbb{R}^n$ как

$$z = (x, y), \quad P \oplus Q = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^{n-2}$$

¹⁾ Метод использовался многими авторами: Халанаем, Хейлом, Мейером, Дилиберто и др.; см. Курцвейль [1] и статьи в сборнике Лефшеца [1].

в соответствии со спектром $A(0)$, так что P есть собственное подпространство, соответствующее $\lambda(0)$, $\overline{\lambda(0)}$, а Q — его дополнение. После такого разложения можно записать

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} A_P(\alpha) & O(\alpha) \\ O(\alpha) & A_Q(\alpha) \end{pmatrix},$$

где

$$A_P(\alpha) = \begin{pmatrix} \gamma(\alpha) & -\omega(\alpha) \\ \omega(\alpha) & \gamma(\alpha) \end{pmatrix},$$

а спектр $A_Q(\alpha)$ равномерно отделен от мнимой оси. Представим x в полярных координатах

$$x = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Рассмотрим периодическое решение, рождающееся из точки

$$(x, y, \alpha) = (0, 0, 0).$$

Дифференциальным уравнением для r является уравнение

$$\dot{r} = \gamma(\alpha)r + O(r^2) = \alpha\nu r + O(\alpha^2 r) + O(r^2),$$

из которого следует, что $\dot{r} = 0$, когда r достигает на решении своего максимума, и, следовательно,

$$\alpha = O(r). \quad (4C.3)$$

Далее, периодическое решение лежит на центральном многообразии Σ , описываемом соотношением

$$\Sigma: y = \varphi(r, \theta, \alpha). \quad (4C.4)$$

Состояние равновесия $(r, y) = (0, 0)$ лежит на Σ для всех α . Кроме того, Σ касается $P \times (-\alpha_0, \alpha_0)$ в точке $(r, \alpha) = (0, 0)$, откуда следует, что (4C.4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Sigma: y &= r\psi(r, \theta, \alpha), \\ \psi(0, \theta, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, на периодическом решении имеем

$$y = O(r^2) + O(r\alpha) = O(r^2). \quad (4C.5)$$

Выбирая $\varepsilon > 0$ того же самого порядка, что и амплитуда решения, мы можем перемасштабировать уравнение при помощи

$$r \rightarrow \varepsilon r, \quad \alpha \rightarrow \varepsilon \alpha, \quad y \rightarrow \varepsilon y.$$

Тогда из оценок (4С.3), (4С.5) будет следовать, что в новых координатах

$$r = O(1), \quad \dot{x} = O(1), \quad y = O(\varepsilon). \quad (4С.6)$$

Точное соотношение между ε и α будет выяснено позднее, когда α будет выбрана как конкретная функция ε . Тогда будет показано, что на самом деле $\alpha = 0$ в новых координатах.

Разложим дифференциальное уравнение (4С.2) в ряд Тейлора (в новых координатах). Используя оценку (4С.6), нетрудно показать, что уравнение будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_P(\varepsilon\alpha) + B_2x^2 + \varepsilon^3B_3x^3 + Gxy + O(\varepsilon^2\alpha) + O(\varepsilon^3), \\ \dot{y} &= A_Qy + \varepsilon Jx^2 + O(\varepsilon\alpha) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (4С.7)$$

где $B_j = (B_j^1, B_j^2)$ — однородный полином степени j от $x \in \mathbb{R}^2$ имеющий значения в $\mathbb{R}^2$, $G: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ — билинейное отображение, $A_Q = A_Q(0)$, $J: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — симметричное билинейное отображение.

В полярных координатах (4С.7) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon\alpha vr + \varepsilon r^2 C_3(\theta) + \varepsilon^2 r^3 C_4(\theta) + \varepsilon r G_2(\theta) y + \theta(\varepsilon^2\alpha) + O(\varepsilon^3) \\ \dot{\theta} &= \omega + \varepsilon r D_3(\theta) + O(\varepsilon\alpha) + O(\varepsilon^2) \\ \dot{y} &= A_Q y + \varepsilon r^2 J(\cos \theta, \sin \theta)^2 + O(\varepsilon\alpha) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \right\}, \quad (4С.8)$$

где

$$C_j(\theta) = (\cos \theta) B_{j-1}^1(\cos \theta, \sin \theta) + (\sin \theta) B_{j-1}^2(\cos \theta, \sin \theta)$$

и

$$D_j(\theta) = (\cos \theta) B_{j-1}^2(\cos \theta, \sin \theta) - (\sin \theta) B_{j-1}^1(\cos \theta, \sin \theta)$$

— однородные тригонометрические полиномы степени j , $G_2(\theta)$ — однородный тригонометрический полином второй степени, значения которого принадлежат сопряженному к Q пространству Q^* .

Цель метода усреднения заключается в том, чтобы избавиться от зависимости $\dot{r}$ от θ и y , т. е. найти такую новую радиальную координату $\bar{r}$, уравнение для которой имело бы вид

$$\dot{\bar{r}} = F(\bar{r}, \varepsilon).$$

Если бы это было сделано, то каждое периодическое решение являлось бы обыкновенной окружностью $\bar{r} = \bar{r}(\varepsilon)$, где $\bar{r}(\varepsilon)$ удовлетворяло бы уравнению $F(\bar{r}(\varepsilon), \varepsilon) = 0$. На самом деле не обязательно полностью уничтожать зависимость от θ и y ,

обычно достаточно отсутствия θ и y у конечного числа членов разложения Тейлора по ε и y . Например, в (4С.8) достаточно, вообще говоря, усреднить члены, содержащие ε , εy и ε^2 .

Точнее, рассмотрим какое-нибудь дифференциальное уравнение

$$\dot{r} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^j R_{jk}(r, \theta, \alpha) y^k,$$

$$\dot{\theta} = \omega + O(\varepsilon),$$

$$\dot{y} = A_Q y + O(\varepsilon).$$

Ряды для $\dot{r}$ могут быть заменены конечными отрезками рядов Тейлора с остатком. Чтобы усреднить какой-либо член, скажем R_{pq} , определим новую координату $\bar{r}$ равенством

$$\bar{r} = r + \varepsilon^p u(r, \theta, \alpha) y^q.$$

В новых координатах коэффициент при $\varepsilon^p y^q$ становится равным $\bar{R}_{pq}$, где

$$\bar{R}_{pq}(r, \theta, \alpha) = \frac{\partial u}{\partial \theta} \omega + q u y^q A_Q + R_{pq}(r, \theta, \alpha).$$

Возможны два случая.

Случай I, $q = 0$. Выберем u следующим образом:

$$u(r, \theta, \alpha) = -\frac{1}{\omega} \int_0^{\theta} R_{p0}(r, \xi, \alpha) d\xi + \frac{\theta}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} R_{p0}(r, \xi, \alpha) d\xi.$$

Отметим, что u 2π -периодична по θ , а $\bar{R}_{p0}$ от θ не зависит и фактически является средним:

$$\bar{R}_{p0}(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{p0}(r, \xi, \alpha) d\xi.$$

Следовательно, мы усреднили коэффициент при $\varepsilon^p y^0$.

Случай II. $q > 0$. Здесь нам хочется выбрать u так, чтобы $\bar{R}_{pq}$ тождественно равнялось нулю, и таким образом уничтожить член с $\varepsilon^p y^q$. Поэтому мы будем искать 2π -периодическую функцию $u(r, \theta, \alpha)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} \omega + q u A_Q + R_{pq}(r, \theta, \alpha) = 0. \quad (4С.9)$$

Рассматривая R_{pq} в (4С.9) как внешнюю силу, видим, что такая единственная функция u существует тогда и только

тогда, когда однородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} \omega + quA_Q = 0$$

не имеет нетривиальных 2π -периодических решений. Можно показать, что это выполнено, если

$$\frac{1}{\omega_i} \sum_{j=1}^{n-2} n_j \lambda_j \text{ не равно целому числу}$$

$$\text{для всех целых } n_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n-2} n_j = q$$

и $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$ — собственные значения A_Q .

В частности, это всегда может быть сделано, когда $q = 1$ или A_Q устойчива.

Вернемся к бифуркационной задаче (4С.8) и теперь усредним члены с ε , εu и ε^2 указанным выше способом при помощи замены

$$\bar{r} = r + \varepsilon u(r, \theta, \alpha) + \varepsilon w(r, \theta, \alpha) y + \varepsilon^2 v(r, \theta, \alpha).$$

На самом деле замена имеет вид $\bar{r} = r + \varepsilon r^2 u(\theta) + \varepsilon r w(\theta) y + \varepsilon^2 r^3 v(\theta)$, откуда получаем уравнение для $\bar{r}$:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}} = & \varepsilon [\alpha v \bar{r} + \bar{r}^2 C_3(\theta) + \bar{r}^2 u'(\theta) \omega] + \varepsilon \bar{r} [G_2(\theta) + w(\theta) A_Q + \\ & + w'(\theta) \omega] y + \varepsilon^2 \bar{r}^3 [C_4(\theta) + u'(\theta) D_3(\theta) + w(\theta) J(\cos \theta, \sin \theta)^2 - \\ & - 2u(\theta) u'(\theta) \omega + v'(\theta) \omega] + O(\varepsilon^2 \alpha) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (4С.10)$$

Так как среднее значение C_3 равно нулю, выберем

$$u(\theta) = -\frac{1}{\omega} \int_0^\theta C_3(\xi) d\xi$$

тогда коэффициент при ε в (4С.10) станет равным $\alpha v \bar{r}$. Положим $w(\theta)$ равным единственному 2π -периодическому решению уравнения

$$G_2(\theta) + w(\theta) A_Q + w'(\theta) \omega = 0;$$

при этом член с εu исчезнет. Наконец, выберем $v'(\theta)$ так, чтобы сделать коэффициент при $\varepsilon^2 \bar{r}^3$ постоянной величиной

$$K = \text{среднему } [C_4(\theta) + u'(\theta) D_3(\theta) + w(\theta) J(\cos \theta, \sin \theta)^2 - 2u(\theta) u'(\theta) \omega] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[C_4(\theta) - \frac{1}{\omega} C_3(\theta) D_3(\theta) + w(\theta) J(\cos \theta, \sin \theta)^2 \right] d\theta.$$

Таким образом, в новых координатах (r, θ, y) (4С.8) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{r}} &= \varepsilon \alpha \nu \bar{r} + \varepsilon^2 \bar{r}^3 K + O(\varepsilon^2 \alpha) + O(\varepsilon^3), \\ \dot{\theta} &= \omega + O(\varepsilon), \\ \dot{y} &= A_Q y + O(\varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (4С.11)$$

Если ограничить рассмотрение центральным многообразием

$$y = r \psi(\varepsilon r, \theta, \varepsilon \alpha),$$

то уравнением для $\dot{y}$ можно пренебречь. Кроме того, нетрудно показать, что единственное семейство периодических решений, рождающихся из начала координат, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= \left| \frac{\nu}{K} \right|^{1/2} + O(\varepsilon) \\ \alpha &= -\varepsilon \operatorname{sgn}(\nu K) \end{aligned} \right\} \text{ в новых координатах,}$$

т. е. в исходных координатах

$$\left. \begin{aligned} r &= \left| \frac{\nu}{K} \right|^{1/2} \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad y = O(\varepsilon^2). \\ \alpha &= -\varepsilon^2 \operatorname{sgn}(\nu K). \end{aligned} \right\} \quad (4С.12)$$

Поэтому амплитуда бифурцирующего решения приблизительно равна $\left(-\frac{\alpha \nu}{K}\right)^{1/2}$, а период близок к $\frac{2\pi}{\omega}$.

В случае $K = 0$ таким же образом усредняются члены более высокого порядка по ε и y . Возможные в этом случае нормальные формы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}} &= \varepsilon \alpha \nu \bar{r} + \varepsilon^{2p} \bar{r}^{2p+1} K' + O(\varepsilon^2 \alpha) + O(\varepsilon^{2p+1}), \\ \dot{\theta} &= \omega + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

для целых $p \geq 2$ и $K' \neq 0$. Бифурцирующее решение в этом случае может быть записано в виде

$$\left. \begin{aligned} r &= \left| \frac{\nu}{K'} \right|^{1/2p} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ y &= O(\varepsilon)^2 \\ \alpha &= -\varepsilon^{2p} \operatorname{sgn}(\nu K') \end{aligned} \right\} \text{ в исходных координатах.}$$

Поэтому оно имеет амплитуду, близкую к $\left(-\frac{\alpha \nu}{K'}\right)^{1/2p}$, и период, близкий к $\frac{2\pi}{\omega}$. Заметим, что во всех случаях бифуркация происходит лишь с одной стороны от $\alpha = 0$. Для случаев, когда все бифурцирующие решения имеются лишь при

$\alpha = 0$ (например, при доказательстве центральной теоремы Ляпунова — см. гл. 3С), метод усреднения не работает.

Более детальное изложение описанного метода, а также некоторые приложения см. в работе Чоу и Малле-Паре [1]. Мы упоминаем здесь только о двух примерах, рассмотренных в этой работе, где применяется метод усреднения.

(1) *Дифференциальное уравнение с запаздыванием (уравнение Райта).*

Уравнение

$$\dot{z}(t) = -az(t-1)[1+z(t)]$$

возникает в столь разных областях, как модели популяционной генетики и теория чисел, и является одним из наиболее глубоко изученных уравнений с запаздыванием. В нем для $a > \frac{\pi}{2}$ с помощью топологической техники неподвижной точки доказывалось существование периодического решения. Используя метод усреднения, можно анализировать поведение этого решения вблизи $a = \frac{\pi}{2}$. В частности, для $\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ решение, рождающееся из $z = 0$, является устойчивым и имеет асимптотику

$$z(t) = K \left(a - \frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + O\left(a - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$K = \left(\frac{40}{3\pi - 2}\right)^{1/2} \approx 2,3210701.$$

(2) *Уравнение диффузии.* Линейные уравнения с нелинейными граничными условиями, вроде

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad \text{при } t \geq 0 \text{ и } 0 < x < 1, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(1, t) = ag(u(0, t), u(1, t)), \end{aligned}$$

встречаются в различных задачах биологии и теории химических реакций (см., например, Аронсон [2]). Возьмем

$$g(u, v) = \alpha u + \beta v + O(u^2 + v^2);$$

тогда линеаризованное в окрестности $u = 0$ уравнение имеет граничные условия

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = a[\alpha u(0, t) + \beta u(1, t)].$$

При переходе через критическое значение a_0 для подходящих значений (α, β) пара собственных значений этой задачи пересекает мнимую ось с ненулевой скоростью. Устойчивость рождающегося периодического движения может быть определена методом усреднения.

Сила метода усреднения проявляется в том, что с его помощью можно изучать достаточно широкий круг бифуркационных задач. Упомянем здесь о двух.

(3) *Почти периодические уравнения.* Рассмотрим

$$\dot{z}(t) = A(\alpha)z + g(z, t, \alpha), \quad (4C.13)$$

где $A(\alpha)$ удовлетворяет тем же условиям, что и ранее, g почти периодична по t равномерно относительно (z, α) на компактных множествах и $g = O(|z|^2)$. Дополнительно предположим, что периоды $2\pi/N\omega$ для $N = 1, 2, 3, 4$ отделены от базисных периодов для g . Тогда процедура усреднения, аналогичная описанной выше, приводит к нормальной форме, даваемой в новых координатах соотношениями (4C.11). Здесь, однако, члены высших порядков (но не постоянная K) почти периодичны по t . Таким образом, полученное многообразие можно представить себе как цилиндр в пространстве $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$, в котором каждое сечение $t = \text{const}$ является окружностью, близкой $x = 0$. Цилиндр этот почти периодичен по t с теми же самыми базисными периодами, что и g .

(4) Специальным случаем (3) является бифуркация рождения инвариантного тора из периодической траектории автономной системы. В соответствующих локальных координатах около замкнутой траектории автономная система имеет вид (4C.13), где t обозначает (периодическую) координату вдоль замкнутой траектории, а z — координаты, нормальные к ней. Условие на базисные периоды для g сводится к стандартному предположению о том, что периодическая траектория не имеет мультипликаторов, являющихся корнями N -й степени из единицы, для $N = 1, 2, 3, 4$. Инвариантный цилиндр, получающийся при $K \neq 0$, периодичен по t и, таким образом, фактически является двумерным тором, «охватывающим» замкнутую траекторию.

ПЕРЕВОД ОРИГИНАЛЬНОЙ РАБОТЫ ХОПФА ¹⁾

1. Введение

Пусть

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \dots, x_n, \mu) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

или, в векторных обозначениях,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega) \quad (1.1)$$

— система дифференциальных уравнений с действительным параметром μ , где $\mathbf{F}$ аналитична по $\mathbf{x}$ и μ для $\mathbf{x}$ из области $G \subset \mathbb{R}^n$ и $|\mu| < c$. Пусть для $|\mu| < c$ система (1.1) имеет семейство стационарных решений $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}(\mu)$, лежащее в G :

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}(\mu), \mu) = 0.$$

Как хорошо известно, характеристические показатели стационарного решения являются собственными значениями в задаче о собственных значениях

$$\lambda \mathbf{a} = \mathbf{L}_\mu \mathbf{a},$$

где $\mathbf{L}_\mu$ — линейный оператор, зависящий только от μ , соответствующий линейной части разложения $\mathbf{F}$ в ряд в точке $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$. Эти показатели либо действительные числа, либо пары комплексно-сопряженных и зависят от μ .

Предположим просто, что для значения $\mu = 0$ существует стационарное решение $\mathbf{x}_0$ в G , которое не имеет равных нулю характеристических показателей. Тогда, как хорошо известно, отсюда автоматически следует, что существует единственное стационарное решение $\tilde{\mathbf{x}}(\mu)$ в некоторой окрестности $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ для каждого достаточно малого $|\mu|$ и что $\tilde{\mathbf{x}}(\mu)$ аналитично в точке $\mu = 0$.

Предположим теперь, что при переходе через значение $\mu = 0$ мнимую ось пересекает пара комплексно-сопряженных характеристических показателей и ни один из характеристических показателей не равен нулю. Эта ситуация часто встречается в неконсервативных механических системах, например

¹⁾ Английский перевод работы Хопфа [1] выполнен Л. Н. Ховардом и Н. Коппель.

в гидродинамических. Следующая теорема утверждает, что при этих предположениях всегда существует периодическое решение уравнения (1.1) в окрестности значений $x = x_0$ и $\mu = 0$.

Теорема. Пусть для $\mu = 0$ ровно два комплексно-сопряженных характеристических показателя $\alpha(\mu)$, $\bar{\alpha}(\mu)$ становятся чисто мнимыми и при этом удовлетворяются условия

$$\alpha(0) = -\bar{\alpha}(0) \neq 0, \quad \operatorname{Re}(\alpha'(0)) \neq 0. \quad (1.2)$$

Тогда существует семейство действительных периодических решений $x = x(t, \varepsilon)$, $\mu = \mu(\varepsilon)$, такое, что $\mu(0) = 0$, $x(t, 0) = \tilde{x}(0)$, причем $x(t, \varepsilon) \neq \tilde{x}(\mu(\varepsilon))$ для всех достаточно малых $\varepsilon \neq 0$. $\mu(\varepsilon)$ и $x(t, \varepsilon)$ аналитичны в точке $\varepsilon = 0$ и соответственно в каждой точке $(t, 0)$. То же справедливо для периода $T(\varepsilon)$, и

$$T(0) = 2\pi / |\alpha(0)|.$$

Для произвольно большого L существует два положительных числа a и b , такие, что для $|\mu| < b$ не существует периодических решений, кроме стационарного решения и решений полусемейства $\varepsilon > 0$, период которых меньше L и которые целиком лежат в окрестности $|x - \tilde{x}(\mu)| < a^1$.

Для достаточно малых μ периодические решения, вообще говоря, существуют для $\mu > 0$ или лишь для $\mu < 0$; возможно также, что они существуют лишь для $\mu = 0^2$.

Как хорошо известно, характеристические показатели периодического решения $x(t, \varepsilon)$ являются решениями задачи о собственных значениях

$$\dot{v} + \lambda v = L_{t, \varepsilon}(v), \quad (1.3)$$

где $v(t)$ имеет тот же период $T(\varepsilon)$, что и решение, а $L_{t, \varepsilon}$ — линейный оператор, полученный линеаризацией системы в окрестности периодического решения. Он периодически зависит от t с периодом T и аналитичен по t и ε в точке $\varepsilon = 0$.

Характеристические показатели определяются лишь по модулю $(2\pi i/T)$ и непрерывно зависят от ε . Один из них, естественно, нуль: для F , не зависящего явно от t ,

$$\lambda = 0, \quad v = \dot{x}(t, \varepsilon)$$

¹) Полусемейство, соответствующее $\varepsilon < 0$, представляет те же самые интегральные кривые.

²) По поводу этой теоремы см. комментарий редакторов в конце книги.

является решением задачи о собственных значениях. При $\varepsilon \rightarrow 0$ характеристические показатели по модулю $(2\pi i/T_0)$ непрерывно стремятся к соответствующим показателям стационарного решения системы (1.1) с $\mu = 0$. При этом по предположению ровно два показателя стремятся к мнимой оси. Один из них тождественно равен нулю. Другой, $\beta = \beta(\varepsilon)$, должен быть действительным и аналитичным в точке $\varepsilon = 0$, а $\beta(0) = 0$. Из приведенной выше теоремы непосредственно следует, что коэффициенты μ_1 и β_1 в разложениях в ряды

$$\mu = \mu_1 \varepsilon + \mu_2 \varepsilon^2 + \dots$$

$$\beta = \beta_1 \varepsilon + \beta_2 \varepsilon^2 + \dots$$

удовлетворяют равенствам $\mu_1 = \beta_1 = 0$. В дополнение к этому ниже будет показано, что имеет место простое соотношение

$$\beta_2 = -2\mu_2 \operatorname{Re}(\alpha'(0)). \quad (1.4)$$

В общем случае, когда $\mu_2 \neq 0$, это соотношение дает информацию об условиях устойчивости. Если, например, для $\mu < 0$ все характеристические показатели стационарного решения $x = \tilde{x}(\mu)$ имеют отрицательные действительные части (устойчивость, малая окрестность $\tilde{x}$ сжимается к $\tilde{x}$ при $t \rightarrow \infty$), то имеется следующая альтернатива. *Либо* периодическое решение ответвляется от стационарного после смены устойчивости стационарного решения ($\mu > 0$), и в этом случае все характеристические показатели периодического решения имеют отрицательные действительные части (устойчивость, трубки вокруг периодических решений сжимаются к ним при $t \rightarrow \infty$); *либо, наоборот*, семейство периодических решений существует перед сменой устойчивости, т. е. для $\mu < 0$, и тогда периодические решения неустойчивы¹⁾.

Так как в природе при достаточно длительном наблюдении мы можем наблюдать лишь устойчивые решения, то бифуркация периодического решения из стационарного может быть обнаружена, только когда стационарное решение становится неустойчивым.

Такие наблюдения хорошо известны в гидродинамике. Так, например, в потоке, обтекающем твердое тело, движение стационарное, если скорость потока достаточно мала. Однако если она, увеличиваясь, станет достаточно большой, то движение может стать периодическим (происходит периодический отрыв вихря). Здесь идет речь о примерах неконсерва-

¹⁾ В двумерном случае это очевидно.

тивных систем (рассматривается вязкая жидкость)¹⁾. В консервативных системах, конечно, предположение (1.2) никогда не осуществляется: наряду с характеристическим показателем λ , всегда имеется и характеристический показатель $(-\lambda)$.

В литературе я не встречал бифуркационных задач, рассмотренных на основании предположения (1.2). Однако я думаю, что едва ли имеется что-нибудь существенно новое в сформулированной выше теореме. Методы были развиты Пуанкаре, возможно, лет 50 назад²⁾ и являются сегодня составной частью классической теории периодических решений в малом. Так как, однако, теорема представляет интерес для задач неконсервативной механики, мне кажется, что полное ее изложение имеет смысл. Чтобы облегчить переход к системе с бесконечно многими степенями свободы, например к фундаментальным уравнениям движения вязкой жидкости, я буду отдавать предпочтение общим методам линейной алгебры, а не специальной технике (например, выбору подходящей системы координат).

Конечно, с таким же успехом может случиться, что при $\mu = 0$ действительный характеристический показатель $\alpha(\mu)$ стационарного решения $x(\mu)$ пересекает мнимую ось, т. е. $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) \neq 0$, в то время как другие отделены от нее. В этом случае не периодическое, а другое стационарное решение ответвляется от данного³⁾. Ограничимся формулировкой теоремы для этого простого случая. Существует аналити-

¹⁾ Мне неизвестен пример из гидродинамики, в котором осуществляется второй случай. О существовании неустойчивых решений можно догадаться, если при очень тщательно поставленном эксперименте (очень медленное изменение параметров) всегда наблюдается внезапное разрушение стационарного движения в одной и той же точке.

²⁾ «Новые методы небесной механики». Периодические решения, определенные выше, представляют простейший предельный случай периодических решений Пуанкаре второго типа («рода»), см. т. III, гл. 28, 30—31. Пуанкаре, имея в виду приложения к небесной механике, тщательно изучил эти решения (с помощью интегральных инвариантов) лишь в случае канонических систем дифференциальных уравнений, где ситуация сложнее, чем выше. Пуанкаре использовал вспомогательный параметр ε в гл. 30 при вычислении коэффициентов (вычисления в нашем § 4 по существу те же самые), но не при доказательстве существования, которое благодаря этому становится проще.

Пенлеве в короткой заметке в т. I, стр. 156 затрагивает этот вопрос: «Les petits mouvements périodiques des systèmes, Comptes Rendus, Paris, XXIV (1897), p. 1222. Общая теорема, сформулированная там, охватывает случай $\mu = 0$ в нашей системе (1.1), но для общего случая она неверна. Для законности этого утверждения F должна удовлетворять специальным условиям.

³⁾ Подобный пример в гидродинамике осуществляется при движении жидкости между двумя концентрическими цилиндрами (G. I. Taylor).

ческое семейство $x = x^*(\varepsilon)$, $\mu = \mu^*(\varepsilon)$ стационарных решений, отличных от $\tilde{x}$, $\mu^*(0) = 0$, $x^*(0) = \tilde{x}(0)$. Если $\mu_1 \neq 0$ (общий случай), тогда решения существуют для $\mu > 0$ и для $\mu < 0$. Для характеристического показателя $\beta(\varepsilon)$, который переходит через нуль, справедлив аналог формулы (1.4)

$$\beta_1 = -\mu_1 \alpha'(0).$$

Если $\tilde{x}$ устойчиво для $\mu < 0$ и неустойчиво для $\mu > 0$, тогда для x^* осуществляется прямо противоположное (обнаружить $\tilde{x}$ для $\mu < 0$ все равно, что x^* для $\mu > 0$). В особом случае $\mu_1 = 0$ ситуация может быть различной. Если $\mu_2 \neq 0$, тогда новые решения существуют лишь для $\mu > 0$ либо для $\mu < 0$. Тогда для фиксированного μ существуют два решения (одно с положительным ε , другое — с отрицательным). При этом справедливо равенство

$$\beta_2 = -2\mu_2 \alpha'(0).$$

Из него можно получить утверждение об устойчивости, аналогичное сформулированному выше. В этом случае или оба решения устойчивы, или оба неустойчивы.

Существование периодических решений

Без ограничения общности можно предположить, что стационарное решение находится в начале координат, т. е.

$$F(0, \mu) = 0.$$

Пусть разложение F в ряд по степеням x_i имеет вид

$$F(x, \mu) = L_\mu(x) + Q_\mu(x, x) + K_\mu(x, x, x) + \dots, \quad (2.1)$$

где вектор-функции

$$L_\mu(x), Q_\mu(x, y), K_\mu(x, y, z), \dots$$

являются линейными функциями каждого аргумента и симметричны по этим векторам.

Подстановка

$$x = \varepsilon y \quad (2.2)$$

преобразует (1.1) в

$$\dot{y} = L_\mu(y) + \varepsilon Q_\mu(y, y) + \varepsilon^2 K_\mu(y, y, y) + \dots \quad (2.3)$$

Правая часть аналитична по ε , μ , y в точке $\varepsilon = \mu = 0$, $y = y^0$ (y^0 произвольно). Рассмотрим случай $\varepsilon = 0$ в (2.3), т. е. линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = L_\mu(z). \quad (2.4)$$

Для вопросов существования оно имеет решающее значение.

Комплексно-сопряженные характеристические показатели $\alpha(\mu)$, $\bar{\alpha}(\mu)$, о которых говорилось в предположениях теоремы, просты для всех малых $|\mu|$. В соответствующих решениях

$$e^{\alpha t} \mathbf{a}, \quad e^{\bar{\alpha} t} \bar{\mathbf{a}} \quad (2.5)$$

уравнения (2.4) комплексный вектор $\mathbf{a}$ определен поэтому с точностью до комплексного скалярного множителя; $\bar{\mathbf{a}}$ — сопряженный вектор. Кроме того, в силу простоты не существует решений вида

$$e^{\alpha t} (t\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad \mathbf{b} \neq 0. \quad (2.6)$$

В точке $\mu = 0$ $\alpha(\mu)$ — аналитическая функция. Можно выбрать фиксированный действительный вектор $\mathbf{e} \neq 0$ так, чтобы для всех малых $|\mu|$ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} \neq 0$ для $\mathbf{a} \neq 0$. Тогда $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mu)$ единственным образом определяется условием

$$\mathbf{a}(\mu) \cdot \mathbf{e} = \frac{1}{\alpha(\mu) - \bar{\alpha}(\mu)}, \quad (\mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}} \neq 0). \quad (2.7)$$

По предположению

$$\alpha(0) = -\bar{\alpha}(0) \neq 0. \quad (2.8)$$

В точке $\mu = 0$ $\mathbf{a}(\mu)$ аналитична.

Действительные решения уравнения (2.4), являющиеся линейными комбинациями (2.5), имеют вид

$$\mathbf{z} = c e^{\alpha t} \mathbf{a} + \bar{c} e^{\bar{\alpha} t} \bar{\mathbf{a}} \quad (2.9)$$

с комплексным скаляром c . Они образуют семейство, зависящее от двух действительных параметров; один из этих параметров пропорционален множителю, а другой представляет собой аддитивную по t постоянную (решения образуют лишь однопараметрическое семейство кривых).

В силу того что $\mathbf{e} = \bar{\mathbf{e}}$, имеем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{z} \cdot \mathbf{e} &= c \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} + \bar{c} \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{e} &= c \alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{e} + \bar{c} \bar{\alpha} \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{e} \end{aligned} \right\} \text{ при } t = 0.$$

Для $c = 1$ (2.9) превращается в

$$\mathbf{z} = e^{\alpha t} \mathbf{a} + e^{\bar{\alpha} t} \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{z}(t, \mu). \quad (2.10)$$

В силу (2.7) это $\mathbf{z}$ удовлетворяет условиям:

$$t = 0: \mathbf{z} \cdot \mathbf{e} = 0, \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{z} \cdot \mathbf{e}) = 1. \quad (2.11)$$

Это единственное решение вида (2.9), удовлетворяющее этим условиям, так как из

$$t = 0: z \cdot e = \dot{z} \cdot e = 0$$

и из (2.9), (2.7) и (2.8) следует, что $c = 0$; таким образом, $z = 0$.

По предположению при $\mu = 0$ α и $\bar{\alpha}$ — единственные из всех характеристических показателей, являющиеся чисто мнимыми. Следовательно, для $\mu = 0$ (2.9) определяет все действительные периодические решения (2.4). Их период

$$T_0 = 2\pi / |\alpha(0)|. \quad (2.12)$$

В частности, для $\mu = 0$ (2.10) — единственное периодическое решение со свойствами (2.11).

Для дальнейшего заметим также, что при $\mu = 0$ (2.4) не имеет решений вида

$$tp(t) + q(t),$$

где p и q имеют общий период и p не тождественно равна нулю. Иначе бы (2.4) распалось на два уравнения

$$\dot{p} = L_0(p), \quad p + \dot{q} = L_0(q),$$

и p было бы нетривиальной линейной комбинацией (2.5). Разложение $q(t)$ в ряд Фурье приводило бы тогда к решению вида (2.6).

Дифференцируя (2.4) по μ в точке $\mu = 0$, получим неоднородное дифференциальное уравнение

$$\dot{z}' = L_0(z') + L'_0(z); \quad L'_0 = \frac{d}{d\mu} L_\mu(\mu = 0), \quad (2.13)$$

а для производной по μ от (2.10):

$$z' = t(\alpha' e^{\alpha t} a + \bar{\alpha}' e^{\bar{\alpha} t} \bar{a}) + (e^{\alpha t} a' + e^{\bar{\alpha} t} \bar{a}'), \quad (\mu = 0).$$

Множитель при t есть решение уравнения (2.4). Если его линейно выразить через решение (2.10) и z , то из (2.8) будет следовать, что

$$z' = t \left(\operatorname{Re}(\alpha') z + \frac{\operatorname{Im}(\alpha')}{\alpha} \cdot \dot{z} \right) + h(t) \quad (2.14)$$

где

$$h(t + T_0) = h(t). \quad (2.15)$$

Пусть теперь

$$y = y(t, \mu, \varepsilon, y^0)$$

решение (2.3), удовлетворяющее начальному условию $y = y^0$ при $t = 0$. Согласно хорошо известным теоремам, оно ана-

литически зависит от всех своих аргументов в каждой точке $(t, 0, 0, y^0)$. Это решение периодически с периодом T в том и только в том случае, когда оно удовлетворяет уравнению

$$y(T, \mu, \varepsilon, y^0) - y^0 = 0. \quad (2.16)$$

Если обозначить через z^0 начальное условие фиксированного решения (2.10) уравнения (2.4) при $\mu = 0$, то (2.16) выполняется при значениях

$$T = T_0, \quad \mu = \varepsilon = 0, \quad y^0 = z^0. \quad (2.17)$$

Возникает задача: для данного ε решить уравнение (2.16) относительно T , μ и y^0 . Это n уравнений с $(n + 2)$ неизвестными. Чтобы сделать решение единственным, добавим еще два уравнения

$$y^0 \cdot e = 0, \quad \dot{y}^0 \cdot e = 1, \quad (2.18)$$

где e — действительный вектор, введенный выше, а $\dot{y}^0 = \dot{y}$ при $t = 0$. Как будет показано в следующем параграфе, введение этих условий не налагает ограничений на все множество решений в малом. Из (2.11) следует, что для начальных условий $\mu = \varepsilon = 0$, $y^0 = z^0$ этим уравнениям удовлетворяют решения (2.10).

Для всех достаточно малых $|\varepsilon|$ (2.16) и (2.18) имеют точно одно решение

$$T = T(\varepsilon), \quad \mu = \mu(\varepsilon), \quad y^0 = y^0(\varepsilon) \quad (2.19)$$

в некоторой окрестности системы значений

$$T = T_0, \quad \mu = 0, \quad y^0 = z^0 \quad (2.20)$$

в следующем случае: система линейных уравнений, образованная взятием дифференциалов (в равенствах (2.16)) по переменным T , μ , ε , y^0 , имеет единственное решение при данном $d\varepsilon$. Это эквивалентно тому, что функции (2.19) существуют, если эти линейные уравнения при $d\varepsilon = 0$ имеют нулевое решение $dT = d\mu = dy^0 = 0$. Именно этот случай и осуществляется, как сейчас будет показано. Имеем

$$\dot{y} = L_\mu(y), \quad y = y(t, \mu, 0, y^0). \quad (2.21)$$

В частности,

$$y(t, \mu, 0, z^0) = z(t, \mu) \quad (2.22)$$

есть решение (2.10). Дифференциал $dy(t, \mu, 0, y^0)$ является суммой дифференциалов относительно отдельных аргументов, когда все остальные фиксированы. Если ввести для дифференциалов

$$dt, \quad d\mu, \quad dy^0,$$

как для независимых констант или векторов, обозначения

$$\rho, \sigma, u^0,$$

то вышеуказанный дифференциал запишется как $\rho \dot{y} + \sigma y' + u$. Здесь $\dot{y}$ и $y' = \partial y / \partial \mu$ берутся в точке $T = T_0$, $\mu = 0$, $y^0 = z^0$ и u — это решение

$$\dot{u} = L_0 u$$

с начальным условием u^0 при $t = 0$. Согласно (2.22), $\dot{y} = \dot{z}(t, 0)$. Если положить $y' = v$, тогда $v(t)$ — решение уравнения

$$\dot{v} = L_0(v) + L'_0(z), \quad v(0) = 0. \quad (2.23)$$

Линейное векторное уравнение, получающееся из (2.16), таково:

$$\rho \dot{z}(T_0) + \sigma v(T_0) + u(T_0) - u(0) = 0, \quad (2.24)$$

где $z(t)$ обозначает решение (2.10) уравнения

$$\dot{z} = L_0(z), \quad (2.25)$$

$u(t)$ — какое-нибудь решение этого однородного линейного дифференциального уравнения с постоянным L_0 , и $v(t)$ — решение (2.23). Покажем сейчас, что соотношение (2.24) возможно лишь тогда, когда $\rho = \sigma = 0$ и $u(t) = 0$.

Теперь для всех t

$$\rho \dot{z}(t) + \sigma [v(t + T_0) - v(t)] + u(t + T_0) - u(t) = 0. \quad (2.26)$$

Это выполняется, так как $z(t)$ имеет период T_0 , поэтому из (2.23) следует, что выражение в квадратных скобках есть решение (2.25); z также решение (2.25), следовательно, вся левая часть (2.26) есть решение (2.25). Из (2.24) и того обстоятельства, что $v(0) = 0$, следует, что начальное условие этого решения нулевое и, таким образом, оно тождественно равно нулю. Теперь из (2.13) и (2.23) следует, что

$$v(t) - z'(t) + g(t), \quad \dot{g}(t) = L_0(g).$$

Таким образом, по (2.14) и (2.15) квадратная скобка в (2.26) равна

$$T_0 \left[\operatorname{Re}(\alpha') \cdot z(t) + \frac{\operatorname{Im}(\alpha')}{\alpha} \cdot \dot{z}(t) \right] + [g(t + T_0) - g(t)].$$

Положим $u + \sigma g = w$ и

$$\sigma T_0 \operatorname{Re}(\alpha') \cdot z(t) + \left[\rho + \sigma T_0 \frac{\operatorname{Im}(\alpha')}{\alpha} \right] \dot{z}(t) = \dot{w}(t). \quad (2.27)$$

Тогда получим, что

$$\tilde{z}(t) + w(t + T_0) - w(t) = 0,$$

где $w(t)$ — решение, а $\tilde{z}(t)$ — периодическое решение (2.25). Это значит, что

$$w(t) = -\frac{t}{T_0} \tilde{z}(t) + q(t)$$

с периодической функцией q . Однако, как мы перед этим установили, таких решений не существует, если $\tilde{z} \neq 0$.

Так как z и $\dot{z}$ линейно независимы, то из (2.27) и предположения (1.2) следует, что $\sigma = 0$ и $\rho = 0$. Таким образом, по (2.24) $u(t)$ имеет период T_0 .

Наконец, так как $dy^0 = u^0$ и $\dot{y}^0 = \dot{u}$ при $t = 0$, из уравнений (2.18) следует, что $u \cdot e = \dot{u} \cdot e = 0$ при $t = 0$. Периодическое решение уравнения $\dot{u} = L_0(u)$ с такими свойствами обязано быть нулевым, как мы установили выше.

Этим завершается доказательство существования семейства периодических решений¹⁾.

Решения (2.19) аналитичны в точке $\varepsilon = 0$,

$$\begin{aligned} T &= T_0(1 + \tau_1 \varepsilon + \tau_2 \varepsilon^2 + \dots), \\ \mu &= \mu_1 \varepsilon + \mu_2 \varepsilon^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.28)$$

Периодические решения $y(t, \varepsilon)$ уравнения (2.23) и семейство периодических решений

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon y(t, \varepsilon) \quad (2.29)$$

уравнения (1.1) аналитичны в каждой точке $(t, 0)$.

Те же самые периодические решения получаются, если вместо T_0 начать с кратного периода mT_0 , т. е. если рассматривать окрестность системы значений

$$T = mT_0, \quad \mu = 0, \quad y^0 = z^0 \quad (2.30)$$

вместо (2.20). Ничего существенного в доказательстве не изменится.

3. Завершение доказательства теоремы

Для произвольно большого $L > T_0$ существуют два положительных числа a и b со следующими свойствами: каждое периодическое решение $x(t) \neq 0$ уравнения (1.1) с периодом меньше L , которое соответствует значению μ для $|\mu| < b$ и остается в области $|x| < a$, принадлежит семейству (2.29),

¹⁾ См. редакторские комментарии I в гл. 5А.

(2.28), $\varepsilon > 0$, если начало отсчета t выбрать подходящим образом.

Если бы это было не так, существовала бы последовательность периодических решений $x_k(t) \neq 0$, имеющих ограниченные периоды $T_k < L$, и соответствующих значений μ_k , таких, что

$$\kappa_k = \max_t |x_k(t)| \rightarrow 0, \quad \mu_k \rightarrow 0, \quad (3.1)$$

причем ни одна пара $x_k(t)$, μ_k не принадлежала бы указанному выше семейству.

Положим

$$y_k(t) = \frac{1}{\kappa_k} x_k(t).$$

$y_k(t)$ является решением (2.3) с κ_k вместо ε , и y_k удовлетворяет равенству

$$\max_t |y_k(t)| = 1.$$

Рассмотрим сначала подпоследовательность, для которой начальные значения сходятся, $y_k^0 \rightarrow z^0$. Тогда равномерно для $|t| < L$ имеем $y_k(t) \rightarrow z(t)$, где $\dot{z} = L_0(z)$ и $z(0) = z^0$. Так как максимум $|z|$ равен единице, z тождественно не равно нулю, поэтому z представляется в форме (2.9) и имеет основной период T_0 . Если сдвинуть начало отсчета t в функции $z(t)$ в ту точку, где $z \cdot e = 0$, то можно установить, что в ней $\dot{z} \cdot e \neq 0$. Эту величину можно считать положительной. В противном случае, так как

$$z\left(t + \frac{1}{2}T_0\right) = -z(t),$$

то этого можно достичь сдвигом из $t = 0$ в $1/2T_0$. Следовательно,

$$z^0 \cdot e = 0, \quad \dot{z}^0 \cdot e > 0.$$

Отсюда следует, что в окрестности z^0 и для малых κ и μ все решения дифференциального уравнения (2.3) (κ вместо ε) пересекают гиперплоскость $y \cdot e = 0$ однократно. Пусть для точек пересечения $t = 0$. Тогда нетрудно убедиться, что для рассматриваемой последовательности $y_k(t)$, κ_k , μ_k (с этим выбором начала отсчета) всегда $y_k^0 \rightarrow z^0$. Кроме того,

$$y_k^0 \cdot e = 0, \quad \rho_k = \dot{y}_k^0 \cdot e \rightarrow \dot{z}^0 \cdot e = \rho \rightarrow 0,$$

и $\kappa_k \rightarrow 0$, $\mu_k \rightarrow 0$. Если теперь положить

$$\tilde{y}_k(t) = \frac{1}{\rho_k} y_k(t) = \frac{1}{\rho_k \kappa_k} x_k(t), \quad \rho_k \kappa_k = \varepsilon_k,$$

тогда $\tilde{y}_k$ — решение (2.3) для значений параметров $\varepsilon_k > 0$ и μ_k . Для этого решения имеем

$$\tilde{y}_k \cdot e = 0, \quad \dot{\tilde{y}}_k \cdot e = 1, \quad t = 0. \quad (2.18)$$

Периоды в последовательности решений должны сходиться к кратному (относительно T_0) периоду mT_0 . Кроме того, $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Однако отсюда следует, что начиная с некоторого момента последовательность входит в упомянутую выше окрестность значений (2.20) или (2.30), в которой для всех достаточно малых ε существует только одно решение системы уравнений. Тогда решения из нашей последовательности должны принадлежать указанному выше семейству с $\varepsilon > 0$, что противоречит предположению. Таким образом, утверждение доказано¹⁾.

Из только что доказанного факта следует, что если $\mu(\varepsilon) \not\equiv 0$, то первый отличный от нуля коэффициент в разложении $\mu = \mu_1 \varepsilon + \mu_2 \varepsilon^2 + \dots$ — четного порядка; то же самое имеет место для разложения $T = T_0(1 + \tau_1 \varepsilon + \tau_2 \varepsilon^2 + \dots)$, так как для $\varepsilon < 0$ решения семейства и соответствующие значения μ и T должны уже содержаться среди решений для $\varepsilon > 0$ ²⁾. В частности,

$$\mu_1 = \tau_1 = 0. \quad (3.2)$$

При достаточно малых $|\mu|$ и $|x|$ периодические решения существуют только для $\mu > 0$, или только для $\mu < 0$, или только при $\mu = 0$.

4. Определение коэффициентов

Нам потребуется следующий результат, который дает критерий разрешимости неоднородной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{w} = L(w) + q, \quad (L = L_0), \quad (4.1)$$

где $q(t)$ имеет период T_0 . Пусть

$$\dot{z}^* = -L^*(z^*) \quad (4.2)$$

¹⁾ См. редакторские комментарии II в гл. 5А.

²⁾ И действительно, получаются при сдвиге начала отсчета приблизительно на $T_0/2$.

— дифференциальное уравнение, сопряженное к однородной части уравнения (4.1); L^* — сопряженный к L оператор (транспонированная матрица), определенный соотношением

$$L(u) \cdot v = u \cdot L^*(v)^1).$$

Тогда (4.1) имеет периодическое решение w с периодом T_0 , если и только если

$$\int_0^{T_0} q \cdot z^* dt = 0 \quad (4.3)$$

для всех решений (4.2), которые имеют период T_0 . Этот результат следует из известного критерия разрешимости системы линейных уравнений. Необходимость следует непосредственно из (4.1) и (4.2). Достаточность этого условия можно показать следующим образом. Сопряженное уравнение имеет те же самые характеристические показатели, и поэтому оно также имеет два решения вида

$$e^{\alpha t} a^*, \quad e^{-\alpha t} \bar{a}^*, \quad \alpha = \alpha(0) = -\bar{\alpha}(0), \quad (4.4)$$

из которых линейной комбинацией может быть образовано любое периодическое решение. Далее, разложение $q(t)$ в ряд Фурье показывает, что достаточно рассмотреть случай

$$q = e^{-\alpha t} b$$

и аналогичный случай с α вместо $-\alpha$. Подставим

$$w = e^{-\alpha t} c$$

в (4.1), получим

$$(\alpha I + L) \cdot c = b.$$

Из (4.4) и (4.2) следует

$$(\alpha I + L)^* a^* = 0,$$

в то время как (4.3) влечет за собой $b \cdot a^* = 0$. Отсюда с учетом теоремы вытекает требуемое утверждение.

Кроме того, нам потребуется следующий факт. Для каждого решения $z \neq 0$ уравнения $\dot{z} = L(z)$, имеющего период T_0 , всегда существует решение z^* сопряженного уравнения с тем же самым периодом, для которого

$$\int_0^{T_0} z \cdot z^* dt \neq 0^2).$$

¹⁾ В дальнейшем скалярное произведение двух комплексных векторов a и b определяется как $\sum \bar{a}_i b_i$.

²⁾ К тому же подинтегральное выражение всегда постоянно.

В противном случае уравнение $\dot{w} = L(w) + z$ имело бы решение w , а $w - tz$ ¹⁾ было бы решением однородного дифференциального уравнения, что противоречит простоте характеристического показателя α .

Пусть z_1^* и z_2^* суть два линейно независимых решения (4.2) с периодом T_0 . Пусть

$$[q]_i = \int_0^{T_0} q \cdot z_i^* dt, \quad (i = 1, 2).$$

Тогда критерий разрешимости (4.1) может быть записан как

$$[q]_1 = [q]_2 = 0. \quad (4.5)$$

Заметим также, что z_1^* , z_2^* могут быть выбраны так, чтобы

$$[z]_1 = [\dot{z}]_2 = 1, \quad [z]_2 = [\dot{z}]_1 = 0, \quad (4.6)$$

где z — решение (2.10) уравнения (2.4) с $\mu = 0$ (биортогонализация).

Задача определения коэффициентов степенного ряда для периодического семейства теперь может быть решена следующим общим способом. Если определить новую независимую переменную равенством

$$t = s(1 + \tau_2 \varepsilon^2 + \tau_3 \varepsilon^3 + \dots), \quad (4.7)$$

то, согласно (2.28), период в семействе решений $y = y(s, \varepsilon)$ станет постоянным, равным T_0 ; y как функция s (или t) аналитична в каждой точке $(s, 0)$. Получаем

$$y = y_0(s) + \varepsilon y_1(s) + \varepsilon^2 y_2(s) + \dots, \quad (4.8)$$

где все y_i имеют период T_0 . Производная по s будет снова обозначаться точкой. Для простоты будем писать

$$L_0 = L, \quad L'_0 = L', \quad Q_0 = Q, \quad K_0 = K, \dots$$

Тогда, используя (3.2) и подставляя (4.7) и (4.8) в (2.3), получим рекуррентные уравнения

$$\dot{y}_0 = L(y_0) \quad (y_0 = z), \quad (4.9)$$

$$\dot{y}_1 = L(y_1) + Q(y_0, y_0), \quad (4.10)$$

$$-\tau_2 \dot{y}_0 + \dot{y}_2 = L(y_2) + \mu_2 L'(y_0) + 2Q(y_0, y_1) + K(y_0, y_0, y_0), \quad (4.11)$$

.

¹⁾ В оригинале $w + tz$, что неверно.

из которых нужно определить y_i, μ_i, τ_i . В дополнение к ним имеем условия, вытекающие из (2.18):

$$y_k \cdot e = \dot{y}_k \cdot e = 0 \quad \text{при} \quad s = 0 \quad (4.12)$$

для $k = 1, 2, \dots$. В уравнениях мы опять пишем t вместо s . По (4.10) и (4.12) y_1 однозначно определяется как периодическая функция периода T_0 . Сначала с помощью (2.13) из (4.11) должна быть исключена L' . Так как круглые скобки в первом слагаемом (2.14) являются решением $\dot{z} = L(z)$, то (2.13) может быть записано в виде

$$\operatorname{Re}(\alpha') \cdot z + \frac{\operatorname{Im}(\alpha')}{\alpha} \dot{z} + \dot{h} = L(h) + L'(z). \quad (4.13)$$

Пусть

$$y_2 - \mu_2 h = v, \quad (4.14)$$

где v , согласно (2.15), имеет период T_0 . Так как $z = y_0$, то отсюда следует, что

$$\begin{aligned} -\mu_2 \operatorname{Re}(\alpha') y_0 - \left(\tau_2 + \mu_2 \frac{\operatorname{Im}(\alpha')}{\alpha} \right) \dot{y}_0 + \dot{v} = \\ = L(v) + 2Q(y_0, y_1) + K(y_0, y_0, y_0). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Таким образом, согласно (4.6),

$$\begin{aligned} \mu_2 \operatorname{Re}(\alpha') &= -[2Q(y_0, y_1) + K(y_0, y_0, y_0)]_1, \\ \tau_2 + \mu_2 \frac{\operatorname{Im}(\alpha')}{\alpha} &= -[2Q(y_0, y_1) + K(y_0, y_0, y_0)]_2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

В силу (1.2) отсюда могут быть определены μ_2 и τ_2 . Тогда можно разрешить (4.15) относительно v и из (4.14), (4.12) при $k = 2$ однозначно получить y_2 . Аналогичным образом из последующих рекуррентных формул могут быть получены все высшие коэффициенты. В общем случае $\mu_2 \neq 0$. Если μ_2 положительно, то периодические решения существуют лишь для $\mu > 0$; соответствующее утверждение имеет место для $\mu_2 < 0$ ¹⁾.

5. Характеристические показатели периодических решений

В дальнейшем мы иногда будем использовать определители; этого, однако, можно избежать. В линейном уравнении, полученном линеаризацией уравнения (2.3) в окрестности периодического решения

$$u = L_{t, \varepsilon}(u), \quad (5.1)$$

¹⁾ См. редакторские комментарии III в гл. 5А.

из (2.3) получаем

$$L_{t, \varepsilon}(\mathbf{u}) = L_{\mu}(\mathbf{u}) + 2\varepsilon Q_{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + 3\varepsilon^2 K_{\mu}(\mathbf{y}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) + \dots \quad (5.2)$$

Фундаментальная система $\mathbf{u}_i(t, \varepsilon)$, получающаяся для фиксированных начальных условий, аналитически зависит от (t, ε) . Коэффициенты в выражении $\mathbf{u}_i(T, \varepsilon) = \sum a_{iv}(\varepsilon) \cdot \mathbf{u}_v(0)$ аналитичны в точке $\varepsilon = 0$. Характеристическое уравнение

$$\|a_{ik}(\varepsilon) - \zeta \delta_{ik}\| = 0, \quad \zeta = e^{\lambda T(\varepsilon)} \quad (5.3)$$

определяет характеристические показатели λ_k и решения $\mathbf{v}$ уравнения (1.3), где

$$\mathbf{u} = e^{\lambda t} \mathbf{v}.$$

Так как (5.1) имеет решение $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{y}}$, то $\zeta = 1$ есть корень (5.3). Показатель β , о котором говорилось во введении, соответствует простому корню уравнения, полученному делением на $\zeta - 1$. Таким образом, $\beta(\varepsilon)$ действителен и аналитичен в точке $\varepsilon = 0$, $\beta = \beta_2 \varepsilon^2 + \dots$ (β_1 равен нулю на том же основании, что μ_1 и τ_1). Теперь, если $\beta \not\equiv 0$, тогда существует некоторый минор порядка $n - 1$ в определителе (5.3) (с соответствующим ζ), который не равен 0. Отсюда следует, что (1.3) при $\lambda = \beta$ имеет решение $\mathbf{v} \neq 0$, которое аналитично в точке $\varepsilon = 0$. Даже если $\beta \equiv 0$, то существует минор порядка $(n - 2)$, не равный нулю. Как известно, в этом случае существует решение уравнения (5.1), аналитическое в точке $\varepsilon = 0$, вида $\mathbf{u} = t\mathbf{v} + \mathbf{w}$ с периодическими $\mathbf{v}, \mathbf{w}$, где или $\mathbf{v} \neq 0$, или $\mathbf{v} = 0$ и $\mathbf{w}$ линейно не зависит от решения $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{y}}$ ¹⁾. Из того, что $t\mathbf{v} + \mathbf{w}$ — решение, следует, что

$$\dot{\mathbf{v}} = L_{t, \varepsilon}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} + \dot{\mathbf{w}} = L_{t, \varepsilon}(\mathbf{w}). \quad (5.4)$$

После этих предварительных замечаний приступим к вычислению β_2 . Предположим здесь, что $\mu_2 \neq 0$. Тогда, как будет далее показано, тождество $\beta \equiv 0$ невозможно. Если использовать (4.7) и ввести s как новое t в (1.3), то

$$(1 - \tau_2 \varepsilon^2 + \dots) \dot{\mathbf{v}} + \beta \mathbf{v} = L_{t, \varepsilon}(\mathbf{v}).$$

Имеем также (с новым t)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(t) + \varepsilon \mathbf{v}_1(t) + \varepsilon^2 \mathbf{v}_2(t) + \dots,$$

где все $\mathbf{v}_i$ имеют один и тот же период T_0 . Если рассмотреть степенные ряды для $\mu, \beta, \mathbf{v}, \mathbf{y}$, то отсюда будет следовать

¹⁾ См., например, Moulton F. R., Periodic Orbits, Washington, 1920, p. 26.

(индекс нуль в операторах, как и выше, опускается), что

$$\dot{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{L}(\mathbf{v}_0), \quad (5.5)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{L}(\mathbf{v}_1) + 2\mathbf{Q}(\mathbf{y}_0, \mathbf{v}_0), \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 \mathbf{v}_0 - \tau_2 \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\mathbf{v}}_2 = & \mathbf{L}(\mathbf{v}_2) + \mu_2 \mathbf{L}'(\mathbf{v}_0) + \\ & + 2\mathbf{Q}(\mathbf{y}_1, \mathbf{v}_0) + 2\mathbf{Q}(\mathbf{y}_0, \mathbf{v}_1) + 3\mathbf{K}(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{v}_0). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Эти уравнения имеют тривиальное решение

$$\beta_i = 0, \quad \mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{y}}_i \quad (i = 0, 1, \dots). \quad (5.8)$$

Таким образом, получаем

$$\ddot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{L}(\dot{\mathbf{y}}_1) + 2\mathbf{Q}(\mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}_0). \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} -\tau_2 \ddot{\mathbf{y}}_0 + \ddot{\mathbf{y}}_2 = & \mathbf{L}(\dot{\mathbf{y}}_2) + \mu_2 \mathbf{L}'(\dot{\mathbf{y}}_0) + 2\mathbf{Q}(\mathbf{y}_1, \dot{\mathbf{y}}_0) + \\ & + 2\mathbf{Q}(\mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}_1) + 3\mathbf{K}(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}_0). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Так как можно считать, что $\mathbf{v}_0 \neq 0$, то

$$\mathbf{v}_0 = \rho \mathbf{y}_0 + \sigma \dot{\mathbf{y}}_0^1), \quad (5.11)$$

где по крайней мере один из коэффициентов не 0. Если положить

$$\mathbf{v}_1 - 2\rho \mathbf{y}_1 - \sigma \dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{w}, \quad (5.12)$$

то из (4.10), (5.6) и (5.9) будет следовать, что $\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{L}(\mathbf{w})$, и, таким образом,

$$\mathbf{w} = \rho' \mathbf{y}_0 + \sigma' \dot{\mathbf{y}}_0. \quad (5.13)$$

Если образовать комбинацию (5.7) — ρ (4.11) — σ (5.10), в которой исключается $\mathbf{L}'$, и положить $\mathbf{v}_2 - \rho \mathbf{y}_2 - \sigma \dot{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{u}$, тогда, используя (5.11) и (5.12), можно получить

$$\beta_2 \mathbf{v}_0 + \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{L}(\mathbf{u}) + 2\rho (2\mathbf{Q}(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1) + \mathbf{K}(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0)) + \mathbf{R}, \quad (5.14)$$

где $\mathbf{R} = 2\mathbf{Q}(\mathbf{y}_0, \mathbf{w})$. Если теперь применить правило скобок предыдущего параграфа к (4.10) и (5.9), то из (5.13) будет следовать, что

$$[\mathbf{R}]_1 = [\mathbf{R}]_2 = 0.$$

Если его применить к (5.14), в котором $\mathbf{u}$ имеет период T_0 , то из (4.6) (с $\mathbf{z} = \mathbf{y}_0$) получим, что

$$\rho \beta_2 = 2\rho [2\mathbf{Q}(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1) + \mathbf{K}(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0)]_1.$$

¹⁾ ρ и σ в (5.11) не следует путать с символами ρ и σ , которые использовались в п. 2.

Следовательно, по (4.16)

$$\rho\beta_2 = -2\rho\mu_2 R(\alpha').$$

Аналогично получаем, что

$$\sigma\beta_2 = -2\rho\left(\tau_2 + \mu_2 \frac{\operatorname{Im}(\alpha')}{\alpha}\right).$$

Отсюда или β_2 дается формулой (1.4) (и тогда β_2 не нуль, так как $\mu_2 \neq 0$), или $\beta_2 = 0$. В обоих случаях $\rho:\sigma$ однозначно определено (во втором случае $\rho = 0$).

Чтобы проверить, что на самом деле осуществляется первый случай, нам придется предпринять несколько более длинное вычисление. Схематично можно представлять этот процесс следующим образом. Уравнение, связывающее β и v (а именно уравнение, которое следует за уравнением (5.4)) следует поделить на множитель в круглых скобках. Оно тогда примет вид

$$\dot{v} + \beta v = L_{t,\varepsilon}(v),$$

причем

$$L_{t,\varepsilon} = L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \dots,$$

где L_0 — постоянный оператор, а L_i , $i > 0$ периодически зависят от t с периодом T_0 . Коэффициенты при 1 и ε не меняются при делении. Раскладывая в степенные ряды, получим

$$\begin{aligned}\dot{v}_0 &= L_0(v_0), \\ \dot{v}_1 &= L_0(v_1) + L_1(v_0)^1,\end{aligned}\tag{5.15}$$

$$\beta_2 v_0 + \dot{v}_2 = L_0(v_2) + L_1(v_1) + L_2(v_0),$$

$$\beta_3 v_0 + \beta_2 v_1 + \dot{v}_3 = L_0(v_3) + L_1(v_2) + L_2(v_1) + L_3(v_0)$$

и так далее. Ситуация следующая. Для $\varepsilon = 0$ существует два решения $z, \dot{z}$ с периодом T_0 . Кроме того,

$$v_0 = \rho z + \sigma \dot{z}\tag{5.16}$$

и

$$[L_1(z)] = [L_1(\dot{z})] = 0\tag{5.17}$$

для обоих индексов при скобках. Отсюда следует, что

$$v_1 = \rho g + \sigma h + \rho' z + \sigma' \dot{z}\tag{5.18}$$

¹⁾ Можно не предполагать $\beta_1 = 0$. По правилу скобок это следует из (5.17).

с фиксированными периодическими функциями g и h . Для третьего из уравнений (5.15) правило скобок дает

$$\begin{aligned}\beta_2 \rho &= A_1 \rho + B_1 \sigma, \\ \beta_2 \sigma &= A_2 \rho + B_2 \sigma,\end{aligned}\tag{5.19}$$

где

$$\begin{aligned}A_i &= [L_1(g) + L_2(z)]_i, \\ B_i &= [L_1(h) + L_2(\dot{z})]_i,\end{aligned}\tag{5.20}$$

в то время как из (5.17) следует, что ρ' и σ' исключаются. Ситуация теперь такова, что уравнения (5.19) с неизвестными β_2 , ρ , σ имеют два различных действительных решения β_2 ¹⁾. К ним относятся две линейно независимых пары (ρ, σ) . Каждое из двух решений системы теперь приводит к однозначному определению β_i и v_i при помощи рекуррентных формул, если подходящим образом нормировать v . Чтобы это доказать, выберем постоянный вектор $a \neq 0$ таким образом, что $v_0 \cdot a = 1$ ($t = 0$) для обеих пар (ρ, σ) в (5.16). Тогда получаем, что

$$v \cdot a = 1, \quad t = 0,$$

т. е. $v_i \cdot a = 0$ при $t = 0$ для $i > 0$. Пусть

$$z \cdot a = C, \quad \dot{z} \cdot a = D \quad (t = 0).$$

Тогда для обоих значений β_2 система уравнений

$$\begin{aligned}(A_1 - \beta_2) \rho + B_1 \sigma &= 0, \\ A_2 \rho + (B_2 - \beta_2) \sigma &= 0, \\ C \rho + D \sigma &= 1\end{aligned}\tag{5.21}$$

однозначно определяет неизвестные ρ и σ . Теперь β_2 , ρ , σ , v_0 определены. Используя определения g , h и (5.18), из третьего уравнения (5.15) получаем

$$v_2 = \rho' g + \sigma' h + \rho'' z + \sigma'' \dot{z} + \dots,\tag{5.22}$$

где опущенные члены уже известны. Из четвертого уравнения (5.15) с использованием (5.18), (5.20), (5.22) и правила скобок получаем уравнения

$$\begin{aligned}\rho \beta_3 - (A_1 - \beta_2) \rho' - B_1 \sigma' &= \dots, \\ \sigma \beta_3 - A_2 \rho' - (B_2 - \beta_2) \sigma' &= \dots\end{aligned}$$

¹⁾ В общем случае, т. е. если специальные условия (5.17) не выполнены, расщепление на два случая происходит уже во втором уравнении (5.15). Решение задачи в этом случае можно найти в книге F. R. Moulton, *Periodic Orbits*. См. гл. 1, в особенности стр. 34 и 40.

Так как $v_1 \cdot a = 0$ ($t = 0$), добавляем к этим уравнениям уравнение

$$C\rho' + D\sigma' = \dots$$

Три величины β_2 , ρ' , σ' теперь однозначно определяются из этих трех уравнений. С помощью (5.21) устанавливается, что определитель равен

$$A_1 + B_2 - 2\beta_2.$$

Это выражение не равно нулю, так как по предположению (5.15) имеет два различных решения β_2 . Отсюда следует, что можно определить

$$\beta_3, \rho', \sigma' \text{ и } v_1.$$

Теперь легко видеть, что на следующем шаге β_4 , ρ'' , σ'' определяются из уравнений с точно такими же левыми частями, и дальше все определяется аналогичным образом.

Вернемся теперь к специальной задаче, которая нас интересует, и предположим, что при подходящей нормировке существует два различных формальных степенных ряда для пар (β, v) , которые удовлетворяют уравнению

$$(1 - \tau_2 \varepsilon^2 + \dots) \dot{v} + \beta v = L_{t, \varepsilon}(v).$$

С другой стороны, предварительно было показано, что при предположении $\beta \neq 0$ существует два действительных решения, одно из которых известно, именно (5.8). При этом предположении второе (нормированное) решение может, следовательно, быть представлено степенным рядом, и формула (1.4) для β_2 действительно имеет место.

Чтобы покончить с этим, мы должны еще показать, что если $\mu_2 \neq 0$, то случай $\beta \equiv 0$ не может осуществиться. Мы здесь набросаем только схему. Так как (5.19) имеет решение $\beta_2 = \rho = 0$ и второе $\beta_2 \neq 0$, то

$$B_1 = B_2 = 0, \quad A_1 \neq 0. \quad (5.23)$$

Если бы β было $\equiv 0$, тогда (5.4) имело бы решение с описанными здесь свойствами.

Разложение v и w в степенные ряды дает

$$\begin{aligned} v_0 + \dot{w}_0 &= L_0(w_0), \\ v_1 + \dot{w}_1 &= L_0(w_1) + L_1(w_0), \\ v_2 + \dot{w}_2 &= L_0(w_2) + L_1(w_1) + L_2(w_0). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Имеем

$$w_0 = \rho z + \sigma \bar{z}. \quad (5.25)$$

Так как v_0 также имеет этот вид, то, согласно правилу скобок, v_0 должно быть равно нулю. Аналогично из (5.17) следует, что $v_1 = 0$. Так же как в (5.18) находим, что

$$w_1 = \rho g + \sigma h + \rho' z + \sigma' \dot{z}.$$

Выше было показано, что уравнение $\dot{v} = L_{t, \varepsilon}(v)$ имеет решение (y) с периодом T_0 , единственное с точностью до множителя. Таким образом, мы получаем

$$v_2 = \lambda \dot{z}.$$

Как и выше, используя (5.20) и применяя правило скобок к (5.24), получаем уравнения

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 \rho + B_1 \sigma, \\ \lambda &= A_2 \rho + B_2 \sigma \end{aligned}$$

(в которых ρ' , σ' сокращаются). Согласно (5.23), отсюда следует $\rho = \lambda = 0$, откуда получаем $v_2 = 0$. Согласно (5.25), $w_0 = \sigma z$. Если вычесть из второго уравнения (5.4) решение σu уравнения $\dot{w} = L(w)$ и разделить на ε , то эта процедура может быть повторена; последовательно устанавливается, что $v_0 = 0$, и, значит, $v = 0$. Этим доказано, что β не может быть равно нулю.

Таким образом, при предположении $\mu_2 \neq 0$ проверка формулы (1.4) завершена. Это предположение можно было бы заменить предположением $\mu \neq 0$. Рассмотрение изменилось бы лишь в том, что при вычислении коэффициентов расщепление произошло бы позднее.

Трудности, возникающие при таком подходе, могли бы быть обойдены следующим образом. Сначала чисто формально, как и выше, вычисляются коэффициенты степенных рядов для β и v и непосредственно доказывается сходимость с помощью метода мажорант. Это соответствовало бы нашей цели облегчить приложение к дифференциальным уравнениям в частных производных. Но можно также провести рассмотрение случая расщепления и доказательство (1.4) исключительно с использованием определителей¹⁾.

¹⁾ См. редакторские комментарии IV в гл. 5А.

Глава 5А

РЕДАКТОРСКИЕ КОММЕНТАРИИ Л. Н. ХОВАРДА И Н. КОППЕЛЬ

1.1. Рассуждения Хопфа могут быть значительно упрощены. После приведения уравнения (1.1) к виду (2.3) нужно показать, что для любого достаточно малого ε существуют $\mu(\varepsilon)$, период $T(\varepsilon)$ и начальные условия $y_0(\varepsilon)$ (подходящим образом нормированные), такие, что имеет место (2.16); семейство решений системы (1.1), существование которых утверждается в теореме, будет тогда

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon y(t, \mu(\varepsilon), \varepsilon, y_0).$$

Теперь (2.16) удовлетворяется, если $\mu = \varepsilon = 0$, $y_0 = z_0$. Следовательно, существование функций $\mu(\varepsilon)$, $T(\varepsilon)$, $y_0(\varepsilon)$ следует из простых теоретико-функциональных рассуждений при условии, что матрица

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial \mu}, \frac{\partial y}{\partial y_0} \right) \Big|_{t=T_0, \mu=0, \varepsilon=0, y_0=z_0}$$

имеет максимальный ранг. (Здесь $\frac{\partial y}{\partial y_0} — (n \times (n-2))$ -матрица, представляющая производные y по $(n-2)$ начальным направлениям; существуют два ограничения на начальные условия из-за нормировки.) Мы покажем ниже, как можно легко вычислить ранг этой матрицы.

Пусть r и l — правый и левый собственные векторы, соответствующие чисто мнимому собственному значению L_0 ; после перенормировки времени можно считать, что это собственное значение есть i ($\bar{r}$ и $\bar{l}$ — собственные векторы для $-i$). Можно также предположить, что $l \cdot r = 1$. Пусть $L' = \frac{d}{d\mu} L_\mu \Big|_{\mu=0}$. Заметим, что предположение (1.2) может быть перефразировано: $\operatorname{Re}(l \cdot L' r) \neq 0$. (Чтобы увидеть это, рассмотрим собственный вектор $e(\mu)$ матрицы L_μ , который соответствует собственному значению $\alpha(\mu)$, близкому к чисто мнимому собственному значению, и нормирован условием $l \cdot e = 1$, т. е. $e(0) = r$. Дифференцируя $L_\mu e = \alpha(\mu) e$ по μ в точке $\mu = 0$, получим

$$L_0 \frac{de}{d\mu} + L' r = \alpha'(0) r + \alpha(0) \frac{de}{d\mu}. \quad (5A.1)$$

Далее, $l \cdot \frac{de}{d\mu} = 0$ и $lL_0 = \alpha(0)l$. Следовательно, если (5А.1) помножим на l слева, получим $l \cdot L'r = \alpha'(0).$

Пусть y определен равенством $y = x/\varepsilon$, t заменено на $s = t/(1 + \tau)$, где τ подобрано так (для каждого ε), что период по s равен 2π . Тогда (1.1) переходит в

$$\frac{dy}{ds} = (1 + \tau)[L_\mu y + \varepsilon S(y, \varepsilon, \mu)].$$

Для каждого ε , τ и μ построим решение с начальным условием $y(0)$ и нормировкой $y(0) = \frac{1}{2}(r + \bar{r}) + z$, где $l \cdot z = \bar{l} \cdot z = 0$ (Следовательно, начальные условия параметризованы точками $(n-2)$ -мерного пространства $W = (l \oplus \bar{l})^\perp$. Заметим, что из-за простоты мнимого собственного значения W трансверсально к $r \oplus \bar{r}$.) Это решение обозначим через $y(s, \tau, \mu, z, \varepsilon)$.

Пусть $V(\tau, \mu, z, \varepsilon) = y(2\pi, \tau, \mu, z, \varepsilon) - y(0, \tau, \mu, z, \varepsilon)$. При $\mu = \tau = \varepsilon = 0$, $z = 0$ имеем $y(s) \equiv y_0(s) = \operatorname{Re}(re^{is})$ и $V = 0$. Чтобы показать, что существует семейство 2π -периодических функций с $\tau = \tau(\varepsilon)$, $\mu = \mu(\varepsilon)$, $z = z(\varepsilon)$, достаточно показать, что $\frac{\partial V}{\partial(\tau, \mu, z)}$ имеет ранг n при $\mu = \tau = \varepsilon = 0$, $z = 0$.

Пусть $y_\tau(s) = \frac{\partial y}{\partial \tau}(s, 0, 0, 0, 0)$. Тогда y_τ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dy_\tau}{ds} = L_0 y_\tau + L_0 y_0$$

с начальным условием $y_\tau(0) = 0$. Решением этого уравнения является $y_\tau = s \frac{dy_0}{ds}$, откуда следует, что $\frac{\partial V}{\partial \tau} = 2\pi \frac{i}{2}(r - \bar{r}) = -2\pi \operatorname{Im} r$.

Теперь мы вычислим $y_\mu(s) = \frac{\partial y}{\partial \mu}(s, 0, 0, 0, 0)$, которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{ds} y_\mu = L_0 y_\mu + L' y_0$$

с начальным условием $y_\mu(0) = 0$. Так как $L' y_0 = \operatorname{Re} L' r e^{is}$, то y_μ является действительной частью η , где η удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{ds} \eta - L_0 \eta = L' r e^{is} \quad (5A.2)$$

с начальным условием $\eta(0) = 0$. Частное решение (5А.2) равно $y = s(l \cdot L'r)re^{is} + be^{is}$, где b — произвольный ком-

плексный вектор, удовлетворяющий условию

$$(iI - L_0) \mathbf{b} + (1 \cdot L' \mathbf{r}) \mathbf{r} = L' \mathbf{r}; \quad (5A.3)$$

хотя оператор $iI - L_0$ вырожден, все же (5A.3) может быть разрешено относительно $\mathbf{b}$, так как $1 \cdot (L' \mathbf{r} - (1 \cdot L' \mathbf{r}) \mathbf{r}) = 0$. Все решения $\mathbf{b}$ имеют вид $\mathbf{b}_0 + k \mathbf{r}$ с произвольным k . Существует единственное значение $\mathbf{b}$, для которого $1 \cdot \operatorname{Re} \mathbf{b} = \bar{1} \cdot \operatorname{Re} \mathbf{b} = 0$ (нужно взять $k = -1 \cdot (\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_0)$). Воспользуемся этим значением $\mathbf{b}$. Тогда решение (5A.2), удовлетворяющее $\eta(0) = 0$, имеет действительную часть

$$\eta_\mu = \operatorname{Re} \{(s(1 \cdot L' \mathbf{r}) \mathbf{r} + \mathbf{b}) e^{is}\} + \gamma,$$

где $\frac{d\gamma}{ds} = L_0 \gamma$ и $\gamma(0) = -\operatorname{Re} \mathbf{b}$. Следовательно, $\frac{dV}{d\mu} = 2\pi \times \times \operatorname{Re}(1 \cdot L' \mathbf{r}) \mathbf{r} + \gamma(2\pi) - \gamma(0)$. Заметим, что $\gamma(2\pi) - \gamma(0) = \gamma_1$ удовлетворяет условию $1 \cdot \gamma_1 = \bar{1} \cdot \gamma_1 = 0$. (Это следует из того, что $\frac{d}{ds}(1 \cdot \gamma) = 1 \cdot L_0 \gamma = i1 \cdot \gamma$. Так как $1 \cdot \gamma(0) = -1 \cdot \operatorname{Re} \mathbf{b} = 0$, $1 \cdot \gamma(s) \equiv 0$. Аналогично, $\bar{1} \cdot \gamma(s) \equiv 0$.)

Наконец, вычислим $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{z}}$. Пусть δy — вариация y , определенная вариацией $\delta \mathbf{z}$ в начальных условиях. Тогда $\delta y(s)$ удовлетворяет системе $\frac{d}{ds}(\delta y) = L_0(\delta y)$, $\delta y(0) = \delta \mathbf{z}$ и $1 \cdot \delta \mathbf{z} = \bar{1} \cdot \delta \mathbf{z} = 0$. Отсюда следует равенство $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{z}}(\delta \mathbf{z}) = (e^{2\pi L_0} - I) \delta \mathbf{z}$. Далее, $\delta \mathbf{z}$ лежит в подпространстве W , ортогональном к 1 и $\bar{1}$. Так как не существует других чисто мнимых собственных значений L_0 (в частности, нет значений, кратных $\pm i$), то матрица $(e^{2\pi L_0} - I)$ обратима на W . Следовательно, $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{z}}$ имеет ранг $n - 2$.

Пространство $\mathbb{R}^n$ теперь является прямой суммой W и линейной оболочки $\operatorname{Re} \mathbf{r}$ и $\operatorname{Im} \mathbf{r}$ (это следует из простоты чисто мнимого собственного значения). Образ $(e^{2\pi L_0} - I)$ есть W , поэтому $\frac{\partial V}{\partial(\tau, \mu, \mathbf{z})}$ имеет ранг n тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} \mathbf{r}$ и $\operatorname{Re}(1 \cdot L' \mathbf{r}) \mathbf{r}$ независимы. Это, очевидно, выполнено, если $\operatorname{Re}(1 \cdot L' \mathbf{r}) \neq 0$.

I.2. Рассуждения этого раздела не требуют аналитичности, достаточно выполнения условий теоремы о неявной функции. Следовательно, это позволяет получить доказательство при помощи C^r -варианта этой теоремы. Точнее, предположим, что $F(x, \mu)$ дифференцируема r раз по x и μ . Тогда правая часть (2.3) r раз дифференцируема по x и μ , но лишь $y - 1$ раз по ε . Функция $V(\tau, \mu, \mathbf{z}, \varepsilon)$, определенная выше, класса C^{r-1} .

по ε и по меньшей мере C^r по другим переменным. Следовательно, теорема о неявной функции утверждает, что функции $\tau(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$, $z(\varepsilon)$ и $y(s, \varepsilon) \equiv y(s, \mu(\varepsilon), \varepsilon, z(\varepsilon))$ класса C^{r-1} . Периодические решения (1.1), а именно $x(t, \varepsilon) = y\left(\frac{t}{1 + \tau(\varepsilon)}, \varepsilon\right)$, будут класса C^r .

II. Полученные Хопфом результаты о единственности слабее, чем в теореме (3.15) настоящей книги. Конкретнее, в работе Хопфа не доказано, что найденное периодическое решение единственно в некоторой окрестности особой точки. Например, рассуждения Хопфа не исключают существования последовательности периодических функций $x_k(t)$, таких, что $\max |x_k(t)| \rightarrow 0$ вместе с $\mu_k \rightarrow 0$, а периоды $T_k \rightarrow \infty$. Невозможность этого следует из теоремы о центральном многообразии, которая утверждает, что каждая точка, не лежащая на центральном многообразии, должна, по крайней мере на время, покинуть достаточно малую окрестность особой точки или она стремится к центральному многообразию при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, центральное многообразие содержит все достаточно малые замкнутые орбиты; так как центральное многообразие трехмерно (включая размерность параметра), единственность периодического решения есть следствие единственности для двумерной теоремы.

III. Формулы, эквивалентные формулам Хопфа, но более удобные в употреблении, могут быть получены проще. Основная идея — использовать « e^{is} »-форму решений более явно и благодаря этому обойтись без введения правила скобок.

Предположим снова, что время перенормировано так, что чисто мнимыми собственными значениями L_0 являются $\pm i$, и будем использовать обозначения, введенные в п. I. Следуя Хопфу, используем перенормировку $t = (1 + \tau(\varepsilon))s$, $\tau(0) = 0$, и положим $x = \varepsilon y$. Тогда (1.1) перейдет в

$$\dot{y} = [1 + \tau(\varepsilon)] [L_0 y + \mu L' y + \varepsilon Q(y, y) + \varepsilon^2 K(y, y, y) + \dots], \quad (5A.4)$$

где Q и K — квадратичные и кубичные члены при $\mu = 0$.

Пусть 2π -периодическое решение (5A.4) будет $y(s, \varepsilon) = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots$, где, как и выше, $y_0 = \operatorname{Re}(e^{is} r)$, а y_i — 2π -периодичны, причем $1 \cdot y_i(0) = \bar{1} \cdot y_i(0) = 0$ для $i \geq 1$. (Так как y_i действительно, можно просто потребовать $1 \cdot y_i(0) = 0$.)

Чтобы получить рекуррентные уравнения для y_i , ряд для $y(s, \varepsilon)$ подставляется в (5A.4) и собираются члены при одинаковых степенях ε . При этом используется то обстоятель-

ство, что $\tau_1 = \mu_1 = 0$, поэтому $\tau = \varepsilon^2 \tau_2 + \dots$ и $\mu = \varepsilon^2 \mu_2 + \dots$. Получаем, что y_1 должен удовлетворять соотношению

$$y_1 = Ay_1 + Q(y_0, y_0), \text{ а } Q(y_0, y_0) = \frac{1}{2} Q(r, \bar{r}) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[e^{2is} Q(r, r)].$$

Периодическое решение этого уравнения равно $a + \operatorname{Re}(ce^{2is})$, где a и c — постоянные векторы, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} -L_0 a &= \frac{1}{2} Q(r, \bar{r}), \\ (2iI - L_0) c &= \frac{1}{2} Q(r, r). \end{aligned} \quad (5A.5)$$

(Так как $-L_0$ и $2iI - L_0$ не вырождены, то эти формулы определяют a и c .) Таким образом, $y_1 = a + \operatorname{Re}(ce^{2is}) + \operatorname{Re}(c_1 re^{is})$, где комплексное число c_1 выбрано так, чтобы $l \cdot y_1(0) = 0$; используя (5A.5), легко установить, что

$$c_1 = \frac{1}{2} l \cdot \left[Q(r, \bar{r}) - \frac{1}{2} Q(r, r) + \frac{1}{6} Q(\bar{r}, \bar{r}) \right].$$

Далее, y_2 есть периодическое решение уравнения

$$\dot{y}_2 = L_0 y_2 + \mu_2 L' y_0 + 2Q(y_0, y_1) + K(y_0, y_0, y_0) + \tau_2 L_0 y_0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 - L_0 y_2 &= \operatorname{Re} \mu_2 L' r e^{is} + \operatorname{Re} Q(r e^{is} + \bar{r} e^{-is}, a + ce^{2is} + C_1 r e^{is}) + \\ &+ \frac{1}{4} \operatorname{Re} [K(r, r, r) e^{3is} + 3K(r, r, \bar{r}) e^{is}] + \tau_2 \operatorname{Re} [i r e^{is}] = \\ &= \operatorname{Re} \{ C_1 Q(\bar{r}, r) + e^{is} [(\mu_2 L' + i\tau_2 I) r + 2Q(r, a) + Q(r, c) + \\ &+ \frac{3}{4} (r, r, \bar{r})] + e^{2is} C_1 Q(r, r) + e^{3is} [Q(r, c) + \frac{1}{4} K(r, r, r)] \}. \end{aligned}$$

Эти уравнения имеют периодическое решение тогда и только тогда, когда нет резонанса, для чего требуется, чтобы коэффициент при e^{is} в этой последней формуле был ортогонален к l (неявное правило скобок). Таким образом,

$$\begin{aligned} \mu_2 (l \cdot L' r) + i\tau_2 &= -2l \cdot Q(r, a) - l \cdot Q(\bar{r}, c) - \\ &- \frac{3}{4} l \cdot K(r, r, \bar{r}) \equiv B. \end{aligned}$$

Отсюда получаем формулы для μ_2 и τ_2 :

$$\begin{aligned} \mu_2 \operatorname{Re}(l \cdot L' r) &= -\operatorname{Re} B, \\ \tau_2 &= -\mu_2 \operatorname{Im}(l \cdot L' r) - \operatorname{Im} B, \end{aligned} \quad (5A.6)$$

где a и c — решения (5A.5). (Эти формулы не меняются, если собственным значением вместо i будет $i\omega$, лишь c будет ре-

шением уравнения $(2i\omega I - L_0) c = \frac{1}{2} Q(r, r)$, а не второго уравнения (5А.5) и, кроме того, значение C_1 , данное выше, будет поделено на ω .)

Формулы (5А.6) эквивалентны формулам Хопфа (4.16). Определение левого собственного вектора $\bar{l}$ и решение линейных уравнений (5А.5) заменяет нахождение присоединенных собственных функций и вычисление интегралов, использующееся при применении правила скобок.

IV.1. Переводчики должны признать, что они нашли этот параграф несколько менее прозрачным, чем остальную часть работы. В своей работе Джозеф и Сэттинджер [1] указали на явный порочный круг в некоторых рассуждениях Хопфа. Ими также показано, как легче всего это исправить.

IV.2. Соотношение между β — показателем Флоке периодического решения вблизи нуля — и коэффициентом μ_2 может быть найдено сравнительно небольшими вычислениями. Рассматриваемая система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F_\mu(x), \\ \dot{\mu} &= 0\end{aligned}\tag{5А.7}$$

имеет в начале координат состояние равновесия. В этой критической точке существует три собственных значения с нулевой действительной частью: нулевое собственное значение с собственным вектором, лежащим на оси μ , и пара мнимых собственных значений $\pm i$ (после подходящей перенормировки времени) с собственными векторами r и $\bar{r}$. Все остальные собственные значения отделены от мнимой оси, следовательно, эта особая точка имеет трехмерное центральное многообразие. Это центральное многообразие должно содержать ось μ , периодическое решение, даваемое теоремой Хопфа, и каждую траекторию, которая для всех значений времени остается вблизи начала координат; оно касается линейного пространства, натянутого на ось μ и действительную и мнимую части r . Пусть $x = \varepsilon(\xi r + \bar{\xi} \bar{r}) + x_2$, где $\bar{l} \cdot x_2 = \bar{l} \cdot x_2 = 0$. На $\varepsilon \geq 0$ можно смотреть как на замену параметра μ , осуществляемую функцией $\mu(\varepsilon)$ из теоремы Хопфа: $\mu = \mu(\varepsilon) = \mu_2 \varepsilon^2 + \dots$; теперь мы предполагаем $\mu_2 \neq 0$. Таким образом, можно мыслить себе действительную и мнимые части ξ и ε как параметры на центральном многообразии. Для любых (x, μ) на этом многообразии $x_2 = O(\varepsilon^2)$, так как оно по меньшей мере квадратично по $\bar{l} \cdot x = \varepsilon \xi$ и $\bar{l} \cdot x = \varepsilon \bar{\xi}$. Таким образом, можно написать уравнение центрального многообразия как

$\mu = \mu(\varepsilon)$, $x_2 = \varepsilon^2 g(\zeta, \bar{\zeta}, \varepsilon)$, где $l \cdot g = \bar{l} \cdot g = 0$ и g по меньшей мере квадратична по ζ и $\bar{\zeta}$. Тогда, используя обозначения пунктов (I) и (III) этой главы, для каждой траектории на центральном многообразии получаем

$$\begin{aligned} r\dot{\zeta} + \bar{r}\dot{\bar{\zeta}} + \varepsilon(g_{\zeta}\dot{\zeta} + g_{\bar{\zeta}}\dot{\bar{\zeta}}) = i\zeta r - i\bar{\zeta}\bar{r} + \varepsilon L_0 g + \\ + \mu_2 \varepsilon^2 L'(\zeta r + \bar{\zeta}\bar{r}) + \varepsilon Q(\zeta r + \bar{\zeta}\bar{r}) + 2\varepsilon^2 Q(\zeta r + \bar{\zeta}\bar{r}, g) + \\ + \varepsilon^2 C(\zeta r + \bar{\zeta}\bar{r}) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (5A.8)$$

Умножая слева на l , получим

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} = i\zeta + \mu_2 \varepsilon^2 l \cdot L'(\zeta r + \bar{\zeta}\bar{r}) + \\ + \varepsilon l \cdot [\zeta^2 Q(r, r) + 2\zeta\bar{\zeta}Q(r, \bar{r}) + \bar{\zeta}^2 Q(\bar{r}, \bar{r})] + \varepsilon^2 \gamma(\zeta, \bar{\zeta}) + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (5A.9)$$

где γ кубична по ζ и $\bar{\zeta}$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\begin{aligned} I(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{1}{2} \zeta \bar{\zeta} + \varepsilon \operatorname{Re} \left[\frac{i\zeta^3}{3} \bar{l} \cdot Q(r, r) + i\zeta^2 \bar{\zeta} (2\bar{l} \cdot Q(r, \bar{r}) + \right. \\ \left. + l \cdot Q(r, r)) \right]. \end{aligned}$$

Как мы увидим ниже, $I(\zeta, \bar{\zeta})$ «почти» инвариантна вдоль траекторий, лежащих на центральном многообразии. Для каждой траектории на центральном многообразии, используя (5A.9) и уравнение, комплексно-сопряженное с ним, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} = \operatorname{Re} \{ \dot{\zeta} \bar{\zeta} + \varepsilon [i\zeta^2 \dot{\bar{\zeta}} \bar{l} \cdot Q(r, r) + i(\zeta^2 \dot{\bar{\zeta}} + 2\zeta \dot{\bar{\zeta}} \bar{\zeta}) (2\bar{l} \cdot Q(r, \bar{r}) + \\ + l \cdot Q(r, r))] \} = \\ = \operatorname{Re} \{ i\zeta \bar{\zeta} + \varepsilon l \cdot [\zeta^2 Q(r, r) + 2\zeta \bar{\zeta} Q(r, \bar{r}) + \bar{\zeta}^3 Q(\bar{r}, \bar{r})] + \\ + \varepsilon [-\zeta^3 \bar{l} \cdot Q(r, r) + (\zeta^2 \bar{\zeta} - 2\zeta^2 \bar{\zeta}) \cdot (2\bar{l} \cdot Q(r, \bar{r}) + l \cdot Q(r, r))] + \\ + \mu_2 \varepsilon^2 \bar{\zeta} l \cdot L'(\zeta r + \bar{\zeta}\bar{r}) + \varepsilon^2 \bar{\zeta} \gamma(\zeta, \bar{\zeta}) + \varepsilon^2 \delta(\zeta, \bar{\zeta}) \} + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

где δ квадратична по ζ и $\bar{\zeta}$. Члены порядка ε в соотношении выше:

$$\begin{aligned} \varepsilon \operatorname{Re} \{ \bar{\zeta}^3 l \cdot Q(\bar{r}, \bar{r}) - \zeta^3 \bar{l} \cdot Q(r, r) + \bar{\zeta} \zeta^2 l \cdot Q(r, r) - \\ - \bar{\zeta} \zeta^2 l \cdot Q(r, r) + 2\bar{\zeta} \bar{\zeta}^2 l \cdot Q(r, \bar{r}) - 2\bar{\zeta} \zeta^2 \bar{l} \cdot Q(r, \bar{r}) \} \equiv 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{dI}{dt} = \mu_2 \varepsilon^2 \operatorname{Re} [\bar{\zeta} l \cdot L'(\zeta r + \bar{\zeta}\bar{r})] + \varepsilon^2 \delta_1(\zeta, \bar{\zeta}) + O(\varepsilon^3), \quad (5A.10)$$

где δ_1 также квадратична по ζ и $\bar{\zeta}$, т. е. $\frac{dI}{dt}$ имеет порядок ε^2 . ($I_0 = \frac{1}{2} |\zeta|^2$ также почти инвариант, но $\frac{dI_0}{dt}$ есть $O(\varepsilon)$), тогда как $\frac{dI}{dt}$ лишь $O(\varepsilon^2)$. Если мы рассмотрим траекторию на центральном многообразии, начинающуюся при $t = 0$ в точке $\zeta = \bar{\zeta} = c$, то мы видим из (5А.9), что она с точностью до $O(\varepsilon)$ дается формулой $\zeta = ce^{it}$; таким образом, через время, приблизительно равное 2π , она должна каждый раз возвращаться во множество $\text{Im } \zeta = 0$. Эта дуга с точностью до $O(\varepsilon)$ является окружностью, но более аккуратно (с точностью до $O(\varepsilon^2)$) она описывается как линия уровня функции I .

Из (5А.10) видно, что приращение I при однократном обороте вдоль этого пути с точностью до $O(\varepsilon^2)$ дается формулой

$$\Delta I = 2\pi [\mu_2 \varepsilon^2 c^2 \text{Re}(l \cdot L' r) + \varepsilon^2 c^4 \delta_2], \quad (5А.11)$$

где $\delta_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta_1(e^{it}, e^{-it}) dt$. Однако мы знаем, что если $c = 1$,

то решение является периодическим, и для него $\Delta I = 0$; следовательно, $\delta_2 = -\mu_2 \text{Re}(l \cdot L' r) = -\mu_2 \text{Re}(\alpha'(0))$, как отмечено в I. Таким образом, вообще говоря,

$$\Delta I = 2\pi \varepsilon^2 \mu_2 \text{Re}(\alpha'(0)) (c^2 - c^4) + O(\varepsilon^3). \quad (5А.12)$$

Так как $c = 1$ дает периодическое решение, член $O(\varepsilon^3)$ также делится на $(c - 1)$. Получаем, что для c , близких к 1, (5А.12) может быть записано:

$$\Delta I = 2\pi \varepsilon^2 (c - 1) [-2\mu_2 \text{Re} \alpha'(0) + O(c - 1)]. \quad (5А.13)$$

Для малых ε каждая траектория на центральном многообразии с $\zeta = O(1)$ должна идти близко к окружности. Однако она не может стать периодической, если не пройдет через точку $\zeta = 1$. Следовательно, из (5А.12) вытекает, что при $\mu_2 \text{Re} \alpha'(0) > 0$ все траектории на центральном многообразии (при фиксированном ε и, следовательно, μ), которые лежат внутри периодического решения, должны накручиваться на него при $t \rightarrow \infty$ (или при $t \rightarrow -\infty$, если $\mu_2 \text{Re} \alpha'(0) < 0$).

Так как I приближенно равно $\frac{1}{2} |\zeta|^2$, то $\Delta I \cong (\zeta(2\pi) - c)c$.

Таким образом, из (5А.13) следует, что эти траектории асимптотически приближаются к периодическому решению с показателем экспоненты $\beta = -2\varepsilon^2 \mu_2 \text{Re} \alpha'(0) + O(\varepsilon^3)$, который поэтому должен являться наименьшим ненулевым показателем Флоке.

IV.3. Уравнение (5A.12) в действительности дает нам больше; из него следует, что мы можем приближенно описывать траектории на центральном многообразии как медленно расширяющиеся (или сжимающиеся, если $\mu_2 \operatorname{Re} \alpha'(0) < 0$) окружности, радиус которых меняется согласно формуле

$$c^2 = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{th} (\varepsilon^2 \mu_2 \operatorname{Re} \alpha'(0) (t - t_1))),$$

где t_1 — момент времени, для которого $c^2 = 1/2$.

IV.4. Функция I может быть также использована для связи вышеизложенного материала с условием «слабого аттрактора»¹⁾. Если положить $\mu = 0$, то n -мерная система $\dot{x} = F_0(x)$ имеет двумерное центральное многообразие особой точки 0, касающееся линейного пространства, натянутого на действительную и мнимую части r . Как и в предыдущем параграфе, положим $x = \varepsilon(\zeta r + \bar{\zeta} \bar{r}) + x_2$, где $1 \cdot x_2 = \bar{1} \cdot x_2 = 0$. На этом центральном многообразии $x_2 = O(\varepsilon^2)$ и по меньшей мере квадратично по ζ и $\bar{\zeta}$; ε теперь — произвольный масштабный множитель. Для каждой траектории на этом центральном многообразии устанавливается та же самая формула (5A.9), за исключением опущенного члена с $\mu_2 L'$; другие члены, записанные внизу, получаются из зависящих от μ членов в разложении функции F_μ . Если мы теперь рассмотрим функцию I для траектории на центральном многообразии, то снова получим (5A.10) без члена с μ_2 , но с тем же самым δ_1 ; интегрируя по периоду, получим (5A.11) без члена с μ_2 , но с тем же самым δ_2 . Так как $\delta_2 = -\mu_2 \operatorname{Re} \alpha'(0)$, то для траекторий на центральном многообразии при $\mu = 0$ с точностью до ε^2 имеем

$$\Delta \left(\frac{1}{2} c^2 \right) = -2\pi \varepsilon^2 \mu_2 \operatorname{Re} \alpha'(0) c^4,$$

или

$$\Delta(\varepsilon c) = -2\pi \mu_2 \operatorname{Re} \alpha'(0) (\varepsilon c)^3.$$

Так как $\Delta(\varepsilon c)$ есть $V(x_1)$ (отображение Пуанкаре минус тождественное), где $\varepsilon c = x_1$ является координатой $\operatorname{Re}(1 \cdot x)$, то

$$V'''(0) = -2\pi \mu_2 \operatorname{Re}(\alpha'(0)) \cdot 6 = -2\pi \operatorname{Re}(\alpha'(0)) \cdot 3\mu''(0).$$

Это связывает проведенные здесь вычисления с вычислениями условий устойчивости в гл. 4.

¹⁾ См. п. 3.12 гл. 3. — Прим. ред.

Глава 6

БИФУРКАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

Пусть X — векторное поле, φ_t — поток поля X и γ — замкнутая орбита потока φ_t . Пусть P — отображение Пуанкаре орбиты γ (см. гл. 2В). Предположим, что существует замкнутая кривая σ , инвариантная относительно P . Ясно, что $\bigcup_t \varphi_t(\sigma)$ есть инвариантный тор потока (см. рис. 6.1).

Если у нас имеется однопараметрическое семейство векторных полей X_μ и их замкнутых орбит γ_μ , то легко представить себе ситуацию, когда γ_μ устойчива при малых μ , а при больших μ она становится неустойчивой и вместо нее появляется устойчивый инвариантный тор¹⁾.

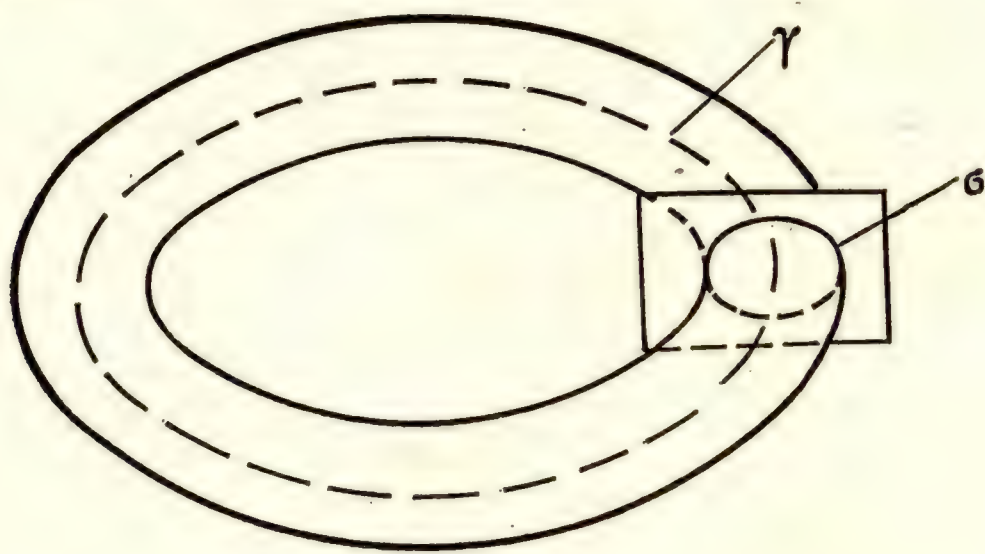


Рис. 6.1.

Напомним, что γ_μ устойчива (неустойчива), если собственные значения производной отображения Пуанкаре P_μ по абсолютной величине <1 (>1) (см. гл. 2В). Бифуркационная теорема для диффеоморфизмов дает условия, при которых мы можем ожидать бифуркацию рождения устойчивого инвариантного тора после потери устойчивости γ_μ . Приводимая здесь теорема принадлежит Рюэлю и Такенсу [1], в доказательстве мы следуем Ланфорду [1].

Для того чтобы использовать вышеуказанные соображения, необходимо знать, как вычислить спектр отображения

¹⁾ Здесь имеется в виду, что траектории теперь будут притягиваться к инвариантному тору, так как периодическая орбита останется, но будет неустойчивой. — Прим. перев.

Пуанкаре P . К счастью, это можно сделать, как мы уже отмечали ранее, так как спектр отображения $d\varphi_\tau$ равен $\{\text{Spec } dP\} \cup \{1\}$ (см. гл. 2В).

Сведение к двумерному случаю

Таким образом, мы сосредоточим свое внимание на бифуркации для диффеоморфизма. Первое, что мы сделаем, это сведем задачу к двумерной¹⁾ с помощью теоремы о центральном многообразии, точно так же как мы сделали это для потоков. Предположим, что имеется однопараметрическое семейство диффеоморфизмов $\Phi_\mu: Z \rightarrow Z$, $\Phi_\mu(0) = 0$, и единичную окружность пересекает одна пара комплексно-сопряженных простых собственных значений оператора $d\Phi_\mu(0)$, когда μ , возрастая, проходит через нуль. Теорема о центральном многообразии, примененная к отображению $\Psi: (x, \mu) \mapsto (\Phi_\mu(x), \mu)$, дает тогда локально инвариантное трехмерное многообразие M . Слои M_μ ($\mu = \text{const}$) задают семейство многообразий, которые с помощью фиксированной координатной карты можно отождествить с одним из них, скажем M_0 . Тогда на M_0 индуцируется семейство диффеоморфизмов, содержащих всю рекуррентность. Таким образом, все сводится к следующей задаче (опуская вопрос о «глобальной» устойчивости): имеется однопараметрическое семейство диффеоморфизмов $\Phi_\mu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих условиям

- (а) $\Phi_\mu(0, 0) = (0, 0)$;
- (б) $d\Phi_\mu(0, 0)$ имеет два комплексных (с ненулевой мнимой частью) собственных значения $\lambda(\mu)$, $\overline{\lambda(\mu)}$, таких, что при $\mu < 0$ $|\lambda(\mu)| < 1$, а при $\mu > 0$ $|\lambda(\mu)| > 1$;
- (в) $\left. \frac{d|\lambda(\mu)|}{d\mu} \right|_{\mu=0} > 0$.

Делая перепараметризацию, мы можем считать, что собственные значения имеют вид $(1 + \mu)e^{\pm i\theta(\mu)}$. С помощью гладкой, зависящей от μ замены координат, $d\Phi_\mu(0, 0)$ можно привести к виду

$$d\Phi_\mu(0, 0) = (1 + \mu) \begin{pmatrix} \cos \theta(\mu) & -\sin \theta(\mu) \\ \sin \theta(\mu) & \cos \theta(\mu) \end{pmatrix}.$$

Каноническая форма

На следующем шаге заменой координат приведем Φ_μ к виду, близкому к соответствующей канонической форме.

¹⁾ Как отмечалось выше, для уравнений в частных производных P может стать диффеоморфизмом только после сведения, а до этого будет только гладким отображением.

Чтобы это было возможно, нам необходимо сделать техническое¹⁾ предположение²⁾:

$$e^{im\theta(0)} \neq 1, \quad m = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (6.1)$$

(6.1) **Лемма.** При выполнении условия (6.1) можно сделать зависящую от μ замену координат, приводящую Φ_μ к виду

$$\Phi_\mu(x) = N\Phi_\mu(x) + O(|x|^5),$$

где в полярных координатах

$$N\Phi_\mu: (r, \varphi) \mapsto ((1 + \mu)r - f_1(\mu)r^3, \varphi + \theta(\mu) + f_3(\mu)r^2).$$

Доказательство этого предложения использует стандартную технику и может быть получено, например, из § 23 книги Зигеля и Мозера [1]³⁾. В гл. 6А мы приведем вполне элементарное доказательство. Как указано выше, мы считаем $N\Phi_\mu$ почти канонической формой для Φ_μ . Отметим две особенности $N\Phi_\mu$:

(1) новое r зависит только от старого r , но не зависит от φ ;

(2) новое φ получается от старого поворотом, зависящим от r .

Добавим теперь последнее предположение:

$$f_1(0) > 0. \quad (6.2)$$

Из этого предположения следует, что для малых положительных μ отображение $N\Phi_\mu$ имеет инвариантную окружность радиуса r_0 , где r_0 является корнем уравнения $(1 + \mu)r - f_1(\mu)r^3 = r$, т. е. $r_0^2 = \mu/f_1(\mu)$. Ниже мы проверим, что для отображения $N\Phi_\mu$ эта окружность устойчива. Так как Φ_μ мало отличается от $N\Phi_\mu$, то не будет большой неожиданностью существование близкой инвариантной кривой для Φ_μ .

¹⁾ Это предположение вовсе не является техническим, хотя в доказательстве и играет такую роль. В случаях $m = 1, 2, 3, 4$ может вообще не происходить рождения тора. См. Сакер [1], Арнольд [6], Гаврилов [1]. — Прим. перев.

²⁾ Как указал нам Д. Рюэль, только $m = 1, 2, 3, 4$ действительно необходимо для бифуркационных теорем, как это будет видно из доказательства в гл. 6А.

³⁾ Каноническая форма играет важную роль в небесной механике при доказательстве существования и устойчивости замкнутых орбит, близких к данной, т. е. для нахождения неподвижных точек или инвариантных кривых отображения Пуанкаре. В гамильтоновом случае это отображение симплектическое (см. Абрахам и Марсден [1]), поэтому применима теорема Биркгофа, а также результаты А. Н. Колмогорова, В. И. Арнольда, Мозера, если отображение является «закручивающим».

Основной результат

(6.2) Теорема (Рюэль и Такенс, Сакер, Неймарк).

Предположим, что (6.1) и (6.2) выполнено¹⁾. Тогда для всех достаточно малых положительных μ отображение Φ_μ имеет устойчивую инвариантную замкнутую кривую.

Перед тем как проводить доказательство, посмотрим, что случится, если (6.2) заменить на $f_1(0) < 0$. Тогда для малых положительных μ отображение $N\Phi_\mu$ не имеет инвариантных множеств, отличных от $\{0\}$ и $\mathbb{R}^2$. При $\mu < 0$ $N\Phi_\mu$ имеет инвариантную кривую, но она является неустойчивой. Применяя результат Рюэля и Такенса к Φ_μ^{-1} , мы докажем, что в этом случае Φ_μ имеет близкую инвариантную кривую. Таким образом, мы опять оказываемся в обычной ситуации, где либо инвариантные кривые существуют при $\mu > 0$ и устойчивы, либо они существуют при $\mu < 0$ и неустойчивы.

Отображение Φ_μ можно записать так:

$$\Phi_\mu: (y, \varphi) \mapsto ((1 - 2\mu)y - \mu(3y^2 + y^3) + \mu^2 O(1), \\ \varphi + \theta(\mu) + \mu(1 + y^2)f_3(\mu)/f_1(\mu) + \mu^2 O(1)).$$

Изменим масштаб по y , полагая

$$y = \sqrt{\mu} z;$$

тогда

$$\Phi_\mu: (z, \varphi) \mapsto ((1 - 2\mu)z - \mu^{3/2}(3z^2 + \mu^{1/2}z^3) + \mu^{3/2} O(1), \\ \varphi + \theta(\mu) + \mu(1 + \mu^{1/2}z)^2 f_3(\mu)/f_1(\mu) + \mu^2 O(1)).$$

Перепишем последнюю формулу

$$(z, \varphi) \mapsto ((1 - 2\mu)z + \mu^{3/2}H_\mu(z, \varphi), \varphi + \theta_1(\mu) + \mu^{3/2}K_\mu(z, \varphi)).$$

Функции $H_\mu(z, \varphi)$, $K_\mu(z, \varphi)$ гладкие по z , φ , μ на множестве $-1 \leq z \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$ при достаточно малом μ_0 . Область $-1 \leq z \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ соответствует кольцу ширины $O(\mu)$ вокруг инвариантной окружности отображения $N\Phi_\mu$ (ее радиус порядка $O(\mu)$). Мы хотим получить инвариантную кривую внутри этого кольца.

После этого качественное поведение Φ_μ легко выясняется: Φ_μ можно записать в виде

$$(z, \varphi) \mapsto ((1 - 2\mu)z, \varphi + \theta_1(\mu))$$

¹⁾ Было бы интересно явно вычислить $f_1(0)$ прямо в терминах X_μ , как мы делали в гл. 4 для рождения цикла. Однако труд, проделанный ранее, и перспектива еще более тяжелых, а может быть, и невозможных вычислений так истощили силы авторов, что они решили оставить это вычисление честолюбивому читателю. Вычисление $f_1(0)$ в терминах Φ_μ , а не X_μ , не столь трудно и было сделано Ваном (препринт) и Иоссом [6].

плюс малое возмущение. Приближенно Φ_μ — это просто поворот в направлении φ и сжатие в направлении z . Отметим, однако, что величина сжатия стремится к нулю вместе с μ . Если бы это было не так, мы бы просто привлекли известные результаты о сохранении устойчивой инвариантной кривой при малых возмущениях. Однако такой эффект имеется, и мы должны поэтому более детально в нем разобраться, используя тот факт, что величина возмущения стремится к нулю быстрее, чем величина сжатия.

Мы будем искать инвариантное многообразие в виде графика функции $z = u(\varphi)$, $\{z = u(\varphi)\}$, где

- (1) $u(\varphi)$ периодична по φ с периодом 2π ;
- (2) $|u(\varphi)| \leq 1$ при всех φ ;
- (3) $u(\varphi)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной Липшица, равной единице (т. е. $|u(\varphi_1) - u(\varphi_2)| \leq |\varphi_1 - \varphi_2|$).

Пространство всех функций u , удовлетворяющих условиям (1) — (3), будем обозначать через U .

Мы приведем доказательство, основанное на принципе сжимающих отображений. Коротко наши рассуждения таковы: начнем с многообразия $M = \{z = u(\varphi)\}$, $u \in U$ и рассмотрим новое многообразие $\Phi_\mu M$, полученное действием Φ_μ на M . Мы покажем, что при достаточно малых μ многообразие $\Phi_\mu M$ опять имеет вид $\{z = \hat{u}(\varphi)\}$ с некоторой $\hat{u} \in U$. Таким образом, мы строим нелинейное отображение $\mathcal{F}$ пространства U в себя: $\mathcal{F}u = \hat{u}$. Затем мы доказываем, что при малых положительных μ отображение Φ_μ является сжатием на U (относительно супремум-нормы¹⁾) и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку u^* . Многообразие $\{z = u^*(\varphi)\}$ является искомой инвариантной кривой. Как следствие сжимаемости мы получим, что это многообразие устойчиво в следующем смысле: выберем начальную точку (z, φ) с $|z| \leq 1$, и пусть (z_n, φ_n) обозначает $\Phi_\mu^n(z, \varphi)$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n - u^*(\varphi_n)) = 0.$$

Нетрудно видеть, что область притяжения инвариантной кривой много больше кольца $|z| \leq 1$. В частности, она содержит всю внутренность кольца, за исключением неподвижной точки в центре.

Чтобы выполнить программу, намеченную выше, мы сначала должны построить нелинейное отображение $\mathcal{F}$. Для нахождения $\mathcal{F}u(\varphi)$ поступим следующим образом:

¹⁾ То есть нормы $\|u\| = \sup_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \|u(\varphi)\|$. — Прим. перев.

(А) Покажем, что существует единственное $\tilde{\varphi}$, для которого φ -компонента $\Phi_\mu(u(\tilde{\varphi}), \tilde{\varphi})$ равна φ , т. е. такое, что

$$\varphi \equiv \tilde{\varphi} + \theta_1(\mu) + \mu^{3/2} K_\mu(u(\tilde{\varphi}), \tilde{\varphi}) \pmod{2\pi}^1 \quad (6.3)$$

(В) Положим $\mathcal{F}u(\varphi)$ равным z -компоненте $\Phi_\mu(u(\tilde{\varphi}), \tilde{\varphi})$, т. е.

$$\mathcal{F}u(\varphi) = (1 - 2\mu)u(\tilde{\varphi}) + \mu^{3/2}H_\mu(u(\tilde{\varphi}), \tilde{\varphi}). \quad (6.4)$$

Для оценок, которые мы собираемся провести, будет удобно ввести обозначение

$$\lambda = \sup_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ -1 \leq z \leq 1}} \left\{ |H_\mu|, |K_\mu|, \left| \frac{\partial H_\mu}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial K_\mu}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial H_\mu}{\partial \varphi} \right|, \left| \frac{\partial K_\mu}{\partial \varphi} \right| \right\}.$$

Так определенное λ зависит от μ , но остается ограниченным при $\mu \rightarrow 0$.

Докажем теперь, что (6.3) имеет единственное решение. Для этого удобно временно обозначить правую часть (6.3) через $x(\tilde{\varphi})$:

$$x(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi} + \theta_1(\mu) + \mu^{3/2} K_\mu(u(\tilde{\varphi}), \tilde{\varphi}).$$

Мы хотим показать, что когда $\tilde{\varphi}$ изменяется от 0 до 2π , $x(\tilde{\varphi})$ пробегает в точности один раз интервал длины 2π . Из периодичности $u(\tilde{\varphi})$, $K_\mu(z, \tilde{\varphi})$ по $\tilde{\varphi}$ следует, что $x(2\pi) = x(0) + 2\pi$. Поэтому нам необходимо только показать, что x — строго возрастающая функция. Пусть $\tilde{\varphi}_1 < \tilde{\varphi}_2$. Тогда

$$x(\tilde{\varphi}_2) - x(\tilde{\varphi}_1) = \tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1 + \mu^{3/2} [K_\mu(u(\tilde{\varphi}_2), \tilde{\varphi}_2) - K_\mu(u(\tilde{\varphi}_1), \tilde{\varphi}_1)].$$

Далее,

$$\begin{aligned} |K_\mu(u(\tilde{\varphi}_2), \tilde{\varphi}_2) - K_\mu(u(\tilde{\varphi}_1), \tilde{\varphi}_1)| &\leq \lambda [|u(\tilde{\varphi}_2) - u(\tilde{\varphi}_1)| + |\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1|] \leq \\ &\leq 2\lambda |\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1| = 2\lambda (\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1). \end{aligned}$$

(Второе неравенство следует из липшиц-непрерывности u .) Таким образом,

$$x(\tilde{\varphi}_2) - x(\tilde{\varphi}_1) \geq (1 - 2\lambda\mu^{3/2})(\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1),$$

поэтому при условии

$$1 - 2\lambda\mu^{3/2} > 0 \quad (6.5)$$

x строго возрастает и (6.3) имеет единственное решение. Поэтому $\tilde{\varphi}$ является функцией φ и, как следует из оценок, липшиц-непрерывной:

$$|\tilde{\varphi}(\varphi_1) - \tilde{\varphi}(\varphi_2)| \leq (1 - 2\lambda\mu^{3/2})^{-1} |\varphi_1 - \varphi_2|. \quad (6.6)$$

¹⁾ То есть φ отличается от $\tilde{\varphi} + \theta_1(\mu) + \mu^{3/2} K_\mu(u(\tilde{\varphi}), \tilde{\varphi})$ на целое кратное 2π .

Тем самым определение (6.4) отображения $\mathcal{F}u$ приобретает смысл; теперь мы должны проверить, что $\mathcal{F}u \in U$. Условие (1) немедленно следует из 6.5. Для доказательства (2) заметим, что

$$|\mathcal{F}u(\varphi)| \leq (1 - 2\mu) |u(\tilde{\varphi})| + \mu^{3/2} |H_\mu(u(\tilde{\varphi}), \tilde{\varphi})| \leq 1 - 2\mu + \mu^{3/2}\lambda,$$

т. е. $|\mathcal{F}u(\varphi)| \leq 1$ при всех φ , если

$$2\mu - \mu^{3/2}\lambda \geq 0. \quad (6.7)$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}u(\varphi_1) - \mathcal{F}u(\varphi_2)| &\leq (1 - 2\mu) |u(\tilde{\varphi}_1) - u(\tilde{\varphi}_2)| + \\ &+ \mu^{3/2}\lambda [|u(\tilde{\varphi}_1) - u(\tilde{\varphi}_2)| + |\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2|] \leq \\ &\leq (1 - 2\mu + 2\mu^{3/2}\lambda) |\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2| \end{aligned}$$

в силу липшиц-непрерывности u . Подставляя сюда оценку (6.6) для $|\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2|$, мы получаем

$$|\mathcal{F}u(\varphi_1) - \mathcal{F}u(\varphi_2)| \leq (1 - 2\mu + 2\mu^{3/2}\lambda) (1 - 2\mu^{3/2}\lambda)^{-1} |\varphi_1 - \varphi_2|,$$

поэтому $\mathcal{F}u$ липшиц-непрерывна с постоянной Липшица 1, если

$$(1 - 2\mu + 2\mu^{3/2}\lambda) (1 - 2\mu^{3/2}\lambda)^{-1} \leq 1. \quad (6.8)$$

Очевидно, что (6.8) выполняется для достаточно малых положительных μ , так что условие (3) выполнено.

На следующем шаге мы докажем, что $\mathcal{F}$ сжимающее. Итак, пусть $u_1, u_2 \in U$; выберем φ и обозначим через $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ решения уравнений

$$\varphi = \tilde{\varphi}_1 + \theta_1(\mu) + \mu^{3/2}K_\mu(u_1(\tilde{\varphi}_1), \tilde{\varphi}_1)$$

и

$$\varphi = \tilde{\varphi}_2 + \theta_1(\mu) + \mu^{3/2}K_\mu(u_2(\tilde{\varphi}_2), \tilde{\varphi}_2)$$

соответственно. Вычитая из первого уравнения второе, перенося выражение $\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2$ в другую часть и беря абсолютную величину, мы получаем

$$\begin{aligned} |\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2| &\leq \mu^{3/2} |K_\mu(u_1(\tilde{\varphi}_1), \tilde{\varphi}_1) - K_\mu(u_2(\tilde{\varphi}_2), \tilde{\varphi}_2)| \leq \\ &\leq \mu^{3/2}\lambda [|u_1(\tilde{\varphi}_1) - u_2(\tilde{\varphi}_2)| + |\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2|]. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Далее,

$$\begin{aligned} |u_1(\tilde{\varphi}_1) - u_2(\tilde{\varphi}_2)| &\leq |u_1(\tilde{\varphi}_1) - u_2(\tilde{\varphi}_1)| + |u_2(\tilde{\varphi}_1) - u_2(\tilde{\varphi}_2)| \leq \\ &\leq \|u_1 - u_2\| + |\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2|. \end{aligned}$$

Подставляя это неравенство в (6.9), собирая все члены с $|\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2|$ слева и деля, получаем

$$|\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2| \leq (1 - 2\lambda\mu^{3/2})^{-1} \mu^{3/2}\lambda \|u_1 - u_2\|. \quad (6.10)$$

Воспользуемся определением (6.4) для $\mathcal{F}u$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}u_1(\varphi) - \mathcal{F}u_2(\varphi)| &\leq (1 - 2\mu) |u_1(\tilde{\varphi}_1) - u_2(\tilde{\varphi}_2)| + \\ &+ \mu^{3/2} |H_\mu(u_1(\tilde{\varphi}_1), \tilde{\varphi}_1) - H_\mu(u_2(\tilde{\varphi}_2), \tilde{\varphi}_2)| \leq \\ &\leq (1 - 2\mu) [\|u_1 - u_2\| + |\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2|] + \lambda\mu^{3/2} [\|u_1 - u_2\| + 2|\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2|] \leq \\ &\leq \|u_1 - u_2\| \{(1 - 2\mu)[1 + \mu^{3/2}\lambda(1 - 2\mu^{3/2}\lambda)^{-1}] + \\ &+ \mu^{3/2}\lambda[1 + 2\mu^{3/2}\lambda(1 - 2\mu^{3/2}\lambda)^{-1}]\}. \end{aligned}$$

Пусть α обозначает выражение в скобках. Тогда $\alpha = 1 - 2\mu + O(\mu^{3/2})$, поэтому мы можем сделать $\alpha < 1$, выбирая μ достаточно малым. Если это уже сделано, то

$$\|\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2\| \leq \alpha \|u_1 - u_2\|, \quad \alpha < 1, \quad (6.11)$$

т. е. $\mathcal{F}$ — сжимающий оператор в U и, следовательно, имеет единственную неподвижную точку u^* .

Чтобы доказать устойчивость инвариантного многообразия $\{z = u^*(\varphi)\}$, выберем точку (z, φ) в кольце $|z| \leq 1$; пусть (z_1, φ_1) обозначает $\Phi_\mu(z, \varphi)$. Заметим, что

$$|z_1| \leq (1 - 2\mu)|z| + \mu^{3/2}\lambda \leq 1 - 2\mu + \lambda\mu^{3/2} \leq 1$$

(из (6.7)), поэтому (z_1, φ_1) снова лежит в кольце. Пусть теперь $\tilde{\varphi}_1$ обозначает решение уравнения

$$\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1 + \theta_1(\mu) + \mu^{3/2}K_\mu(u^*(\tilde{\varphi}_1), \tilde{\varphi}_1).$$

С другой стороны, по определению φ_1 :

$$\varphi_1 = \varphi + \theta_1(\mu) + \mu^{3/2}K_\mu(z, \varphi).$$

Вычитая второе из этих уравнений из первого, а затем оценивая и преобразуя полученное выражение, как при доказательстве (6.8), получим

$$|\tilde{\varphi}_1 - \varphi| \leq \mu^{3/2}\lambda(1 - 2\lambda\mu^{3/2})^{-1} |z - u^*(\varphi)|.$$

Вычтем теперь из первого из уравнений

$$\begin{aligned} u^*(\varphi_1) = \mathcal{F}u^*(\varphi_1) &= (1 - 2\mu)u^*(\tilde{\varphi}_1) + \mu^{3/2}H_\mu(u^*(\tilde{\varphi}_1), \tilde{\varphi}_1), \\ z_1 &= (1 - 2\mu)z + \mu^{3/2}H_\mu(z, \varphi) \end{aligned}$$

второе и поступим, как при доказательстве того, что $\mathcal{F}$ — сжимающий оператор; тогда получим

$$|z_1 - u^*(\varphi_1)| \leq \alpha |z - u(\varphi)|$$

с тем же α , как в (6.11). По индукции

$$|z_n - u^*(\varphi_n)| \leq \alpha^n |z - u(\varphi)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

В нашем доказательстве мы пользовались только непрерывностью H_μ , K_μ и их производных и получили липшиц-непрерывную u^* . Более строгая проверка показывает, что нам необходима только липшиц-непрерывность H_μ , K_μ . Если бы H_μ , K_μ имели больше производных, можно было ожидать больше производных для u^* . Это действительно так. Точнее, пусть U_k означает множество периодических функций $u(\varphi)$ класса C^k , удовлетворяющих условиям:

- 1) $|u^{(j)}(\varphi)| \leq 1$, $j = 0, 1, \dots, k$ для всех φ ;
- 2) $u^{(k)}(\varphi)$ липшицируема с постоянной Липшица 1.

Если H_μ , K_μ имеют липшиц-непрерывные k -е производные, то оценки, являющиеся непосредственным обобщением вышеприведенных, показывают, что при достаточно малых μ $\mathcal{F}$ переводит U_k в себя. Можно показать, что U_k полно в супремум-норме (как при доказательстве теоремы о центральном многообразии), поэтому неподвижная точка u^* должна лежать в U_k , т. е. u^* имеет липшиц-непрерывную k -ю производную.

Если сделать более слабое предположение, что H_μ и K_μ имеют непрерывные k -е производные, то немного усложняя рассуждения, можно получить для u^* непрерывность k -й производной; это можно сделать, показывая, что множество тех u , чьи k -е производные имеют подходяще выбранный модуль непрерывности, отображаются в себя оператором $\mathcal{F}$.

Глава 6А

КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА

Мы дадим здесь, следуя Ланфорду [1], непосредственный элементарный вывод канонической формы отображения $\Phi_\mu: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Напомним, что мы уже привели отображение к виду

$$\Phi_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 + \mu) \begin{pmatrix} \cos \theta(\mu) & -\sin \theta(\mu) \\ \sin \theta(\mu) & \cos \theta(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O(r^2).$$

С помощью последующих замен координат мы хотим упростить члены второго, третьего и четвертого порядков. Удобно отождествить $\mathbb{R}^2$ с комплексной плоскостью, полагая $z = x + iy$. Тогда

$$\Phi_\mu(z) = \lambda(\mu)z + O(|z|^2), \quad \lambda(\mu) = (1 + \mu)e^{i\theta(\mu)}.$$

Начиная с этого места, мы будем, где это возможно, опускать в наших обозначениях μ .

Члены высшего порядка в разложении Тейлора функции Φ могут быть записаны как полиномы по z и $\bar{z}$, т. е.

$$\Phi(z) = \lambda z + A_2(z) + A_3(z) + \dots,$$

где, например,

$$A_2(z) = \sum_{j=0}^2 a_{j2} z^{2-j} \bar{z}^j.$$

Начнем, как обычно, с A_2 . Выберем новые координаты $z' = z + \gamma(z)$, где γ — однородный многочлен степени 2, т. е. имеет ту же форму, что и A_2 . Обратное выражение z через z' запишем следующим образом:

$$z = z' - \gamma(z') + \text{члены высшего порядка.}$$

Сейчас мы интересуемся членами только 2-го порядка и ниже, а члены 3-го порядка и выше будем опускать; для обозначения этого мы вместо знака равенства будем использовать знак $(\equiv)$. Таким образом, мы имеем

$$z \equiv z' - \gamma(z') = (I - \gamma)(z').$$

В новых координатах получим

$$\begin{aligned}\Phi'(z') &\equiv (I + \gamma) \Phi(z' - \gamma(z')) \equiv \\ &\equiv (I + \gamma) [\lambda z' - \lambda \gamma(z') + A_2(z' - \gamma(z'))] \equiv \\ &\equiv (I + \gamma) [\lambda z' - \lambda \gamma(z') + A_2(z')] \equiv \\ &\equiv \lambda z' - \lambda \gamma(z') + A_2(z') + \gamma(\lambda z' - \lambda \gamma(z') + A_2(z')) \equiv \\ &\equiv \lambda z' + A_2(z') + \gamma(\lambda z') - \lambda \gamma(z').\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\gamma(z') &= \gamma_2 z' z' + \gamma_1 z' \bar{z}' + \gamma_0 \bar{z}' \bar{z}', \\ \gamma(\lambda z') - \lambda \gamma(z') &= \gamma_2 (\lambda^2 - \lambda) z' z' + \gamma_1 (|\lambda|^2 - \lambda) z' \bar{z}' + \\ &\quad + \gamma_0 (\bar{\lambda}^2 - \lambda) \bar{z}' \bar{z}'.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$A_2(z') = a_{22} z' z' + a_{12} z' \bar{z}' + a_{02} \bar{z}' \bar{z}';$$

поэтому, если мы выберем

$$\gamma_2 = \frac{-a_{22}}{\lambda^2 - \lambda}, \quad \gamma_1 = \frac{-a_{12}}{|\lambda|^2 - \lambda}, \quad \gamma_0 = \frac{-a_{02}}{\bar{\lambda}^2 - \lambda}.$$

то получим

$$\Phi'(z') = \lambda z' + O(|z'|^3).$$

Конечно, мы должны быть уверены, что в наших выражениях для γ_i знаменатели отличны от нуля. Так как $|\lambda| = 1 + \mu$, то при $\mu \neq 0$ это выполнено, но мы хотим, чтобы наша замена координат, зависящая от μ , работала и при $\mu = 0$. Это будет так при условии, что

$$e^{2i\theta(0)} \neq e^{i\theta(0)}, \quad 1 \neq e^{i\theta(0)}, \quad e^{-2i\theta(0)} \neq e^{i\theta(0)},$$

т. е. когда

$$e^{i\theta(0)} \neq 1, \quad e^{3i\theta(0)} \neq 1.$$

Поэтому, если эти условия выполняются, мы можем сделать замену координат, зависящую от μ и переводящую A_2 в нуль. Будем предполагать, что это уже сделано, опустим штрихи в обозначениях

$$\Phi(z) = \lambda z + A_3(z) + \dots$$

(здесь A_3 уже не исходное A_3) и посмотрим, что можно сделать с A_3 .

Выберем новые координаты $z' = z + \gamma(z)$, где γ — однородный многочлен третьей степени, и будем проводить вычисления по модулю членов порядка 4 и больше. Как и выше, получим

$$\Phi'(z') \equiv (I + \gamma) \Phi(z' - \gamma(z')) \equiv \lambda z' + A_3(z') + \gamma(\lambda z') - \lambda \gamma(z').$$

Мы снова выпишем

$$\begin{aligned}\gamma(z') &= \gamma_3(z')^3 + \gamma_2(z')^2 \bar{z}' + \gamma_1 z' (\bar{z}')^2 + \gamma_0 (\bar{z}')^3, \\ \gamma(\lambda z') - \lambda \gamma(z') &= \gamma_3(\lambda^3 - \lambda)(z')^3 + \gamma_2(|\lambda|^2 - 1)\lambda(z')^2 \bar{z}' + \\ &\quad + \gamma_1(|\lambda|^2 \bar{\lambda} - \lambda)z'(\bar{z}')^2 + \gamma_0(\bar{\lambda}^3 - \lambda)(\bar{z}')^3 \\ A_3(z') &= a_{33}(z')^3 + a_{23}(z')^2 \bar{z}' + a_{13}z'(\bar{z}')^2 + a_{03}(\bar{z}')^3.\end{aligned}$$

Выбирая подходящим образом $\gamma_3, \gamma_1, \gamma_0$, мы можем исключить члены a_{33}, a_{13}, a_{03} при условии, что

$$e^{2i\theta(0)} \neq 1, \quad e^{4i\theta(0)} \neq 1.$$

Совсем иного рода член a_{23} . При $\mu \neq 0$ мы, конечно, можем исключить его, полагая

$$\gamma_3 = \frac{-a_{23}}{\lambda(|\lambda|^2 - 1)}.$$

Однако при $\mu \rightarrow 0$ это выражение неограниченно растет независимо от значения $\theta(0)$. По этой причине мы будем пытаться убрать этот член и просто положим $\gamma_3 = 0$. Тогда в новых координатах (опуская штрихи) получаем

$$\Phi(z) = (\lambda + a_{23}|z|^2)z + O(|z|^4).$$

Далее мы намереваемся уничтожить члены порядка 4 заменой координат $z' = z + \gamma(z)$, где γ — однородный многочлен 4-й степени. Уже знакомое нам вычисление показывает, что такая замена не меняет членов порядка ≤ 3 , а члены 4-го порядка могут быть исключены, если

$$e^{5i\theta(0)} \neq 1.$$

Таким образом, мы получаем

$$\Phi(z) = (\lambda + a_{23}|z|^2)z + O(|z|^5).$$

Однако это еще не совсем та форма, которую мы хотели получить. Чтобы закончить вывод, запишем

$$\begin{aligned}\lambda + a_{23}|z|^2 &= (1 + \mu) e^{i\theta(\mu)} \left[1 - \frac{f_1(\mu)}{1 + \mu} |z|^2 + i f_3(\mu) |z|^2 \right] = \\ &= (1 + \mu - f_1(\mu) |z|^2) e^{i[\theta(\mu) + f_3(\mu) |z|^2]} + O(|z^4|),\end{aligned}$$

где f_1 и f_3 действительны. Поэтому

$$\Phi(z) = (1 + \mu - f_1(\mu) |z|^2) e^{i[\theta(\mu) + f_3(\mu) |z|^2]} z + O(|z|^5).$$

Когда мы перейдем к полярным координатам, то получим как раз искомую каноническую форму.

БИФУРКАЦИИ В СИСТЕМАХ С СИММЕТРИЕЙ

Стив Шектер

В этой главе мы изучим, как меняются бифуркационные теоремы, если в системе имеется группа симметрий. Такие системы не являются типичными, поэтому здесь мы сталкиваемся с особыми случаями и вырождениями (см. упражнения 1.16 и 4.3). В конце главы мы кратко обсудим применение изложенных здесь идей к течению Куэтта (благодарим Д. Рюэля за консультацию по этому вопросу).

Разделы 0—4 этой главы основаны на работе Рюэля [3]. Этому же вопросу посвящена работа Коппель и Ховарда [3] (см. также Сэттинджер [6]).

В первых частях главы мы ограничимся рассмотрением диффеоморфизмов. Вполне аналогичные результаты имеют место и для векторных полей.

0. Введение

Пусть E — действительное банахово пространство с C^l -нормой $l \geq 3$. (Это означает, что отображение $x \mapsto \|x\|$ класса C^l в $E \setminus \{0\}$.) Пусть G — группа Ли и Λ_G — (гладкое) представление G как группы линейных изометрий E . Обозначим через Λ_g элементы Λ_G , где $g \in G$. Рассмотрим диффеоморфизмы $f: E \rightarrow E$, коммутирующие с Λ_G , т. е. удовлетворяющие условию $f \circ \Lambda_g = \Lambda_g \circ f$ для всех $g \in G$.

Если мы знаем точку $f(x)$ и f коммутирует с Λ_G , то для всех y , принадлежащих орбите точки x относительно действия Λ_G , определены точки $f(y)$. Например, если $E = \mathbb{R}^2$ с евклидовой нормой и Λ_G — группа вращений плоскости (представлением G является группа $SO(2)$) и если f коммутирует с Λ_G , то f переводит окружности в окружности.

Отметим следующее:

(0.1) Если f и h — диффеоморфизмы E , которые коммутируют с Λ_G , то $af + bh$ также коммутирует с Λ_G для всех $a, b \in \mathbb{R}$.

(0.2) Если f коммутирует с Λ_G и $f(0) = 0$, то $Df(0)$ коммутирует с Λ_G ;

(0.3) Если $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $\varphi\Lambda_g(x) = \varphi(x)$ для всех $g \in G$ и $x \in E$, а f коммутирует с Λ_G , то $\varphi \circ f$ коммутирует с Λ_g ¹⁾.

Так как норма E класса C^l , то мы можем построить срезающую C^l -функцию $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям: $\varphi = 1$ в окрестности точки 0, $\varphi = 0$ вне большей окрестности 0 и φ постоянна на каждой сфере с центром в 0. Такая функция φ будет также удовлетворять условию (0.3). Для данного C^l -диффеоморфизма $f: E \rightarrow E$ и линейного изоморфизма $A: E \rightarrow E$, который коммутирует с Λ_G и достаточно близок к $Df(0)$, эти срезающие функции, вместе со свойствами (0.1) и (0.3) позволяют нам построить новый диффеоморфизм h , C^l -близкий к f , коммутирующий с Λ_G и такой, что $Dh(0) = A$.

Пусть $1 \leq k \leq l$ и $\mathcal{F}$ обозначает пространство сохраняющих слои отображений $f: E \times (-1, 1) \rightarrow E \times (-1, 1)$, удовлетворяющих условиям:

- (а) каждое f_μ есть C^l -диффеоморфизм E ($\mu \in (-1, 1)$);
- (б) f класса C^k по второй переменной μ ;
- (в) $f_\mu(0) = 0$ для всех μ ;
- (г) f_μ коммутирует с Λ_G для всех μ ;
- (д) $Df_0(0)$ имеет конечное число изолированных конечнократных собственных значений на окружности $|z| = 1$ (так как эти собственные значения изолированы, то остальная часть спектра отделена от окружности $|z| = 1$).

Мы хотим изучить для типичного $f \in \mathcal{F}$ изменения качественной структуры f_μ около начала координат, когда μ проходит через 0. Фактически будет изучено открытое плотное подмножество $\mathcal{F}$, которое будет определено в разд. 2²⁾.

1. Сведение к конечномерному случаю

Пусть E^0 — конечномерное подпространство E , соответствующее собственным значениям $Df_0(0)$, лежащим на окружности $|z| = 1$.

¹⁾ Здесь имеется в виду тождество $\varphi f \Lambda_g(x) = \varphi f(x)$. — Прим. перев.

²⁾ $\mathcal{F}$ рассматривается с соответствующей топологией Уитни. Базис открытых множеств $B(f, \varphi)$, содержащих $f \in \mathcal{F}$, определяется заданием строго положительной C^0 -функции $\varphi: E \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ и затем для всех

$$(x, \mu), B(f, \varphi) = \left\{ h \in \mathcal{F} \mid \|h(x, \mu) - f(x, \mu)\| < \varphi(x, \mu); \left\| \frac{\partial^i}{\partial x^i} h(x, \mu) - \frac{\partial^i}{\partial x^i} f(x, \mu) \right\| < \varphi(x, \mu), \right. \\ \left. 1 \leq i \leq l \text{ и } \left\| \frac{\partial^j}{\partial \mu^j} h(x, \mu) - \frac{\partial^j}{\partial \mu^j} f(x, \mu) \right\| < \varphi(x, \mu), 1 \leq j \leq k \right\}.$$

(7.1) **Утверждение.** (1) $\Lambda_g E^0 = E^0$ для всех $g \in G$; (2) на E^0 можно задать структуру гильбертова пространства таким образом, чтобы $\Lambda_G|_{E^0} = \Lambda_G^0$ оставалось группой изометрий.

Доказательство. (1) Пусть c — простая замкнутая кривая в $\mathbb{C}$, для которой $\bar{c} = c$ (где $\bar{c}$ означает кривую, комплексно-сопряженную с c), $\text{Spec } Df_0(0) \cap c = \emptyset$ и $\text{Spec } Df_0(0) \cap \text{Int } c = \text{Spec } Df_0(0) \cap \{z: |z| = 1\}$. Пусть $P = \frac{1}{2\pi i} \int_c (zI - Df_0(0) \otimes I)^{-1} dz$ — оператор, действующий в $E \otimes \mathbb{C}$ — комплексификации E . P коммутирует с $\Lambda_G \otimes I$, так как он является пределом операторов, обладающих этим свойством. По теореме о спектральном разложении действительного оператора, P является комплексификацией действительного оператора $Q: E \rightarrow E$. Ясно, что Q коммутирует с Λ_G , поэтому подпространство $\text{Im } Q$ ¹⁾ инвариантно относительно Λ_G . Однако $\text{Im } Q = E^0$.

(2) Пусть Γ — компактная группа, являющаяся замыканием Λ_G^0 . Требуемое скалярное произведение на E^0 задается соотношением $(x, y) = \int_{\Gamma} d\gamma \langle x, \gamma y \rangle$, где $d\gamma$ — мера Хаара на Γ , а $\langle, \rangle$ — любое скалярное произведение на E^0 . ■

(7.1) **Теорема.** Отображение $f \in \mathcal{F}$ имеет вблизи точки $(0, 0) \in E \times (-1, 1)$ локальное центральное C^k -многообразие V , касающееся $E^0 \times (-1, 1)$ и удовлетворяющее условиям:

(1) Каждое V_μ ($V_\mu = V \cap (E \times \{\mu\})$) — класса C^1 и Λ_G -инвариантно.

(2) Существует сохраняющая слои карта $\phi: V \rightarrow E^0 \times (-1, 1)$, для которой $\phi \circ \Lambda_g = \Lambda_g \circ \phi$ для всех $g \in G$.

Вся локальная рекуррентность f_μ около нуля сосредоточена на V_μ .

Доказательство. (1) Основной момент здесь состоит в том, что построение центрального многообразия в теореме о центральном многообразии можно сделать способом, инвариантным относительно Λ_G . Для Λ_G -инвариантности V достаточно, чтобы первое «пробное центральное многообразие», используемое при построении, было Λ_G -инвариантным (см. гл. 2 и теорему о центральном многообразии для потоков). Выберем в качестве первого пробного центрального многообразия подпространство E , соответствующее

¹⁾ $\text{Im } Q$ — подпространство E , являющееся образом E при действии оператора Q . — Прим. перев.

$\text{Spec } Df_0(0) \cap \{z: |z| \geq 1\}$, которое Λ_G -инвариантно, что следует из п. (1) утверждения 7.1 (1).

(2) $\varphi = (Q|_{E^0}) \times I$, где Q определено при доказательстве утверждения 7.1 (1). ■

2. Типичное поведение

Начиная с этого места, в силу теоремы 7.1 мы можем считать $f|_U$ действующим в окрестности точки $(0,0)$ пространства $E^0 \times (-1,1)$, например вида $U \times J$, и через A_μ будем обозначать $Df_\mu(0)|_{E^0}$. Λ_G^0 будет тогда группой изометрий гильбертова пространства E^0 . Теперь мы выделим типичное подмножество¹⁾ в $\mathcal{F}$, поддающееся удовлетворительному описанию.

Характеристический полином A_0 является произведением множителей вида $(x-1)$, $(x+1)$ и $(x^2 - 2\text{Re } \lambda x + \lambda\bar{\lambda})$ с $|\lambda| = 1$. Пусть λ — комплексное собственное значение A_0 (аналогичное рассуждение применимо в случае $\lambda = \pm 1$), и пусть F — нулевое подпространство оператора $(A_0^2 - 2\text{Re } \lambda A_0 + \lambda\bar{\lambda}I)^k$, где k — показатель, с которым $(x^2 - 2\text{Re } \lambda x + \lambda\bar{\lambda})$ входит в характеристический полином A_0 . Тогда F Λ_G -инвариантно, так как оно является нулевым подпространством оператора, который коммутирует с Λ_G ; $F^\perp$ также Λ_G -инвариантно, так как F и Λ_G сохраняют скалярное произведение.

Пусть $B: E^0 \rightarrow E^0$ — ортогональное проектирование на $F^\perp$. Тогда $A_0 + \varepsilon A_0 B$ коммутирует с Λ_G и оставляет F и $F^\perp$ инвариантными. Оператор $(A_0 + \varepsilon A_0 B)|_F$ имеет собственными значениями только λ и $\bar{\lambda}$, а при $\varepsilon \neq 0$ $A_0 + \varepsilon A_0 B|_{F^\perp}$ не имеет собственных значений на окружности $|z| = 1$. Используя (0.1) и (0.3), легко построить возмущение диффеоморфизма $f|_{U \times J}$ так, чтобы новый оператор $D(f|_{U \times J})_0(0) = A_0 + \varepsilon A_0 B$ имел только одну пару собственных значений $\lambda, \bar{\lambda}$ на окружности $|z| = 1$. Так как дополнение E^0 в E Λ_G -инвариантно ($E = E^0 \oplus \text{Ker } Q$), то нетрудно продолжить это возмущение $f|_{U \times J}$ до такого возмущения $\tilde{f}$, у которого соответствующий $D\tilde{f}_0(0)$ имеет собственными значениями только λ и $\bar{\lambda}$, лежащие на единичной окружности, каждое конечной кратности. Для этого возмущения размерность E^0 уменьшается. Если теперь $\text{Spec } A_\mu$ для каждого μ , близкого к нулю, состоит не

¹⁾ Типичное подмножество пространства — это пересечение счетного числа открытых всюду плотных подмножеств этого пространства. — Прим. перев.

только из одной пары комплексных собственных значений λ_μ , $\bar{\lambda}_\mu$, то мы можем сделать другое возмущение и дальше уменьшить размерность E^0 . Таким образом, мы видим, что сколь угодно малым возмущением мы можем в конце концов добиться того, чтобы $\text{Spec } A_\mu$ состоял или из одного действительного значения λ_μ при всех достаточно малых μ , или из пары комплексных собственных значений λ_μ , $\bar{\lambda}_\mu$, причем зависимость собственных значений от μ будет класса C^{k-1} .

Случай 1. $\text{Spec } A_\mu$ при всех малых μ состоит из одного действительного собственного значения, причем $\lambda_0 = \pm 1$. Запишем $A_0 = S + T$, S — симметричен, T — антисимметричен. Используя тот факт, что Λ_g — изометрия гильбертова пространства, можно проверить, что S и T коммутируют с Λ_g . Выберем ортонормированный базис в E^0 , в котором S диагонален; тогда в этом базисе $T_{ij} = -T_{ji}$.

Лемма 1. Если $T \neq 0$, то при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ $\text{Spec}(A_0 + \varepsilon T)$ состоит более чем из одной точки.

Доказательство. Допустим, что $\text{Spec}(A_0 + \varepsilon T)$ состоит в точности из одной точки при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Тогда при всех таких $\varepsilon > 0$

$$\det(zI - (A_0 + \varepsilon T)) = (z - \lambda(\varepsilon))^n, \quad (2.1)$$

где $\text{Spec}(A_0 + \varepsilon T) = \{\lambda(\varepsilon)\}$ и $n = \dim E^0$. Сравнивая коэффициенты при z^{n-1} в обеих частях (2.1) (диагональные члены εT равны нулю!), мы видим, что $\text{tr } A_0 = n\lambda(\varepsilon)$. Но $\text{tr } A_0 = n\lambda(0)$. Поэтому $\lambda(\varepsilon) = \lambda(0)$ при всех малых $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что $\det(zI - (A_0 + \varepsilon T))$ не зависит от ε при малых $\varepsilon > 0$. Однако коэффициент при z^{n-2} в этом полиноме равен $\sum_{i < j} (S_{ii} \cdot S_{jj} - S_{ij}^2) + \sum_{i < j} (T_{ij} + \varepsilon T_{ij})^2$ и, следовательно, не будет равен постоянной, кроме случая $T = 0$. ■

Так как T коммутирует с Λ_g , при $T \neq 0$ из леммы 1 следует существование такого возмущения h отображения $f|_{U \times J}$, для которого $\text{Spec } Dh_0(0)$ содержит более одной точки. Это в свою очередь позволяет нам выбрать другое возмущение, которое осуществляет дальнейшее уменьшение размерности E^0 . Поэтому при некотором возмущении f мы должны получить $T = 0$. В этой ситуации $A_0 = \pm I$. Действительно, при некотором возмущении f мы должны получить $A_\mu = \lambda_\mu I$ для всех достаточно малых μ , $\lambda_\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 = \pm 1$.

Кроме того, для некоторого такого возмущения f Λ_g^0 имеет «неприводимый действительный тип», т. е. только крат-

ные I элементы $\text{Hom } E^0$ ¹⁾ коммутируют с Λ_G^0 . Чтобы показать это, допустим, что $R \in \text{Hom } E^0$, R коммутирует с Λ_G^0 и $R \neq \lambda I$. Тогда $A_0 + \varepsilon R$ коммутирует с Λ_G^0 при всех ε и не кратно I . Следовательно, можно построить возмущение h отображения $f|_{U \times J}$, для которого $Dh_0(0) = A_0 + \varepsilon R$, а тогда и другое возмущение, приводящее $\dim E^0$. Поэтому для некоторого сколь угодно малого возмущения мы получаем:

(1) Λ_G^0 имеет неприводимый действительный тип;

(2) $A_\mu = \lambda_\mu I$ при всех малых μ и $\lambda_0 = \pm 1$.

Но множество отображений $f \in \mathcal{F}$, удовлетворяющих (1) и (2), открыто. Поэтому условия (1) и (2) являются типичными.

Случай 2. Спекс A_μ при всех малых μ состоит из одной пары комплексных собственных значений. Для каждого μ мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} E^0 & \xrightarrow{i} & E^0 \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi_\mu} & F_\mu \\ A_\mu \downarrow & & \downarrow A_\mu \otimes I & & \downarrow A_\mu \otimes I|_{F_\mu} \\ E^0 & \xrightarrow{i} & E^0 \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi_\mu} & F_\mu \end{array}$$

Здесь F_μ — нулевое подпространство оператора $[(A_\mu \otimes I) - \lambda_\mu I]^{n/2}$, действующего в $E^0 \otimes \mathbb{C}$ — комплексном подпространстве комплексной размерности $n/2$, $i(x) = x \otimes 1$, а π_μ — ортогональное проектирование. Скалярное произведение в E^0 индуцирует комплексное эрмитово произведение в $E^0 \otimes \mathbb{C}$, относительно которого $\Lambda_G^0 \otimes I$ — группа унитарных операторов. F_μ инвариантно относительно $\Lambda_G^0 \otimes I$, так как $A_\mu \otimes I$ коммутирует с $\Lambda_G^0 \otimes I$. $A_\mu \otimes I|_{F_\mu}$ сопряжено с A_μ и коммутирует с $\Lambda_G^0 \otimes I|_{F_\mu}$. Теперь мы работаем с $A_\mu \otimes I|_{F_\mu}$ аналогично случаю 1.

Мы видим, что в общем случае

(1) $\Lambda_G^0 \otimes I|_{F_\mu}$ неприводимо и

(2) $A_\mu = \lambda_\mu I$ при малых μ , где I обозначает тождественный оператор в $F_\mu = \mathbb{C}^{n/2}$ и λ_μ — комплексное число, $|\lambda_0| = 1$. Другими словами, в общем случае E^0 можно считать комплексным эрмитовым пространством, а Λ_G^0 — неприводимой группой унитарных операторов в E^0 , и в то же время $A_\mu = \lambda_\mu I$ для всех малых μ с комплексным λ_μ и $|\lambda_0| = 1$.

¹⁾ $\text{Hom } E^0$ — гомоморфизмы банахова пространства E^0 в себя, т. е. линейные операторы. — Прим. перев.

3. $Df_0(0)$ имеет одну пару комплексных собственных значений на окружности $|z| = 1$

Основной результат Рюэля, которой мы сформулируем без доказательства, это приведенная ниже теорема 7.2; она помогает найти инвариантные многообразия в случае 2 разд. 2. Мы теперь будем считать, что $f|_{U \times J}$ определено в окрестности точки $(0, 0)$ пространства $F \times J$, где F — конечномерное комплексное эрмитово пространство, а J — интервал из $\mathbb{R}$, содержащий 0.

(7.2) **Лемма.** Предположим, что $f|_{U \times J}$ класса C^l при фиксированном μ и C^k по μ , $1 \leq k \leq l$, $k \geq 3$. Пусть также $Df_0(0) = \lambda_\mu I$, $|\lambda_0| = 1$, но $\lambda_0^3 \neq 1$ и $\lambda_0^4 \neq 1$ (эти предположения являются типичными). Тогда с помощью зависящей от μ замены координат (класса C^{k-3} по μ и C^∞ при фиксированном μ), коммутирующей с Λ_G^0 , можно привести f к виду

$$f'_\mu(z) = \lambda_\mu z + P_\mu(z) + Q_\mu(z),$$

где P_μ — однородный многочлен степени 2 по z и степени 1 по $\bar{z}$, а Q_μ порядка $o(|z|^3)$. Фактически $|Q_\mu(z)| \leq c(|z|)|z|^3$ и $\|DQ_\mu(z)\| \leq c(|z|)|z|^2$, где $c(\cdot)$ не зависит от μ и $\lim_{u \rightarrow 0} c(u) = 0$.

Если $z \in \mathbb{C}^2$, $z = (z_1, z_2)$, где каждое $z_i \in \mathbb{C}$, то «однородный многочлен степени 2 по z и степени 1 по $\bar{z}$ » на $\mathbb{C}^2$ имеет вид

$$P(z) = (Az_1^2\bar{z}_1 + Bz_1z_2\bar{z}_1 + Cz_2^2\bar{z}_1 + Dz_1^2\bar{z}_2 + Ez_1z_2\bar{z}_2 + Fz_2^2\bar{z}_2, \\ Qz_1^2\bar{z}_1 + Rz_1z_2\bar{z}_1 + Sz_2^2\bar{z}_1 + Tz_1^2\bar{z}_2 + Uz_1z_2\bar{z}_2 + Vz_2^2\bar{z}_2).$$

Для мотивировки такого представления можно отметить, что для таких $P(z)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ с $|\lambda| = 1$ выполняется равенство $P(\lambda z) = \lambda P(z)$.

(7.2) **Теорема.** Пусть $\Phi_\mu: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ — однопараметрическое семейство C^l — диффеоморфизмов, $1 \leq l < \infty$, зависящее от действительного параметра μ , изменяющегося на интервале, содержащем 0. Предположим, что $\Phi_\mu(z) = \lambda_\mu z + P_\mu(z) + Q_\mu(z)$, где $\mu \mapsto \lambda_\mu$ — непрерывная комплексная функция, P_μ — однородный многочлен степени 2 по z и степени 1 по $\bar{z}$ с коэффициентами, непрерывными по μ ,

$$|Q_\mu(z)| \leq c(|z|)|z|^3 \quad \text{и} \quad \|DQ_\mu(z)\| \leq c(|z|)|z|^2,$$

где $c(\cdot)$ не зависит от μ и $\lim_{u \rightarrow 0} c(u) = 0$. Будем также предполагать, что $|\lambda_0| = 1$ и $|\lambda_\mu| > 1$ при $\mu > 0$. Допустим, что век-

торное поле $z \mapsto z + \lambda_0^{-1} P_0(z)$ имеет компактное инвариантное нормально гиперболическое¹⁾ к нему многообразие S . Допустим также, что S инвариантно относительно преобразования $z \mapsto ze^{i\sigma}$ (при всех действительных σ). Тогда для достаточно малых $\mu > 0$ существуют отображения $\theta_\mu \in C^l(S, \mathbb{C}^n)$ и многообразия $S_\mu \subset \mathbb{C}^n$, для которых:

- (1) θ_μ — диффеоморфизм S на S_μ .
- (2) S_μ инвариантно относительно Φ_μ , и Φ_μ нормально гиперболическ к S_μ .
- (3) $S_\mu \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$.
- (4) Если Λ — группа унитарных преобразований $\mathbb{C}^n$, Λ коммутирует с Φ_μ для всех μ , а $\Lambda S = S$, то $\Lambda S_\mu = S_\mu$. В действительности каждое θ_μ коммутирует с Λ .
- (5) Если $\mu \rightarrow \Phi_\mu$ — непрерывное отображение из $\mathbb{R}$ в пространство C^k , $k \leq l$, то $\mu \rightarrow \theta_\mu$ — непрерывное отображение из $\{\mu: 0 < \mu < \mu_0\}$ в $C^k(S, \mathbb{C}^n)$.

Теорема 7.2 дает информацию об инвариантных многообразиях при $\mu > 0$. Если предположить $|\lambda_\mu| < 1$ при $\mu < 0$, то можно получить аналогичную информацию относительно $\mu < 0$, применяя теорему 7.2 к Φ_μ^{-1} . Легко проверить, что

$$\Phi_\mu^{-1}(z) = \lambda_\mu^{-1} z - \lambda_\mu^{-3} \bar{\lambda}_\mu^{-1} P_{-\mu}(z) + Q'_{-\mu}(z).$$

Поэтому следует искать инвариантные многообразия векторного поля $z \mapsto z - \lambda_0^{-1} P_0(z)$.

4. Примеры

1. Пусть Λ_G^0 — полная ортогональная группа $E^0 = \mathbb{R}^n$ и $\lambda_0 = 1$ является единственным собственным значением $Df_0(0)$ на окружности $|z| = 1$. Пусть $h = f|_V$, V — центральное многообразие f из утверждения 7.1. В соответствии с тео-

¹⁾ Нормальная гиперболичность определяется следующим образом. Пусть S — дифференцируемое подмногообразие нормированного векторного пространства E , инвариантное относительно диффеоморфизма $f: E \rightarrow E$. Пусть $B \rightarrow S$ — подрасслоение $TE|_S$, инвариантное относительно Df . Определим $\rho(Df|B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left[\sup_{x \in S} \|Df^n(x)|_B\|^{1/n} \right]$; f называется нормально гиперболическим к S , если существует разложение $TE|_S$, $TE|_S = N_+ \oplus TS \oplus N_-$, такое, что $\rho(Df|N_-) < \min\{1, \rho(Df|TS)\}$, а $\rho(Df^{-1}|N_+) < \min\{1, \rho(Df^{-1}|TS)\}$. Это означает, что итерации Df сжимают каждый вектор из N_- больше, чем Df сжимает любой вектор из TS , и итерации Df растягивают каждый вектор из N_+ больше, чем он растягивает любой вектор из TS .

ремой 7.1 мы можем считать h определенным в окрестности точки $(0, 0)$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, где

- (1) каждое h_μ коммутирует с Λ_G^0 ;
- (2) $h_\mu(0) = 0$ для всех μ ;
- (3) $Dh_\mu(0) = \lambda_\mu I$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_\mu \in \mathbb{R}$ для всех μ .

Так как Λ_G^0 содержит все отражения, то, как легко видеть, $h_\mu(x)$ пропорционально x . Кроме того, h_μ переводит множество сфер с центром в нуле в себя. Поэтому $h_\mu(x) = \lambda_\mu x + p_\mu(|x|)x$, где для каждого μ $u \mapsto p_\mu(u)$ — действительная функция класса C^{l-1} , $p_\mu(0) = 0$. Запишем $p_\mu(|x|) = a_\mu |x|^2 + o(|x|^2)$. Неблуждающее множество¹⁾ h_μ вблизи нуля состоит в точности из тех сфер, которые отображаются в себя; каждая такая сфера целиком состоит из неподвижных точек. Если f по меньшей мере класса C^3 по μ и $a_0 < 0$ (т. е. $(0, 0)$ — слабый аттрактор), мы можем с помощью аналогичного анализа увидеть, что для малых $\mu > 0$ существует однопараметрическое семейство таких сфер, по одной для каждого $\mu > 0$, которые стремятся к нулю при $\mu \rightarrow 0$.

2²⁾. Рассмотрим $O(2)$ как группу, порожденную комплексными числами α с $|\alpha| = 1$ и отражением r . Предположим, что мы находимся в ситуации случая 2 разд. 2, где $F = \mathbb{C}^2$ и Λ_G^0 — неприводимое представление $O(2)$ на $\mathbb{C}^2$, задаваемое как

$$\Lambda_\alpha^0(z_1, z_2) = (\alpha z_1, \alpha^{-1} z_2),$$

$$\Lambda_r^0(z_1, z_2) = (z_2, z_1).$$

Будем считать $f|_V$ действующим в окрестности точки $(0, 0) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$ и обозначим это отображение через h . В соответствии с леммой 7.2 после замены координат мы получим новое отображение h' :

$$h'_\mu(z) = \lambda_\mu z + P_\mu(z) + Q_\mu(z),$$

где $P_\mu(z)$ однороден степени 2 по z и степени 1 по $\bar{z}$, а $Q_\mu(z)$ порядка $o(|z|^3)$ равномерно по μ . Мы будем предполагать, что $|\lambda_0| = 1$, $|\lambda_\mu| > 1$ при $\mu > 0$, $|\lambda_\mu| < 1$ при $\mu < 0$ и $\lambda_0^3 \neq 1$, $\lambda_0^4 \neq 1$.

¹⁾ Точка x топологического пространства X называется неблуждающей точкой отображения f , если для любой окрестности $U \ni x$ существует $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, такое, что $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Объединение неблуждающих точек f называется неблуждающим множеством, или, точнее, множеством неблуждающих точек. — Прим. перев.

²⁾ Этот пример разъяснил нам Дэвид Фрид. Он является переработкой разд. 4.9 работы Рюэля.

Легко видеть, что каждое $P_\mu(z)$ Λ_G^0 -инвариантно. Пусть $P(z)$ — Λ_G^0 -инвариантный однородный многочлен степени 2 по z и степени 1 по $\bar{z}$. Запишем $P(z) = (P_1(z), P_2(z))$, где

$$P_1(z) = Az_1^2\bar{z}_1 + Bz_1z_2\bar{z}_1 + Cz_2^2\bar{z}_1 + Dz_1^2\bar{z}_2 + Ez_1z_2\bar{z}_2 + Fz_2^2\bar{z}_2$$

и

$$P_2(z) = Qz_1^2\bar{z}_1 + Rz_1z_2\bar{z}_1 + Sz_2^2\bar{z}_1 + Tz_1^2\bar{z}_2 + Uz_1z_2\bar{z}_2 + Vz_2^2\bar{z}_2.$$

Так как $P(\alpha z_1, \alpha^{-1}z_2) = (\alpha P_1(z), \alpha^{-1}P_2(z))$ для всех α с $|\alpha| = 1$, мы видим, что $B = C = D = F = Q = S = T = U = 0$. Так как $P(z_2, z_1) = (P_2(z), P_1(z))$, то $A = V$ и $E = R$. Таким образом,

$$P(z) = (Az_1^2\bar{z}_1 + Ez_1z_2\bar{z}_2, Az_2^2\bar{z}_2 + Ez_1z_2\bar{z}_1).$$

Более подробное вычисление показывает, что можно записать $P(z)$ в виде

$$P(z) = a(|z_1|^2 + |z_2|^2)(z_1, z_2) + b(|z_1|^2 - |z_2|^2)(z_1, -z_2);$$

$a, b \in \mathbb{C}.$

Поэтому

$$h'_\mu(z) = \lambda_\mu z + a_\mu(|z_1|^2 + |z_2|^2)z + b_\mu(|z_1|^2 - |z_2|^2)(z_1, -z_2) + Q_\mu(z).$$

В соответствии с теоремой 2 мы теперь должны изучить дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dt} = z \pm \lambda_0^{-1} \{a_0(|z_1|^2 + |z_2|^2)(z_1, z_2) + b_0(|z_1|^2 - |z_2|^2)(z_1, -z_2)\}. \quad (4.1)$$

Мы найдем инвариантные многообразия S этого дифференциального уравнения, которые также инвариантны относительно действия Λ_G^0 и отображений $z \mapsto \alpha z$, $|\alpha| = 1$. Предположим теперь, что $q: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ — полином по $z, \bar{z}$, инвариантный относительно Λ_G^0 и отображений $z \mapsto \alpha z$, $|\alpha| = 1$ (т. е. $q(z) = q(\Lambda_G^0 z)$ для всех $g \in G$, $q(z) = q(\alpha z)$ для всех α с $|\alpha| = 1$). Допустим далее, что S является в точности объединением орбит какой-нибудь любой его точки, порожденных действием Λ_G^0 и группы отображений $z \mapsto \alpha z$, $|\alpha| = 1$. Отсюда следует, что $\frac{d}{dt} q(z) = 0$ для $z \in S$. Поэтому мы будем искать многообразия S посредством изучения таких полиномов $q(z)$.

При $|\alpha| = 1$ $q(z_1, z_2) = q(\alpha z_1, \alpha^{-1} z_2) = q(\alpha^2 z_1, z_2)$. Следовательно, при фиксированном z_2 $q(z_1, z_2)$ зависит только от $|z_1|^2$. Аналогично, при фиксированном z_1 $q(z_1, z_2)$ зависит только от $|z_2|^2$. Так как $q(z_1, z_2) = q(z_2, z_1)$, то q симметричен по z_1 и z_2 . Пусть теперь $s(z_1, z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2$, $d(z_1, z_2) = 2|z_1 z_2|$. Тогда s и d^2 образуют базис интересующих нас полиномов над полем $\mathbb{C}$.

Пусть $\alpha = \operatorname{Re}(\lambda_0^{-1} a_0)$ и $\beta = \operatorname{Re}(\lambda_0^{-1} b_0)$. Пусть $z^1, z^2 \in \mathbb{C}^2$, где $z^1 = (z_1^1, z_2^1)$, $z^2 = (z_1^2, z_2^2)$, $z_j^i \in \mathbb{C}$. Положим $[z^1, z^2] = z_1^1 z_1^2 + z_2^1 z_2^2$. Тогда $s(z) = [z, \bar{z}]$ и

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \left[z, \frac{d\bar{z}}{dt} \right] + \left[\frac{dz}{dt}, \bar{z} \right] = \\ &= [z, \bar{z} \pm \lambda_0 \{ \bar{a}_0 (|z_1|^2 + |z_2|^2) (\bar{z}_1, \bar{z}_2) + \bar{b}_0 (|z_1|^2 - |z_2|^2) (\bar{z}_1, -\bar{z}_2) \}] + \\ &\quad + [z \pm \lambda_0^{-1} \{ a_0 (|z_1|^2 + |z_2|^2) (z_1, z_2) + \\ &\quad + b_0 (|z_1|^2 - |z_2|^2) (z_1, -z_2) \}, \bar{z}] = 2s \pm (2\alpha s^2 + 2\beta (s^2 - d^2)). \end{aligned}$$

Далее, так как $d^2 = 4|z_1|^2 |z_2|^2 = 4z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2$, то можно получить, что $\frac{d}{dt} d = 2(d \pm sd)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{ds}{dt} &= s \pm (\alpha s^2 + \beta (s^2 - d^2)), \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} d &= d \pm \alpha s d. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Мы сделаем предположение о типичности, состоящее в том, что α , β и $\alpha + \beta$ не равны нулю. Вспоминая, что d и s — неотрицательные функции, мы видим, что для инвариантных многообразий имеются три возможности:

- (1) $d = 0, s = 0$;
- (2) $d = 0, s = \mp (\alpha + \beta)^{-1}$;
- (3) $d = s = \mp \alpha^{-1}$.

Теперь получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\text{поток (4.1)}} & \mathbb{C}^2 \\ (s, d) \downarrow & & \downarrow (s, d) \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\text{поток (4.2)}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Так как векторное поле (4.2) липшиц-непрерывно, то его нулям соответствуют особые точки потока. Поэтому их прообраз в $\mathbb{C}^2$ инвариантен относительно потока (4.1). Следова-

тельно, мы нашли следующие инвариантные многообразия (4.1):

$$(1) S^{(1)} = \{0\};$$

$$(2) S^{(2)} = \{z \in \mathbb{C}^2: d = 0, s = \mp (\alpha + \beta)^{-1}\} = \\ = \{z \in \mathbb{C}^2: z_1 = 0, |z_2|^2 = \mp (\alpha + \beta)^{-1}\} \cup \\ \cup \{z \in \mathbb{C}^2: z_2 = 0, |z_1|^2 = \mp (\alpha + \beta)^{-1}\} = \\ = \text{две окружности или } \emptyset.$$

$$(3) S^{(3)} = \{z \in \mathbb{C}^2: s = d = \pm 1/\alpha\} = \{z: |z_1|^2 = |z_2|^2 = \\ = \mp 1/2\alpha\} = \text{тор или } \emptyset.$$

Векторное поле (4.1) нормально гиперболично к каждому из этих многообразий:

(1) производная (4.1) в 0 равна 1;

(2) производная (4.2) на $S^{(2)}$ относительно переменных s, d равна

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2\beta/\alpha + \beta \end{pmatrix};$$

(3) производная (4.2) на $S^{(3)}$ относительно переменных s, d — это матрица

$$\begin{pmatrix} -2(1 + 2\beta/\alpha) & 4\beta/\alpha \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

которая имеет собственные значения -2 и $-4\beta/\alpha$.

В этом случае, изучая поток (4.2) в (s, d) -плоскости, можно увидеть, что векторное поле (4.1) не содержит других компактных инвариантных многообразий. Вследствие определения s и d необходимо только рассмотреть область $0 \leq d \leq s$. Теперь для определенности предположим, что $f_\mu: E \rightarrow E$, а $\text{Spes } Df_\mu(0)$, за исключением собственных значений $\lambda_\mu, \bar{\lambda}_\mu$, целиком содержится в круге $|z| < 1$. Допустим, что $|\lambda_\mu| < 1$ при $\mu < 0$, а при $\mu > 0$ $|\lambda_\mu| > 1$. Будем считать, кроме того, что $\alpha < 0$ и $\alpha + \beta < 0$ (условия «слабого аттрактора»). Тогда для каждого $\mu > 0$ мы имеем следующие инвариантные многообразия:

$$S_\mu^{(1)} = \{0\}, \text{ неустойчивое при } \mu > 0.$$

$S_\mu^{(2)}$ — две замкнутые кривые, инвариантные относительно действия f и связной компоненты единицы группы Λ_G^0 и переставляемые отражениями. Они устойчивы, если $\beta < 0$, и неустойчивы, если $\beta > 0$.

$$S_\mu^{(3)} — \text{гор, устойчивый при } \beta > 0, \text{ неустойчивый при } \beta < 0.$$

$S_\mu^{(3)}$ можно подвергнуть дальнейшему анализу. Подпространство $\Pi_\alpha = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2: z_2 = \alpha z_1\}$ состоит из точек неподвижных при действии $\Lambda_r^0 \circ \Lambda^0 \subset \Lambda_G^0$ (этот оператор действует по формулам $z_1 \mapsto \alpha z_2, z_2 \mapsto \alpha^{-1} z_1$). Так как отображение θ_μ из теоремы 7.2 коммутирует с Λ_G^0 , мы получаем, что $\theta_\mu(S_\mu^{(3)} \cap \Pi_\alpha) \subset \Pi_\alpha$. Поскольку $h = f|_V$ также коммутирует с Λ_G^0 , то $h(S_\mu^{(3)} \cap \Pi_\alpha) = S_\mu^{(3)} \cap \Pi_\alpha$. Таким образом, $S_\mu^{(3)}$ состоит из объединения непересекающихся замкнутых кривых вида $S_\mu^{(3)} \cap \Pi_\alpha$, каждая из них инвариантна относительно h , и они переставляются элементами Λ_G^0 . Видимо, в этом примере «одновременно происходят две бифуркации рождения цикла», в результате чего для каждого $\mu > 0$ появляются инвариантные множества вида (точка $\cup$ замкнутая кривая) $\times$ (точка $\cup$ замкнутая кривая).

5. Поток между цилиндрами

Напомним ситуацию для течения Куэтта: вязкая несжимаемая жидкость заполняет пространство между двумя концентрическими цилиндрами. Пусть R_1 — радиус внутреннего цилиндра, а R_2 — радиус внешнего цилиндра. Допустим, что мы вращаем оба цилиндра. Пусть Ω_1 — угловая скорость внутреннего цилиндра, а Ω_2 — угловая скорость внешнего цилиндра. Будем считать, что $\Omega_1 > 0$ и $\Omega_2 > 0$ (т. е. мы вращаем оба цилиндра против часовой стрелки). При малых значениях Ω_1 и Ω_2 можно наблюдать установившийся горизонтальный ламинарный поток, называемый течением Куэтта. Действительно, при произвольных Ω_1, Ω_2 течение Куэтта является явным решением уравнений Навье — Стокса, которое в цилиндрических координатах (r, φ, z) задается следующим образом (см. гл. 1):

$$V_\theta = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r}.$$

Чтобы получить это решение, мы должны игнорировать особые явления, возникающие на концах цилиндров. Мы сделаем это, отождествляя концы цилиндров, так что пространство A , в котором заключена наша жидкость, будет прямым произведением кольца и окружности.

Пусть E — пространство C^r -векторных полей Y на A с C^r -топологией, удовлетворяющих условиям $\operatorname{div} Y = 0$ и $Y|_{\partial A} = 0$. Мы будем считать Ω_1 малой фиксированной величиной, а Ω_2 переменной: Ω_2 будет нашим бифуркационным параметром μ . Для каждого μ пусть Z_μ означает соответ-

ствующее векторное поле Куэтта на A . Тогда для каждого μ векторные поля Y на A , удовлетворяющие условиям $\operatorname{div} Y = 0$, Y неподвижно относительно ∂A , образуют пространство E_μ ; его можно мыслить себе как $Z_\mu + E$. Будем очевидным образом отождествлять каждое E_μ с E . Будем считать, что уравнения Навье — Стокса определяют для каждого μ векторное поле X_μ на E . Сделаем предположение (вообще говоря, неверное), что векторное поле $X: E \times \mathbb{R} \rightarrow E$, задаваемое равенством $X(Y, \mu) = X_\mu(Y)$, удовлетворяет условиям работы Рюэля¹⁾. Отметим, что точка $(0, \mu) \in E \times \mathbb{R}$ соответствует векторному полю Куэтта Z_μ . Так как течение Куэтта — стационарное решение уравнений Навье — Стокса, то $X_\mu(0) = 0$ для всех μ .

Пусть $G = SO(2) \times O(2)$ — произведение группы вращений кольца на полную ортогональную группу окружности. Это естественная группа симметрий задачи. Отметим, что векторное поле, соответствующее течению Куэтта, G -инвариантно. Для каждого $g \in G$ определим $\Lambda_g: E \rightarrow E$ как $(\Lambda_g Y)(x) = DgY(g^{-1}(x))$, где $x \in A$. Так как каждое g является изометрией A и $D^k g = D^k g^{-1} = 0$ при $k > 1$, то легко проверить, что каждое Λ_g — линейная изометрия E . Таким образом, $\Lambda_G = \{\Lambda_g: g \in G\}$ — это группа линейных изометрий E . Физические симметрии задачи означают, что $X_\mu \Lambda_g = \Lambda_g X_\mu$ при всех $g \in G$.

Предположим, что при малых μ точка 0 является устойчивой особой точкой X_μ (на самом деле это можно доказать, см. Серрин [1, 2] и гл. 2А и 9). Данное предположение согласуется с известным экспериментальным фактом, что течение Куэтта устойчиво при малых Ω_1, Ω_2 . Допустим, что в первой точке бифуркации $\mu_0 > 0$ только конечное число собственных значений оператора $DX_\mu(0)$ достигает мнимой оси, причем каждое имеет конечную кратность. Тогда, в общем случае, устойчивое многообразие $V \subset E \times \mathbb{R}$ в момент бифуркации должно касаться $E^0 \times \mathbb{R}$ в точке $(0, \mu_0)$, где E^0 — подпространство E , в котором Λ_G действует неприводимо.

Допустим, что:

- (1) $E^0 \cong \mathbb{R}^2$;
- (2) если $g \in SO(2) \times 1$, то каждая точка E^0 неподвижна относительно действия Λ_g ;
- (3) если $g \in 1 \times O(2)$, то Λ_g действует на E^0 точно так же, как соответствующий элемент полной ортогональной группы пространства $\mathbb{R}^2$.

¹⁾ Чтобы все это сделать корректно, можно использовать методы гл. 8 и 9.

Таким образом, по существу Λ_G^0 — это полная ортогональная группа плоскости. Если $(0, \mu_0)$ — «слабый аттрактор» для X_μ , то, согласно примеру 1 п. 4 (приспособленному для векторного поля), для каждого малого $\mu > \mu_0$ мы ожидаем существование следующих инвариантных множеств вблизи начала $E \times \{\mu\}$ (см. рис. 7.1):

- (1) Начало координат — неустойчивый нуль поля X_μ .
- (2) Замкнутая кривая S_μ нулей поля X_μ в многообразии V_μ ; каждая S_μ инвариантна относительно Λ_G , $S_\mu \rightarrow 0$ при

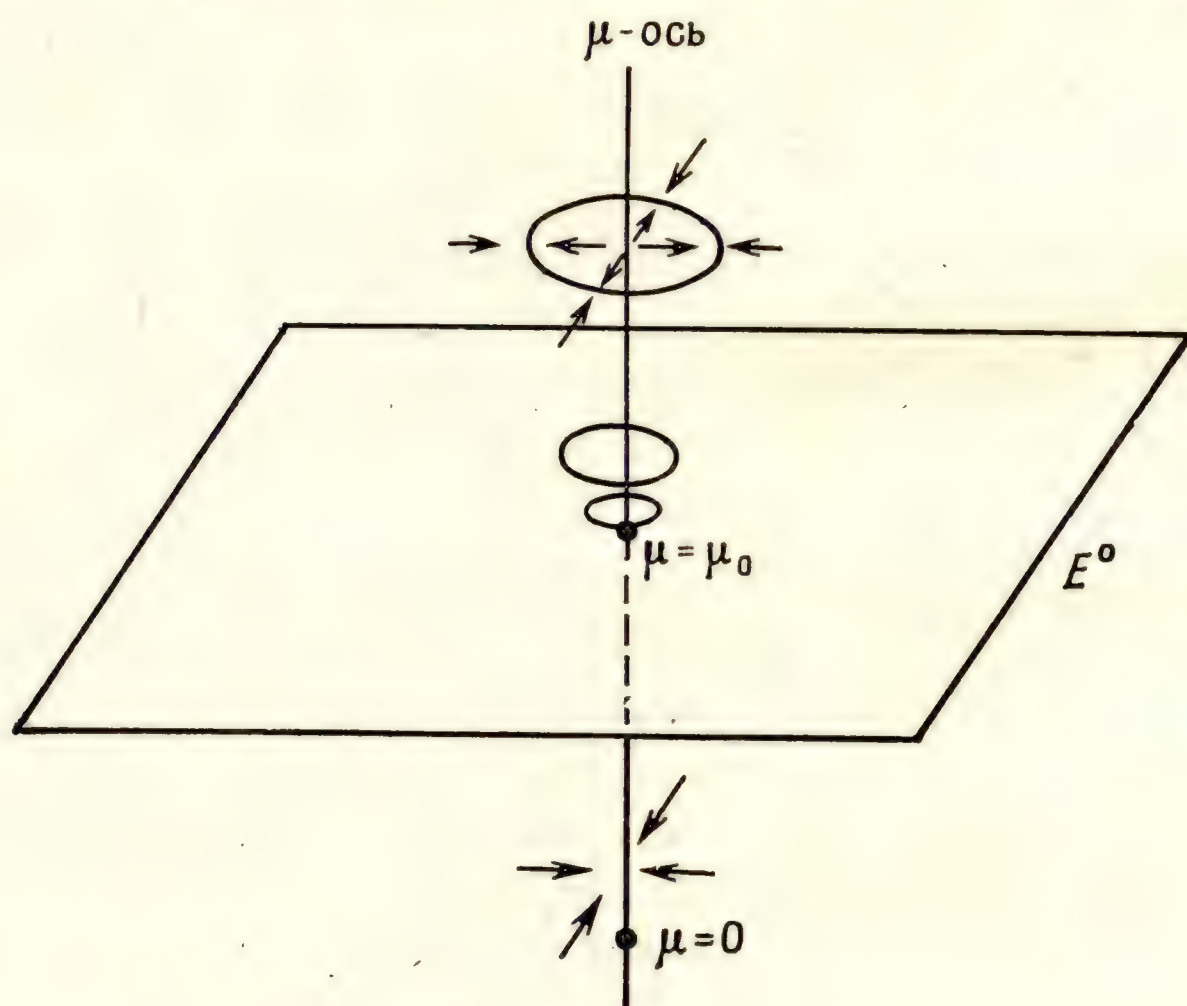


Рис. 7.1.

$\mu \rightarrow 0$, и каждая S_μ является притягивающим множеством в $E \times \{\mu\}$.

Предположим, что $Y_1, Y_2 \in S_\mu$ и $Y_1 = \Lambda_g Y_2$, $g \in 1 \times O(2)$. Тогда $Y_1(x) = Dg Y_2(g^{-1}x)$. Это означает, что Y_1 и Y_2 отличаются только вертикальным сдвигом и (или) отражением A . Кроме того, так как $\Lambda_{SO(2) \times 1}$ действует тождественно на E^0 , мы видим, что каждое $Y \in S_\mu$ неподвижно относительно элементов $\Lambda_{SO(2) \times 1}$, т. е. каждое $Y \in S_\mu$ обладает горизонтальной вращательной симметрией. Такое описание S_μ согласуется с экспериментально наблюдаемым явлением — вихрями Тейлора. Когда μ проходит некоторое критическое значение, обычно наблюдается, что течение Куэтта разбивается на ячейки, внутри которых жидкость движется радиально от внутреннего цилиндра к внешнему и обратно и в то же время продолжает свое круговое движение вокруг вертикальной оси (рис. 7.2). Для уравнений Навье — Стокса вихри Тейлора

являются устойчивым решением с горизонтальной вращательной симметрией. Так как любая картина вихрей Тейлора может встретиться с той же вероятностью, что и ее сдвиг в вертикальном направлении на любое расстояние (предполагая, что концы цилиндра отождествлены), мы видим, почему из течения Куэтта рождается целая окружность неподвижных точек, которые переставляются операторами $\Lambda_{1 \times O(2)}$. Когда μ возрастает, S_μ на нашем рисунке все сильнее удаляется от точки $(0, \mu)$; это соответствует тому, что вихри Тейлора «усиливаются», т. е. усиливается радиальное движение. Отметим, что при $\mu > \mu_0$ течение Куэтта остается нулем поля X_μ , однако этот нуль неустойчив.

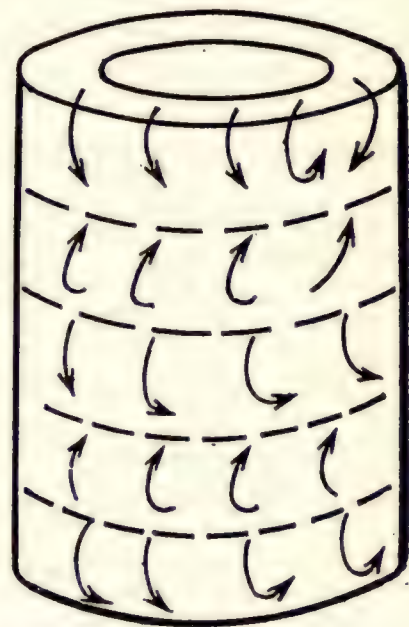


Рис. 7.2.

(Вышесказанное происходит не из-за того, что векторное поле вихрей Тейлора инвариантно относительно конечного числа вертикальных сдвигов или, в нашей модели, относительно нетривиальной подгруппы группы $\Lambda_{1 \times SO(2)}$. Чтобы получить этот результат, нужно предположить, что для $g \in 1 \times O(2)$, Λ_g действует на $E^0 \cong \mathbb{R}^2$ следующим образом: рассмотрим $O(2)$ как группу, образованную числами θ , $0 \leq \theta < 2\pi$, где θ задает угол поворота, и отражением r . Представим тогда $1 \times O(2)$ в $O(2)$ (изометриях $\mathbb{R}^2$) с помощью гомоморфизма $(1, \theta) \mapsto n\theta$, $(1, r) \mapsto r$. Так как это гомоморфизм *на*, мы получаем, как и выше, S_μ . Теперь, однако, каждое $Y_\mu \in S_\mu$ инвариантно относительно Λ_H , где $H = SO(2) \times \{0, 2\pi/n, 4\pi/n, \dots, 2(n-1)\pi/n\}$. Эта дополнительная инвариантность относительно новой Λ_G^0 будет сохраняться и в дальнейшем.)

Теперь мы изучим вторую бифуркацию X_μ . Ситуация усложняется тем обстоятельством, что при $\mu > \mu_0$ нули X_μ , которыми мы интересуемся, образуют одномерные множества. Мы предположим, что уже сделана такая замена координат, что $S_\mu \subset E^0 \times \{\mu\}$.

Пусть $Y_\mu \in S_\mu$. При малых $\mu > \mu_0$, $DX_\mu(Y_\mu)$ имеет собственное значение 0 кратности 1, а остальная часть спектра лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. Отметим, что если также $Y'_\mu \in S_\mu$, то $Y'_\mu = \Lambda_g Y_\mu$ для некоторого $g \in 1 \times O(2)$, поэтому $X(Y'_\mu) = X\Lambda_g(Y_\mu) = \Lambda_g X(Y_\mu)$. Следовательно, $DX(Y'_\mu) \cdot \Lambda_g = \Lambda_g \cdot DX(Y_\mu)$, т. е. $DX(Y'_\mu)$ и $DX(Y_\mu)$ сопряжены. Таким образом, $\operatorname{Spec} DX(Y_\mu) = \operatorname{Spec} DX(Y'_\mu)$.

Предполагая, что $\Lambda_{1 \times O(2)}$ действует на E^0 подобно полной ортогональной группе плоскости, получаем, что Y_μ

неподвижно относительно в точности двух элементов $\Lambda_1 \times O(2)$, именно $\Lambda_{(1,1)}$ и $\Lambda_{(1,r)}$, где $\Lambda_{(1,r)}^0$ — как раз отражение относительно прямой, определенной Y_μ . Так как E^0 неподвижно в каждой точке относительно $\Lambda_{SO(2) \times 1}$, то подгруппа группы Λ_G , которая оставляет на месте Y_μ , — это $\Lambda_{SO(2)} \times \{1, r\}$. Поэтому $DX(Y_\mu) \cdot \Lambda_g = \Lambda_g \cdot DX(Y_\mu)$ для всех $g \in SO(2) \times \{1, r\}$.

Допустим, что для $\mu_0 < \mu < \mu_1$ и $Y_\mu \in S_\mu$ $\text{Spec } DX_\mu(Y_\mu)$ содержится в полуплоскости $\text{Re } z < 0$, за исключением одного собственного значения 0 кратности 1. Допустим также, что для $Y_{\mu_1} \in S_{\mu_1}$ $\text{Spec } DX_{\mu_1}(Y_{\mu_1}) \cap (\text{Re } z = 0)$ состоит из конечного числа изолированных собственных значений (включая 0), каждое из которых имеет конечную кратность. Зафиксируем $Y_{\mu_1} \in S_{\mu_1}$, и пусть r теперь обозначает единственный элемент группы $O(2)$, для которого Y_{μ_1} неподвижно относительно $\Lambda_{SO(2) \times \{1, r\}}$. X имеет центральное многообразие W в точке Y_{μ_1} касающееся $T_{Y_{\mu_1}} S_{\mu_1} \oplus E^1 \oplus \{\mu\text{-ось}\}$, где E^1 — конечномерное подпространство $T_{Y_{\mu_1}} \oplus E^1$ инвариантно относительно $\Lambda_{SO(2) \times \{1, r\}}$. Так как W содержит всю локальную рекуррентность поля X около точки Y_{μ_1} , то W содержит все точки $\bigcup_{\mu} S_\mu$ в окрестности Y_{μ_1} .

Пусть $\Pi: E \times \mathbb{R} \rightarrow E$ — проекция на первый сомножитель. Тогда для каждого μ , близкого к μ_1 , существует единственное $Y_\mu \in S_\mu$, для которого $\Pi Y_\mu / \|Y_\mu\| = \Pi Y_{\mu_1} / \|Y_{\mu_1}\|$. Возьмем теперь это в качестве определения Y_μ . Тогда подгруппа Λ_G , которая оставляет Y_μ неподвижным, в точности есть $\Lambda_{SO(2) \times \{1, r\}}$.

Как в п. 1, мы можем отождествить окрестность Y_{μ_1} в W с окрестностью U точки $(Y_{\mu_1}, 0, 0)$ в $T_{Y_{\mu_1}} S_{\mu_1} \oplus E^1 \oplus \{\mu\text{-ось}\}$, и $X|_U$ — с векторным полем на U (которое снова назовем X) таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

- (1) Y_μ соответствует $(Y_{\mu_1}, 0, \mu)$;
- (2) $\Lambda_{SO(2) \times \{1, r\}}$ действует как группа гильбертовых изометрий $T_{Y_{\mu_1}} S_{\mu_1} \oplus E^1$;
- (3) X на U коммутирует с $\Lambda_{SO(2) \times \{1, r\}}$. В частности, $DX_\mu(Y_{\mu_1}, 0, \mu)$ коммутирует с $\Lambda_{SO(2) \times \{1, r\}}$.

В общем случае мы имеем одну из двух возможностей:

- (1) $\text{Spec } DX_\mu(Y_{\mu_1}, 0, \mu)$ состоит из собственного значения 0 с собственным подпространством $T_{Y_{\mu_1}} S_{\mu_1}$ и единственного действительного собственного значения λ_μ с $\lambda_{\mu_1} = 0$.

- (2) $\text{Spec } DX_\mu(Y_{\mu_1}, 0, \mu)$ состоит из собственного значения 0 с собственным подпространством $T_{Y_{\mu_1}} S_{\mu_1}$ и одной пары комплексно-сопряженных собственных значений $\lambda_\mu, \bar{\lambda}_\mu$ с $\text{Re } \lambda_{\mu_1} = 0$.

Предположим, что выполняется (2). Тогда для каждого μ , близкого к μ_1 , существует единственное подпространство $E_\mu^2 \subset T_{(Y_{\mu_1}, 0, \mu)}U$, такое, что $DX(Y_{\mu_1}, 0, \mu)$ оставляет E_μ^2 инвариантным и $DX(Y_{\mu_1}, 0, \mu)|_{E_\mu^2}$ имеет собственными значениями

только $\lambda_\mu, \bar{\lambda}_\mu$. Если мы теперь будем считать E_μ^2 подпространством $T_{Y_{\mu_1}}S_{\mu_1} \oplus E^1 \oplus \{\mu\text{-ось}\}$, то E_μ^2 инвариантно относительно действия $\Lambda_{SO(2) \times \{1, r\}}$, так как этим свойством обладает $DX(Y_{\mu_1}, 0, \mu)$.

В типичном случае $\Lambda_{SO(2) \times \{1, r\}}$ действует неприводимо на $E_{\mu_1}^2$. Допустим, $E_{\mu_1}^2 \cong \mathbb{R}^2$, тогда $E^1 \cong \mathbb{R}^2$ и каждое $E_\mu^2 \cong \mathbb{R}^2$. Предположим, что $\Lambda_{SO(2) \times \{1, r\}}$ действует на $E_{\mu_1}^2$ подобно вращениям плоскости. Другими словами, предположим, что каждая точка $E_{\mu_1}^2$ неподвижна относительно $\Lambda_{(1, r)}$ и $\Lambda_{SO(2) \times 1}$ действует на $E_{\mu_1}^2$ вращениями плоскости. Так как $\Lambda_{(1, r)}$ оставляет $E_{\mu_1}^2$ неподвижной в каждой точке, то $E_{\mu_1}^2$ инвариантна относительно X_{μ_1} . Так как E_μ^2 почти параллельна $E_{\mu_1}^2$ и $\Lambda_{SO(2) \times \{1, r\}}$ -инвариантна, мы можем заключить, что E_μ^2 на самом деле параллельна $E_{\mu_1}^2$ и, следовательно, E_μ^2 X_μ -инвариантно.

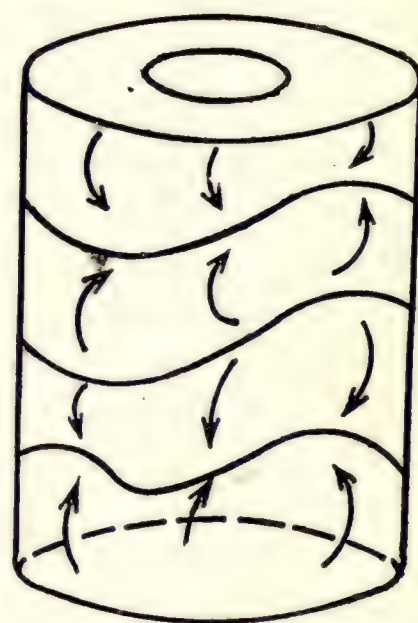


Рис. 7.3.

Из результатов последнего параграфа следует, что мы могли бы рассмотреть бифуркацию векторного поля X' , определенного на $E_{\mu_1}^2 \times \{\mu\text{-ось}\}$, где $X'_\mu = X|_{E_\mu^2}$ (здесь мы отожде-

ствляем E_μ^2 с $E_{\mu_1}^2 \times \{\mu\}$). X'_μ коммутирует с вращениями $E_{\mu_1}^2 \cong \mathbb{R}^2$, и $\text{Spec } DX'_\mu(0, \mu) = \{\lambda, \bar{\lambda}\}$, где $\text{Re } \lambda < 0$ при $\mu < \mu_1$, $\text{Re } \lambda = 0$ при $\mu = \mu_1$. Предположим что $\text{Re } \lambda > 0$ при $\mu > \mu_1$. Если мы допустим, что $(0, \mu_1)$ — слабый аттрактор для X'_{μ_1} , то получим «бифуркацию рождения цикла с симметрией»: замкнутые орбиты X'_μ , которые появляются при $\mu > \mu_1$, являются геометрическими окружностями (они инвариантны относительно поворотов) и движение на этих окружностях происходит с постоянной скоростью.

Глобально окружность неподвижных точек S_{μ_1} бифурцирует в устойчивый тор T_μ для $\mu > \mu_1$, T_μ составлен из замкнутых орбит¹⁾, каждая из которых рождается из одной неподвижной точки S_{μ_1} . Замкнутые орбиты инвариантны относи-

¹⁾ Аналогичное инвариантное множество существует и для течения за цилиндром.

тельно $\Lambda_{SO(2) \times \{1, r\}}$ и переставляются элементами $\Lambda_{1 \times O(2)}$. Эта бифуркация соответствует следующему экспериментальному наблюдению; когда μ возрастает, вихри Тейлора становятся «дважды периодическими», т. е. наводятся горизонтальные волны, и эта волновая структура вращается горизонтально с постоянной скоростью (см. рис. 7.3).

Это рассуждение не учитывает горизонтальной периодичности, часто наблюдаемой в волновой картине. Эта периодичность может быть объяснена, если предположить, что представление $SO(2) \times 1$ в $O(2)$ (группе изометрий $E_{\mu_1}^2 \cong \mathbb{R}^2$) имеет вид $(\theta, 1) \mapsto n\theta$. Более серьезной проблемой является то, что из нашего рассуждения вытекает сохранение симметрии относительно вертикального отражения после второй бифуркации: элементы T_μ инвариантны относительно $\Lambda_{(1, r)}$. Эта симметрия не наблюдается экспериментально. В целом ситуация требует дальнейшего изучения. Методы, обсуждавшиеся здесь, кажутся очень плодотворными для продвижения в этом направлении.

Глава 8

БИФУРКАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Как мы уже видели в предыдущих главах, в нашем распоряжении имеются, вообще говоря, два метода доказательства бифуркационных теорем. Первый — это исходный метод Хопфа, а второй — использование техники инвариантного многообразия для сведения задачи к конечномерному (часто двумерному) случаю.

Для уравнений с частными производными, таких, как уравнения Навье — Стокса (см. гл. 1), теоремы в том виде, как они были сформулированы Хопфом (см. гл. 5) или Рюэлем и Такенсом (см. гл. 3, 4) неприменимы, о чем уже говорилось. Трудность здесь состоит в том, что векторные поля, порождающие потоки, обычно негладкие функции на любом разумно выбранном банаховом пространстве.

И все же метод Хопфа может быть использован для уравнений с частными производными при условии, что уравнения имеют определенный «параболический» тип. Это было сделано Юдовичем [11], Иоссом [3], Джозефом и Сэттинджером [1] и другими¹⁾. В частности, эти методы применимы к уравнениям Навье — Стокса. Полученный здесь результат состоит в том, что при выполнении спектральных условий теоремы Хопфа периодическое решение действительно рождается и, более того, применим анализ устойчивости, данный ранее. Главное предположение, необходимое для этого метода — это аналитичность решения по t .

Здесь мы хотим кратко остановиться на другом методе получения подобных результатов. Фактически предыдущие разделы были написаны таким образом, чтобы сделать этот метод совершенно ясным: вместо использования гладкости порождающего векторного поля или t -аналитичности решения мы использовали гладкость потока F_t^u . Нам кажется, что это дает технические преимущества при рассмотрении следующей бифуркации рождения инвариантного тора. Аналитичности по t недостаточно для работы с отображением Пуанкаре периодического решения (см. гл. 2В).

¹⁾ См. также Колесов [1]. — *Прим. перев.*

Полезно заметить, что существуют общие результаты, применимые к конкретным эволюционным уравнениям с частными производными, которые позволяют определять гладкость их потоков на соответствующим образом выбранных банаховых пространствах. Эти результаты получены в работе Дорро и Марсдена [1]. Для удобства читателя в главе 8А мы приведем нужные для дальнейшего части этой работы, а также некоторые полезные теоретические сведения по этому вопросу.

Мы сначала сформулируем результаты в общем виде, а затем (в гл. 9) опишем, как эту процедуру можно эффективно применить для уравнений Навье — Стокса. Одновременно мы установим основные результаты, касающиеся существования, единственности и гладкости для уравнений Навье — Стокса, используя метод Като — Фуджиты [1] и результаты Дорро и Марсдена [1] (гл. 8А).

Следует отметить, что и для уравнений с частными производными, отличных от уравнений Навье — Стокса, бифуркационные задачи встречаются весьма часто; например, при изучении химических реакций (см. Коппель и Ховард [1, 2, 5]) и в динамике популяций (см. гл. 10). Задачи из других областей, таких, как теория электрических цепей и теория упругости, вероятно, того же типа (см. Стерн [1], Зиглер [1] и Кнопс и Уилкс [1]). Похоже, что настоящая сила методов теории бифуркаций только начинает реализовываться в приложениях.

Общая схема и основные предположения

Будем рассматривать систему эволюционных уравнений общего вида

$$\frac{dx}{dt} = X_\mu(x), \quad x(0) \text{ задано,}$$

где X_μ — зависящий от параметра μ плотно определенный нелинейный оператор¹⁾ на подходящем функциональном пространстве E (банаховом пространстве). Например, X_μ может быть оператором Навье — Стокса, а μ — числом Рейнольдса (см. гл. 1). Предполагается, что эта система определяет единственное локальное решение $x(t)$ и, следовательно, полупоток F_t , который при фиксированном μ и $t \geq 0$ отображает $x(0)$ в $x(t)$.

¹⁾ То есть оператор, определенный на всюду плотном подмножестве соответствующего функционального пространства. — *Прим. перев.*

Самым существенным, что необходимо знать относительно потока F_t нашей системы, является тот факт, что при любых фиксированных t и μ поток F_t будет C^∞ -отображением банахова пространства E (F_t , вообще говоря, определен только локально по t). Отметим (см. конец гл. 8А) те свойства, которыми в большинстве случаев обладает F_t и которые поэтому будем считать выполненными:

(а) F_t определен на открытом подмножестве из

$$R^+ \times E, \quad R^+ = \{t \in R \mid t \geq 0\};$$

(б) $F_{t+s} = F_t \circ F_s$ (там, где это определено);

(в) $F_t(x)$ по отдельности (а следовательно, и совместно (гл. 8А)) непрерывен по $(t, x) \in R^+ \times E$.

Сделаем два важных предположения относительно потока. Первое из них таково.

(8.1) Условие гладкости. Будем считать, что для каждого фиксированного t отображение F_t является C^∞ -отображением (открытого подмножества) E в E .

Это как раз то, что мы будем понимать под гладкой полугруппой. Конечно, мы не требуем гладкости по t , так как, вообще говоря, образующая X_μ для F_t будет только плотно определенным, а не гладким отображением E в E . Однако, как разъясняется в главе 8А, не совсем глупо ожидать гладкости по μ и t при $t > 0$ (что является нелинейным аналогом «аналитических полугрупп» и имеет место для уравнений «параболического типа»). Это нам потребуется ниже.

В гл. 9 мы опишем вкратце, как можно проверить это предположение для уравнений Навье — Стокса, используя общий критерий, применимый к широкому классу систем (для систем, подобных нелинейным волновым уравнениям, это хорошо известно из работ Сегала [1] и других).

Приводим второе наше предположение.

(8.2) Условие продолжаемости решений. Пусть $F_t(x)$ для фиксированного x лежит в ограниченном множестве пространства E при всех t , для которых $F_t(x)$ определено. Тогда $F_t(x)$ определено при всех $t \geq 0$.

Это просто означает, что наша теорема существования для F_t достаточно сильна, чтобы гарантировать следующее: орбита может быть не определена только тогда, когда она за конечное время уходит на бесконечность. Такое предположение в большинстве случаев выполняется (в частности, для уравнений Навье — Стокса).

Предположим, что F_t имеет неподвижную точку, которой можно считать точку $O \in E$, т. е. $F_t(0) = 0$ при всех $t \geq 0$. Обозначим через DF_t производную Фреше отображения F_t при фиксированном t ; тогда ясно, что $G_t = DF_t(0)$ является линейной полугруппой на E . Ее производящий оператор, который формально равен $DX(0)$, является поэтому плотно определенным замкнутым линейным оператором, который определяет линеаризованное уравнение¹⁾. Нижеследующее предположение касается спектра линейной полугруппы G_t , который при соответствующих условиях (Хилле и Филлипс [1]) является экспоненциалом спектра $DX(0)$ (сравните с гл. 2А).

Переходим к третьему предположению.

(8.3) **Спектральное условие.** Предположим, что мы имеем семейство F_t^μ гладких нелинейных полугрупп, определенных для значений μ из некоторого интервала, содержащего $0 \in \mathbb{R}$. Допустим, что $F_t^\mu(x)$ является гладким по t , x , μ отображением при $t > 0$. Предположим также, что

(а) O — неподвижная точка F_t^μ ;
 (б) при $\mu < 0$ спектр G_t^μ содержится во множестве $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, где $G_t^\mu = D_x F_t^\mu(x)|_{x=0}$;

(в) при $\mu = 0$ (соответственно $\mu > 0$) спектр G_t^μ имеет два изолированных простых собственных значения $\lambda(\mu)$ и $\bar{\lambda}(\mu)$ с $|\lambda(\mu)| = 1$ (соответственно $|\lambda(\mu)| > 1$), а остальная часть спектра лежит в D и остается отделенной от единичной окружности;

(г) $\left(\frac{d}{d\mu} |\lambda(\mu)|\right)\Big|_{\mu=0} > 0$ (собственные значения движутся монотонно, пересекая единичную окружность).

При этих условиях имеет место рождение периодических орбит. Они будут устойчивы при следующем условии.

(8.4) **Условие устойчивости.** Выполняется неравенство $V'''(0) < 0$, где $V'''(0)$ вычисляется в соответствии с процедурой гл. 4 (см. гл. 4А).

Эта процедура может быть применена прямо к векторному полю X , поскольку вычисления конечномерны; неограниченность образующей X не вносит дополнительных трудностей.

¹⁾ Даже если подгруппа, негладкая, можно придать смысл линеаризации уравнений и потока. Например, поток уравнений Эйлера класса C^1 как отображение H^s в H^{s-1} , но производная продолжается до ограниченного оператора на H^{s-1} ; см. Дорро и Марсен [1].

Рождение периодических орбит

Сформулируем основной результат.

(8.5) **Теорема.** При указанных выше предположениях в пространстве E существует окрестность U точки O и число $\varepsilon > 0$, такие, что $F_t^\mu(x)$ определено при всех $t \geq 0$ для $\mu \in (-\varepsilon, \varepsilon]$ и $x \in U$. Для каждого $\mu > 0$ поток F_t^μ имеет единственную устойчивую замкнутую орбиту. Эти орбиты при изменении μ образуют однопараметрическое непрерывно зависящее от μ семейство. Решения, близкие к ним, определены для всех $t \geq 0$. Существует окрестность начала координат, в которой любая замкнутая орбита потока совпадает с одной из орбит семейства.

Особо отметим, что вблизи периодических орбит решения определены для всех $t \geq 0$. Это важный критерий глобального существования решений (см. также Сэттинджер [1, 2]).

Конечно, можно обобщить этот результат: например, рассмотреть случай, когда система зависит от нескольких параметров и несколько собственных значений пересекают окружность, или случай системы с симметрией, рассмотренный ранее (гл. 7). Таким же образом можно доказать рождение инвариантного тора из периодической орбиты.

Доказательство теоремы (набросок). Как показано в гл. 2, теорему о центральном многообразии можно применять к потокам. Таким образом, для гладкого потока $F_t(x, \mu) = (F_t^\mu(x), \mu)$ мы можем получить существование локально инвариантного центрального многообразия S ; это трехмерное многообразие, касающееся оси μ и двумерного собственного направления оператора $G_t^0(0)$. (Инвариантное многообразие устойчиво и содержит всю локальную рекуррентность, но F_t пока еще только локальный поток на этом многообразии.)

Оказывается, существует замечательное свойство гладких полупотоков, которое доказано в гл. 8А (отсылаем к Бохнеру и Монтгомери [1], см. Чернов и Марсден [2]): оно состоит в том, что полупоток F_t на конечномерном многообразии S порождается C^∞ -векторным полем, т. е. исходное поле X , ограниченное на S , является C^∞ -векторным полем (определенным во всех точках). После этого все немедленно сводится к теореме Хопфа в размерности 2, и за доказательством можно отослать к гл. 3. ■

Рождение инвариантного тора

Здесь все может быть проделано точно так же, как в гл. 6. Однако, как объяснено в гл. 2В, необходимо знать, что $F_t^\mu(x)$ гладко зависит от t, μ, x для $t > 0$. Тогда отображение Пуанкаре для замкнутой орбиты будет корректно определенным и гладким, и после сведения к конечной размерности с помощью теоремы о центральном многообразии, как в гл. 6, оно будет диффеоморфизмом в силу следствия 8А.9. Поэтому мы действительно можем воспользоваться теми же самыми бифуркационными теоремами, что и в гл. 6, для анализа рождения тора. Для проверки предположений гладкости можно использовать результаты гл. 8А и 9.

Глава 8А

ЗАМЕТКИ ПО НЕЛИНЕЙНЫМ ПОЛУГРУППАМ

В этой главе приведены некоторые технические результаты, полезные для доказательства бифуркационных теорем. Мы начнем с общих свойств потоков и полупотоков ($\equiv$ нелинейных групп и нелинейных полугрупп), следуя работам Чернова и Марсдена [1, 2]. Сюда включены различные важные свойства непрерывности и гладкости. Затем, следуя Дорро и Марсдену [1], мы сформулируем основной критерий, позволяющий узнать, когда полупоток состоит из гладких отображений.

Потоки и полупотоки

(8А.1) **Определения.** Пусть имеется множество D . Поток на D — это семейство отображений $F_t: D \rightarrow D$, определенных при всех $t \in \mathbb{R}$ и таких, что:

(1) F_0 — тождественное отображение;

(2) $F_{t+s} = F_t \circ F_s$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$.

Отметим, что при фиксированном t отображение F_t взаимно однозначно и отображает на все D , так как $F_{-t} \circ F_t = \text{id}$ и $F_t \circ F_{-t} = \text{id}$, т. е. $F_t^{-1} = F_{-t}$.

Полупоток на D — это семейство отображений $F_t: D \rightarrow D$, определенных при $t \geq 0$ и также удовлетворяющих условиям (1) и (2) для $t, s \geq 0$.

Предостережение: полупоток не обязательно состоит из биекций ¹⁾.

(8А.2) **Определение.** Пусть N — топологическое пространство и $D \subset N$.

Локальный поток на D — это отображение $F: \mathcal{D} \rightarrow D$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times D$, где $\mathcal{D}$ открыто в топологии произведения и такое, что для $x \in D$ точка $(0, x) \in \mathcal{D}$, а если $\mathcal{D}_t = \{x \in D \mid (t, x) \in \mathcal{D}\}$, так что можно определить $F_t: \mathcal{D}_t \rightarrow D$, то F_t удовлет-

¹⁾ Биекция — взаимно-однозначное отображение множества D на множество D . — Прим. перев.

воряет условиям (1) и (2) для тех значений t , где оно определено. Поток *максимальный*, если из $(t, x) \in \mathcal{D}$, $(s, F_t(x)) \in \mathcal{D}$ следует $(s + t, x) \in \mathcal{D}$. Аналогично определяется *локальный полупоток* и *максимальный полупоток*.

Пусть теперь N — банахово многообразие. Векторное поле с областью определения D — это отображение $X: D \rightarrow T(N)$, такое, что $X(x) \in T_x(N)$ при всех $x \in D$. ($T_x(N)$ — касательное пространство к N в точке $x \in D \subset N$.) Интегральная кривая поля X — это кривая $c: (a, b) \rightarrow D$, $(a, b) \subset \subset \mathbb{R}$, причем c дифференцируемо как отображение из (a, b) в N и $c'(t) = X(c(t))$. Поток (соответственно полупоток, локальный поток) поля X — это поток (соответственно полупоток, локальный поток) на D , такой, что для всех $x \in D$ отображение $t \mapsto F_t(x)$ есть интегральная кривая поля X .

Если F_t — поток на N , для которого отображение $F: \mathbb{R} \times \times N \rightarrow N$, задаваемое как $(t, x) \mapsto F_t(x)$, класса C^0 , то мы будем говорить, что F есть C^0 -поток на N .

Если F_t — поток поля X и F_t продолжается до непрерывного отображения $F_t: N \rightarrow N^1$, а продолжение является C^0 -поток на N , то мы будем говорить, что F_t есть C^0 -поток поля X .

Если F_t является C^0 -поток на N и при каждом фиксированном t отображение $F_t: N \rightarrow N$ класса C^k (соответственно T^k), то скажем, что F_t — поток класса C^k (соответственно T^k).

Здесь принадлежность $F_t: N \rightarrow N$ классу T^k означает, что j -е касательное отображение $T^j F_t: T^j(N) \rightarrow T^j(N)$ существует и непрерывно для $j \leq k$; принадлежность $F_t: N \rightarrow N$ классу C^k означает, что в каждой карте отображение $x \rightarrow d_x^j F$, $j \leq k$ непрерывно в топологии, порожденной нормой ($d_x^j F$ есть j -я полная производная F в точке x . Это j -линейное отображение на пространстве, являющемся моделью²⁾ для N .) Случай T^k отличается от C^k -случая тем, что непрерывность по норме заменяется сильной непрерывностью.

Предостережение. Здесь не предполагается, что C^k -поток будет класса C^k по переменной t , а только по переменной x . Поток будет класса C^k по переменной t , только если он порожден гладким всюду определенным векторным полем (см., однако, теорему Бохнера-Монтгомери, приведенную ниже).

¹⁾ Конечно, при каждом $t \in \mathbb{R}$. — Прим. перев.

²⁾ Для связного банахова многообразия это пространство, изоморфное касательному пространству в некоторой (а следовательно, и в любой) точке (см. Ленг [1]). — Прим. перев.

Раздельная и совместная непрерывность

(8А.3) **Теорема** (Чернов и Марсден [2]). Пусть N — банахово многообразие, F_t — поток (или локальный поток) на N , и пусть F по отдельности непрерывно по x и t (т. е. $t \mapsto F_t(x)$ непрерывно при фиксированном x и $x \mapsto F_t(x)$ непрерывно при фиксированном t). Тогда F_t является C^0 -поток, т. е. F_t совместно непрерывно.

Для доказательства воспользуемся следующей леммой.

(8А.4) **Лемма.** (Бурбаки [1], гл. IX, § 5, упр. 23б, стр. 125, Шоке [1], т. 1, стр. 127.) Пусть E — пространство Бэра, а F, G — метрические пространства. Допустим, что отображение $\varphi: E \times F \rightarrow G$ раздельно непрерывно. Тогда для любого $f \in F$ существует плотное множество $S_f \subseteq E$, такое, что дополнение к нему является множеством первой категории и такое, что если $e \in S_f$, то φ непрерывно в точке (e, f) .

Доказательство теоремы (8А.3). Так как это локальная теорема, мы можем работать в одной карте. Поэтому мы предположим, что N — банахово пространство и F_t — локальный поток на N . Положим $E = \mathbb{R}$, $F = G = N$. Пусть $x \in U \subset N$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Существует плотное множество $t_x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, такое, что F непрерывно в точке (t_x, x) . Так как область определения F предполагается открытой в $\mathbb{R} \times N$, мы можем выбрать t_x столь близким к t , чтобы были определены все нужные композиции. Пусть $t_n \rightarrow t$, $x_n \rightarrow x$; запишем $F_{t_n}(x_n) = F_{t-t_x} \circ F_{t_x+t_n-t}(x_n)$. Так как $t_x + t_n - t \rightarrow t_x$, а F непрерывно в точках (t_x, x) , то $F_{t_x+t_n-t}(x_n) = y_n \rightarrow F_{t_x}(x)$. При фиксированном t отображение $x \mapsto F_t(x)$ непрерывно, поэтому получаем, что $F_{t_n}(x_n) = F_{t-t_x}(y_n) \rightarrow F_{t-t_x}(F_{t_x}(x)) = F_t(x)$. ■

(8А.5) **Замечания.** 1) Пусть G — топологическая группа, которая также является пространством Бэра. Пусть $\Phi: G \times X \times N \rightarrow N$ — раздельно непрерывное действие группы G на метрическом пространстве N . Тогда вышеприведенные рассуждения показывают, что Φ совместно непрерывно.

2) Допустим, что $D \subseteq N$ и плотно в N , а F_t — поток на D , который продолжается по непрерывности до потока на N , так что отображение $t \mapsto F_t(x)$ непрерывно при каждом $x \in D$. Тогда то же самое верно для каждого $x \in N$, и продолженный поток — класса C^0 . Действительно, пусть $x_n \rightarrow x$, где $x_n \in D$, а $x \in N$. Тогда при фиксированном t $F_t(x_n) \rightarrow F_t(x)$, поэтому отображение $t \mapsto F_t(x)$ является поточечным пределом непрерывных функций. Следовательно, для каждого $x \in$

$\in N$ существует множество второй категории $S_x \subseteq \mathbb{R}$, такое, что если $t \in S_x$, то отображение $t \mapsto F_t(x)$ непрерывно. Рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 8А.3, показывают, что $S_x = \mathbb{R}$ при всех $x \in N$.

3) Многие из этих результатов можно обобщить на случай, когда N не является локально метризуемым; например, многообразие, моделированное топологическим векторным пространством (пример: многообразие, моделированное банаховым пространством со слабой топологией — «слабое многообразие»). См. Болл [1].

4) Те же рассуждения работают и для полупотоков, по крайней мере для $t > 0$. Если N локально компактно, то совместная непрерывность также имеется при $t = 0$ (Дорро [1]; можно, однако, дать и непосредственное доказательство). В общем случае, однако, совместная непрерывность может нарушаться при $t = 0$, поэтому ее необходимо постулировать.

Используя эти методы, мы можем получить интересный результат по t -непрерывности производной дифференцируемого потока.

(8А.6) **Теорема.** Пусть N — банахово многообразие и F_t — поток (или локальный поток или полупоток) на N класса C^0 . Пусть F_t также класса T^k для $k \geq 1$. Тогда для каждого $j \leq k$ $T^j F_t: T^j(N) \rightarrow T^j(N)$ совместно непрерывно при $t \in \mathbb{R}$ и $x \in T^j(N)$ (для полупотоков — только при $t > 0$).

Доказательство. Используя индукцию и теорему 8А.3, мы немедленно сводим задачу к случаю $k = 1$. Также можно считать, что мы работаем в одной карте. Поэтому $TF_t(x, v) = (F_t(x), D_x F_t(x) \cdot v)$. По предположению это отображение непрерывно по x , поэтому нам необходимо только показать его непрерывность по t . Ясно, однако, что

$$D_x F_t(x) \cdot v = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(F_t \left(x + \frac{v}{n} \right) - F_t(x) \right).$$

Таким образом, отображение $t \mapsto D_x F_t(x) \cdot v$ является поточечным пределом непрерывных отображений и поэтому имеет плотное множество точек t -непрерывности. Остальная часть доказательства делается так же, как в замечании 2 п. 8А.5. ■

Обобщенная теорема Бохнера — Монтгомери

Для простоты нижеследующий результат мы приведем для случая плоских многообразий. Он, однако, верен для общих многообразий M , что можно увидеть, работая в локальной карте.

(8A.7) Теорема (Чернов и Марсден). Пусть F_t — совместно непрерывный поток на банаховом пространстве E . Допустим, что для каждого t F_t является C^k -отображением, $k \geq 1$. Предположим также, что для каждого $x \in E$ $\|DF_t(x) - I\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, где $\|\cdot\|$ — норма оператора. Тогда $F_t(x)$ класса C^k совместно по t и x . Более того, поле X , порождающее поток, является всюду определенным векторным полем на E класса C^{k-1} .

Доказательство. При сформулированных предположениях мы можем показать, что $DF_t(x)$ совместно непрерывно как отображение из $\mathbb{R} \times E$ в $\mathcal{L}(E, E)$; последнее означает множество всех линейных ограниченных отображений E в E с топологией, порожденной нормой. Если мы обозначим $DF_t(x)$ через $\varphi(t, x)$, то по правилу дифференцирования сложной функции получим соотношение

$$\varphi(s+t, x) = \varphi(s, F_t(x)) \cdot \varphi(t, x). \quad (8A.1)$$

По предположению φ непрерывна по каждому аргументу; тогда мы можем применить, как в теореме (8A.3), свойство Бэра, что вместе с тождеством (8A.1) приводит к совместной непрерывности.

Пусть теперь $\varphi(t)$ — C^∞ -функция на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Определим $J_\varphi: E \rightarrow E$ формулой

$$J_\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) F_t(x) dt. \quad (8A.2)$$

В силу совместной непрерывности мы можем продифференцировать под знаком интеграла в (8A.2) и, таким образом, получить

$$DJ_\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) DF_t(x) dt. \quad (8A.3)$$

Теперь, если φ близко к δ -функции, то величина $\|DJ_\varphi(x) - I\|$ мала; в частности, $DJ_\varphi(x)$ обратимо. Из теоремы об обратной функции следует, что J_φ — локальный C^k -диффеоморфизм. Кроме того,

$$J_\varphi(F_t(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) F_{s+t}(x) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s-t) F_s(x) ds.$$

Последнее выражение дифференцируемо по t и x . Так как J_φ — локальный C^k -диффеоморфизм, то $F_t(x)$ класса C^k совместно по обоим переменным для t , близких к 0. Но тогда

групповое свойство потока показывает, что это верно для всех t . ■

(8А.8) **Замечания.** 1) Полученный выше результат является нелинейным обобщением хорошо известного в линейной теории факта, состоящего в том, что *непрерывная по норме линейная полугруппа имеет ограниченный производящий оператор* (и, следовательно, определена для всех $t \in \mathbb{R}$, а не только для $t \geq 0$).

Те же самые рассуждения, что и выше, применимы к полупотокам и локальным потокам. Отсюда вытекает забавное следствие, что полупоток класса C^k , производная которого непрерывна по норме относительно t при $t = 0$, имеет интегральные кривые, которые можно локально равномерно продолжить назад по времени (так как соответствующее векторное поле класса C^{k-1}). Это очень важно в сочетании со следующим замечанием.

2) Если E конечномерно, то сходимость по норме $DF_t(x)$ к I следует автоматически из предположений гладкости. Действительно, из теоремы (8А.6) следует, что $DF_t(x) \rightarrow I$ в сильной операторной топологии, т. е. $DF_t(x)v \rightarrow v$ для любого v , но для конечномерного пространства это то же самое, что сходимость по норме.

В соответствии с этим, если M — конечномерное многообразие, то поток на M , который совместно непрерывен и класса C^k по пространственной переменной, совместно класса C^k . Последнее является классическим результатом Монгомери. Существует обобщение, принадлежащее Бохнеру и Монгомери [1], для действия конечномерных групп Ли. Это обобщение можно также получить методами, использованными при доказательстве теоремы (8А.7) (см. Чернов и Марсден [2]).

Теперь объединим замечания (8А.8) в виде полезного следствия.

(8А.9) **Следствие.** Пусть F_t — локальный C^k -полупоток на банаховом многообразии N . Предположим, что F_t оставляет инвариантным конечномерное подмногообразие $M \subset N$. Тогда на M полупоток F_t локально обратим, класса C^k совместно по t и x и порожден C^{k-1} -векторным полем на M .

Другой заслуживающий упоминания факт — это результат Дорро [1]. Именно, в условиях теоремы (8А.7) F_t в действительности локально сопряжено с потоком, имеющим образующую класса C^k (а не только C^{k-1}).

Липшиц-непрерывные потоки

(8А.10) **Определения.** Пусть F_t — поток (или полупоток) на метрическом пространстве N , например на банаховом многообразии. Мы скажем, что F_t *липшиц-непрерывен*, если для каждого t существует постоянная M_t , при которой

$$d(F_t x, F_t y) \leq M_t \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in N.$$

Наименьшая такая постоянная называется нормой Липшица, $\|F_t\|_{\text{Lip}}$.

Мы скажем, что F_t *локально липшиц-непрерывен*, если для каждого $x_0 \in N$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ существуют окрестность $\mathcal{U}$ точки x_0 и число $\varepsilon > 0$, такие, что $d(F_t x, F_t y) \leq M(t_0, x_0) d(x, y)$ для всех $x, y \in \mathcal{U}$ и $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Если за $\mathcal{U}$ можно взять любое ограниченное множество, мы скажем, что поток F_t *полунепрерывен по Липшицу* (этот термин введен Сегалом). Отметим, что C^1 -потоки локально липшиц-непрерывны.

Пусть F_t — непрерывный липшиц-непрерывный поток и пусть $M_t = \|F_t\|_{\text{Lip}}$. Тогда (как и в линейном случае) имеем оценку вида

$$M_t \leq M e^{\beta |t|}, \quad (8А.4)$$

где M, β — постоянные. Действительно, заметим, что M_t *полумультимпликативна*: $M_{s+t} \leq M_s \cdot M_t$; это немедленно следует из группового свойства потока. Более того, мы знаем, что

$$M_t = \sup_{x \neq y} d(F_t x, F_t y) / d(x, y).$$

Таким образом, M_t полунепрерывна снизу, будучи точной верхней гранью семейства непрерывных функций. В частности, M_t *измерима*. Но тогда рассуждения Хилле и Филлипса ([1], теорема 7.6.5) показывают, что (8А.4) выполнено для некоторых постоянных M, β .

Единственность интегральных кривых

Известно, что интегральные кривые липшиц-непрерывного векторного поля однозначно определяются своими начальными условиями, но это неверно для некоторых непрерывных векторных полей¹⁾. С другой стороны, известно, что интег-

¹⁾ Известный пример на прямой — это $X(x) = x^{2/3}$. В пространстве Фреше непрерывное линейное векторное поле $S: X \rightarrow X$ может иметь бесконечно много интегральных кривых с данными начальными условиями, например: $S(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$ на пространстве E действительных последовательностей с топологией поточечной сходимости или может во-

ральные кривые уравнений, порождающих линейные полугруппы, единственны. Следующий результат показывает, что эта единственность есть следствие локальной липшиц-непрерывности потока (см. теорему ван Кампена, Хартман [1], стр. 50).

(8А.11) **Теорема.** Пусть X — векторное поле на банаховом многообразии M с областью определения D . Допустим, что X порождает локально липшиц-непрерывный поток F_t . Более точно, предположим, что:

(а) F_t — группа взаимно-однозначных отображений D , для каждого $x \in D$ отображение $t \mapsto F_t(x)$ дифференцируемо в M и

$$\frac{d}{dt} F_t(x) = X(F_t(x));$$

(б) для каждой $x_0 \in M$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ существуют окрестность $\mathcal{U} \subset M$ точки x_0 и $\varepsilon > 0$, такие, что в локальных картах

$$d(F_t x, F_t y) \leq C d(x, y)$$

для $x, y \in \mathcal{U}$ и $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. Здесь предполагается, что постоянная C не зависит от x, y и t (другими словами, локальная константа Липшица предполагается локально ограниченной по t . Например, это выполняется для глобально липшиц-непрерывного потока).

Заключение: если $c(t)$ — кривая в D , такая, что $c'(t) = X(c(t))$, то $c(t) \equiv F_t(c(0))$.

Доказательство. Мы можем работать в локальной карте (см. (8А.13)), поэтому будем считать M банаховым пространством E . Для данного t_0 пусть $x_0 = c(t_0)$. Выберем тогда $\varepsilon > 0$ и окрестность $\mathcal{U}$ точки x_0 из условия (б); в дополнение к этому ε должно быть столь мало, чтобы $c(t) \in \mathcal{U}$ при $|t - t_0| \leq \varepsilon$.

Определим $h(t) = F_{t_0-t}c(t)$. Тогда для t , близких к t_0 , и малых τ

$$\begin{aligned} \|h(t+\tau) - h(t)\| &= \|F_{t_0-t-\tau}c(t+\tau) - F_{t_0-t}c(t)\| = \\ &= \|F_{t_0-t-\tau}c(t+\tau) - F_{t_0-t-\tau}F_\tau c(t)\| \leq C \|c(t+\tau) - F_\tau c(t)\|. \end{aligned}$$

Кроме того, $[c(t+\tau) - F_\tau c(t)]/\tau = [c(t+\tau) - c(t)]/\tau + [c(t) - F_\tau c(t)]/\tau \rightarrow X(c(t)) - X(c(t)) = 0$ при $\tau \rightarrow 0$. Та-

обще не иметь интегральных кривых с данными начальными условиями: $S(t) = df/dx$ на $E = C^\infty$ -функции на $[0, 1]$, равные нулю вместе со всеми производными в точках 0 и 1. Результат (8А.11) существенно обобщается в работе Дорро и Марсдена [1].

ким образом, h дифференцируема и $h'(t) \equiv 0$. Отсюда следует, что $h(t)$ константа, т. е. $c(t) = F_{t-t_0} c(t_0)$ для t , близких к t_0 . Отсюда легко следует соотношение $c(t) = F_t c(0)$. ■

(8A.12) Следствие. Заключение теоремы (8A.11) применимо к C^1 -потокам F_t .

Доказательство. Проверим условие (б) предположения теоремы. Для локальной карты из наших результатов о совместной непрерывности (см. (8A.6)) следует, что $DF_t(x)y$ непрерывно совместно по t , x и y . Следовательно, по теореме Банаха — Штейнхауса для данных x_0 и t_0 существуют выпуклая окрестность $\mathcal{U}$ точки x_0 и $\varepsilon > 0$, такие, что $\|DF_t(x)\| \leq C$, если $x \in \mathcal{U}$ и $|t - t_0| \leq \varepsilon$. Тогда по теореме о среднем значении получаем, что $\|F_t(x) - F_t(y)\| \leq C\|x - y\|$, если $x, y \in \mathcal{U}$ и $|t - t_0| \leq \varepsilon$. ■

Эти результаты обобщают классические теоремы Кнезера и ван Кампена. Они легко обобщаются на полупотоки.

Замечание. Существует хорошо известный пример непрерывного векторного поля с совместно непрерывным потоком, для которого заключение теоремы (8A.11) не выполняется. Пусть поле X на $\mathbb{R}$ задано выражением

$$X(x) = \frac{3}{2} |x|^{1/2}.$$

Определим $\varphi(y) = |y|^{3/2} \cdot \operatorname{sgn} y$. Тогда φ дифференцируема и $\varphi'(y) = \frac{3}{2} |y|^{1/2}$. Легко проверить, что $F_t(x) = \varphi(t + \varphi^{-1}(x))$ является потоком для X . В частности, $F_t(0) = |t|^{3/2} \operatorname{sgn} t$. Но $c(t) \equiv 0$ — другая интегральная кривая, для которой $c(0) = 0$. Другие примеры см. у Хартмана [1].

(8A.13) Замечания. 1) В случае, когда требуется работать на всем M , а не в отдельных картах, можно использовать специального типа метрику.

Определение. Пусть N — банахово многообразие, моделью которого служит банахово пространство E . Пусть d — метрика на N . Скажем, что d совместима со структурой N , если d задает топологию N и если для любого $x_0 \in N$ существует карта $(\mathcal{U}, \varphi)$, содержащая x_0 и постоянные $\alpha(x_0)$, $\beta(x_0)$, такие, что для всех $x, y \in \mathcal{U}$ $d(x, y) \leq \alpha \|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \beta d(x, y)$.

2) Обычно для доказательства единственности интегральных кривых, например, в $\mathbb{R}^n$, пользуются не этим методом. Обычно предполагают, что векторное поле локально липшиц-

непрерывно, и тогда для доказательства единственности интегрируют его. Напомним, как это делается. Пусть X — локально липшиц-непрерывное векторное поле в $\mathbb{R}^n$ (или любом банаховом пространстве). Пусть $d(t)$ и $c(t)$ — две любые интегральные кривые поля X и $d(0) = c(0)$. Тогда

$$|d(t) - c(t)| = \left| \int_0^t (X(d(s)) - X(c(s))) ds \right| \leq K \int_0^t |d(s) - c(s)| ds.$$

Затем применяют тот факт (называемый *неравенством Гро-нуолла*), что если α удовлетворяет неравенству $\alpha(t) \leq$

$$\leq \int_0^t K \alpha(s) ds, \quad \text{то } \alpha(t) \leq \alpha(0) e^{Kt}. \text{ Поэтому получаем } d(t) \equiv$$

$\equiv c(t)$. Для уравнений с частными производными, однако, важно иметь результат, установленный в (8А.11), так как часто бывает возможно найти константу Липшица для построенного потока, но редко — для порождающего векторного поля.

3) Другой метод, иногда используемый для доказательства единственности интегральных кривых векторного поля X с областью определения $D \subseteq N$, называется *энергетическим методом*. Допустим, что существует гладкая функция $H: D \times D \rightarrow \mathbb{R}^+$, для которой $H(x, y) = 0$, тогда и только тогда, когда $x = y$, и для любых двух интегральных кривых c и d поля X

$$\frac{dH(c(t), d(t))}{dt} \leq K(t, d(0), c(0)) H(c(t), d(t)),$$

где K локально ограничена по t . Тогда, как в замечании 2, мы можем заключить, что X имеет единственную интегральную кривую. Этот метод прямо применим, например, к классическим решениям уравнений Эйлера и Навье — Стокса.

Измеримые потоки

При довольно общих условиях непрерывность потока по временной переменной может быть выведена из измеримости. Например, имеется следующий результат (см. также Болл [2]).

(8А.14) **Теорема.** Пусть M — сепарабельное метрическое пространство и F_t — поток (или локальный полупоток) непрерывных отображений на M . Предположим, что для каждого $x \in M$ отображение $t \mapsto F_t(x)$ измеримо по Борелю, т. е. прообраз любого открытого множества есть борелевское под-

множество $\mathbb{R}$. Тогда F_t совместно непрерывен (соответственно совместно непрерывен для $t > 0$).

Доказательство. Так как M сепарабельно, то борелевская функция $t \mapsto F_t(x)$ непрерывна при ограничении ее на дополнение некоторого множества первой категории $C \subset \mathbb{R}$ (см. Бурбаки [1]). Задавая t_0 и последовательность $t_n \rightarrow t_0$, заметим, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} [C - (t_0 - t_n)] = D$ — это множество первой категории; следовательно, существует $s \in \mathbb{R}$, $s \notin D$, что $t_n - t_0 + s \notin C$ для всех n . Поэтому $F_{t_n - t_0 + s}(x) \rightarrow F_s(x)$, когда $n \rightarrow \infty$. Применяя теперь непрерывное отображение $F_{s - t_0}$, получим, что $F_{t_n}(x) \rightarrow F_{t_0}(x)$. Следовательно, $F_t(x)$ раздельно непрерывна, и заключение теоремы вытекает из теоремы 1. ■

Теоремы этого типа хорошо известны для линейных полугрупп (примеры приведены у Йосиды [1]).

Некоторые результаты для линейных неавтономных эволюционных уравнений

Для того чтобы получить критерий гладкости, нам необходимо использовать некоторые результаты о линейных эволюционных уравнениях. Эти результаты взяты из работ Като [1, 4, 5,]. Мы начнем с определения эволюционной системы. (Излагаемое ниже является сокращенным вариантом работы Дорро и Марсдена [1].)

(8А.15) **Определение.** Пусть X — банахово пространство и $T > 0$. Подмножество $\{U(t, s) \mid 0 \leq s \leq t < T\}$ пространства $B(X) = B(X, X)$ (ограниченных операторов на X) называется *эволюционной системой в X* , если

- (1) $U(t, t) = I$ для $0 \leq t < T$ и
- (2) $U(t, s)U(s, r) = U(t, r)$ для $0 \leq r \leq s \leq t < T$.

Эволюционная система $\{U(t, s) \mid 0 \leq s \leq t < T\}$ в X называется *сильно непрерывной*, если для каждого $f \in X$ функция $U(\cdot, \cdot)f$ непрерывно отображает $[0, T) \times [0, T)$ в X . X -инфинитезимальное производящее семейство для $\{U(t, s)\}$ — это семейство $\{A(s) \mid 0 \leq s < T\}$ операторов в X , определенных следующим образом:

$$A(s)f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} [U(s + \varepsilon, s)f - f],$$

где $D(A(s))$ состоит из всех f , для которых этот предел существует; предел берется в топологии X .

(8А.16) **Замечания.** (а) Если $\{U(t, s)\}$ — сильно непрерывная эволюционная система в X , то, как следует из принципа равномерной ограниченности, $\|U(t, s)\|_{B(X, X)}$ ограничена при s и t , изменяющихся в ограниченных замкнутых интервалах.

(б) Пусть $\{U(t, s) | 0 \leq s \leq t < T\}$ — сильно непрерывная эволюционная система в X с X -инфинитезимальным производящим семейством $\{A(s) | 0 \leq s < T\}$, и пусть $0 < a < T$. Тогда $\{A(s + a) | 0 \leq s < T - a\}$ является X -инфинитезимальным производящим семейством сильно непрерывной эволюционной системы $\{U(t + a, s + a) | 0 \leq s \leq t < T - a\}$.

(8А.17) **Утверждение.** Пусть $\{U(t, s) | 0 \leq s \leq t < T\}$ — сильно непрерывная эволюционная система в X с X -инфинитезимальным производящим семейством $\{A(s) | 0 \leq s < T\}$. Если $f \in D(A(s))$ для всех s , $0 \leq s < T$ и $A(\cdot)f$ непрерывно отображает $[0, T)$ в X , то

$$\frac{\partial}{\partial s} [U(t, s)f] = -U(t, s)A(s)f \quad (8А.5)$$

для $0 \leq s \leq t < T$, $t > 0$.

Доказательство. Если $0 \leq s < t < T$, то

$$U(t, s + \varepsilon)f - U(t, s)f = U(t, s + \varepsilon)[f - U(s + \varepsilon, s)f],$$

и поэтому

$$\frac{\partial^+}{\partial s} [U(t, s)f] = -U(t, s)A(s)f.$$

Таким образом, для каждого $t \in (0, T)$ функция $U(t, \cdot)f$ имеет непрерывную правую производную на $[0, T)$. Поэтому функция $U(t, \cdot)f$ непрерывно дифференцируема на $[0, T)$ (см. Иосида [1], стр. 239) и соотношение (8А.5) выполняется для $0 \leq s < t < T$. Так как производная $U(t, \cdot)f$ имеет предел слева в точке t , то

$$\frac{\partial^-}{\partial s} [U(t, s)f] = -U(t, s)A(s)f$$

для $0 < s = t < T$. Но это как раз равенство (8А.5) при $s = t$. ■

(8А.18) **Следствие.** Пусть $\{U(t, s) | 0 \leq s \leq t < T\}$ — сильно непрерывная эволюционная система в X с X -инфинитезимальным производящим семейством $\{A(s) | 0 \leq s < T\}$. Пусть

$f(s) \in D(A(s))$ для $0 \leq s < T$ и предположим, что f — непрерывно дифференцируемая функция, отображающая $[0, T)$ в X , и $A(\cdot)f(\cdot)$ отображает $[0, T)$ в X непрерывно. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial s} [U(t, s)f(s)] = U(t, s)f'(s) - U(t, s)A(s)f(s)$$

для $0 \leq s \leq t < T, t > 0$.

Доказательство. Оно вытекает из утверждения (8А.17), сильной непрерывности $\{U(t, s)\}$ и локальной ограниченности $\|U(t, s)\|_{B(X, X)}$. ■

Мы называем (8А.5) обратным дифференциальным уравнением. Для того чтобы прямое дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} [U(t, s)f] = A(t)U(t, s)f \quad (8А.6)$$

было справедливо, необходимо, чтобы $U(t, s)f \in D(A(t))$, а это более ограничительное условие, которое может и не выполняться, в то время как условия утверждения выполнены.

Предположим теперь, что Y — другое банахово пространство, которое плотно и непрерывно вложено в X .

(8А.19) **Определение.** Эволюционная система $\{U(t, s)\}$ в X называется Y -регулярной, если каждый оператор $U(t, s)$ непрерывно отображает Y в Y и $\{U(t, s)\}$ сильно непрерывна в Y , т. е. если $\{U(t, s)\}$ — сильно непрерывная эволюционная система как в X , так и в Y .

Като в [4] и [5] дает ряд условий на семейства операторов $\{A(s)\}$, действующих в X , достаточных для того, чтобы эти семейства были X -инфинитезимальными производящими семействами сильно непрерывной эволюционной системы в X . Некоторые из этих условий достаточны также и для того, чтобы эволюционная система была Y -регулярной, и для того, чтобы прямое дифференциальное уравнение выполнялось. Кроме того, он доказывает несколько теорем сходимости для эволюционных систем и дает для операторных норм верхние границы, выраженные через определенные параметры инфинитезимального семейства. Так как это непосредственно связано с нашими дальнейшими результатами, мы кратко перечислим здесь важнейшие моменты для удобства ссылок. Детали и дальнейшие замечания можно найти в работах Като.

(8А.20) **Определения.** Пусть $A \in G(X) = \{\text{множество производящих операторов для полугрупп в } X\}$. Y называется до-

пустимым относительно A или просто A -допустимым, если $\{e^{tA}\}$ оставляет Y инвариантным и образует полугруппу класса C_0 в Y .

Подмножество из $G(X)$ называется *устойчивым*, если существуют постоянные M и β (называемые *постоянными устойчивости*), такие, что для любых элементов $A_1, \dots, A_k$ этого подмножества и $\lambda > \beta$ выполнено неравенство

$$\left\| \prod_{j=1}^k (\lambda I - A_j)^{-1} \right\| \leq M (\lambda - \beta)^{-k}.$$

(8А.21) **Теорема существования.** Пусть $T > 0$, $A(t) \in G(X)$ для $0 \leq t < T$, и предположим, что

- (1) $\{A(t) | 0 \leq t < T\}$ устойчиво с постоянными M, β ;
- (2) для каждого t подпространство Y $A(t)$ -допустимо, и если обозначить ограничение $A(t)$ на Y , действующее в Y , через $A^*(t) \in G(Y)$, то $\{A^*(t)\}$ устойчиво с постоянными M^*, β^* .

(3) $Y \subset D(A(t))$ для каждого t и $A^-(\cdot)$ — непрерывное отображение $[0, T)$ в $B(Y, X)$, где $A^-(t)$ — ограничение $A(t)$ на Y (называемое частью $A(t)$, действующей из Y в X).

Тогда в X существует единственная сильно непрерывная эволюционная система $\{U(t, s)\}$ с X -инфинитезимальным производящим семейством, являющимся продолжением $\{A^-(t)\}$, т. е. с таким производящим семейством $\{B(t)\}$, что $B(t) \supset \supset A^-(t)$ для каждого t . Кроме того,

$$\|U(t, s)\|_{B(X, X)} \leq M e^{\beta(t-s)} \quad \text{для } 0 \leq s \leq t < T.$$

(8А.22) **Замечания.** (а) Если $A(t)$ не зависит от t , то условие устойчивости для A является условием теоремы Хилле — Йосиды (Йосида [1]).

(б) На самом деле в теореме (8А.21) Като показывает, что X -инфинитезимальное производящее семейство есть в точности $\{A(t)\}$.

Мы можем добавить любой ограниченный оператор к семейству производящих операторов $\{A(t)\}$ и все еще получить производящие операторы.

(8А.23) **Замечание.** Пусть $\{A(t) | 0 \leq t < T\}$ удовлетворяет условиям теоремы (8А.21), $B(t) \in B(X, X)$ для $0 \leq t < T$, и пусть функция $B(\cdot)f$ непрерывно отображает $[0, T)$ в X при каждом $f \in X$. Тогда в X существует единственная сильно непрерывная эволюционная система, для которой

X -инфинитезимальное производящее семейство является расширением $\{A(t) + B(t)\}$.

В примерах бывает трудно проверить выполнение условия устойчивости (1). Для этого у нас имеется полезный критерий, данный в следующем ниже утверждении. Сначала некоторые обозначения: пусть $G(X, M, \beta)$ обозначает производящие операторы A на X с постоянными M, β , т. е. при $\lambda > \beta$ $\|(\lambda I - A)^{-k}\| \leq M/(\lambda - \beta)^k$ (для полугруппы это соответствует условию $\|F_t\| \leq Me^{\beta t}$). В частности, если $M = 1$, то мы имеем производящий оператор *квазисжимающей полугруппы*, и соответствующее условие будет $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq 1/(\lambda - \beta)$, $\lambda > \beta$, или для потока $\|F_t\| \leq e^{\beta t}$. Примеры такого типа полугрупп общеизвестны.

(8A.24) **Замечание** (Троттер, Феллер). Для данной полугруппы F_t с производящим оператором $A \in G(X, M, \beta)$ пространство X можно перенормировать так, чтобы $\|F_t\| \leq e^{\beta t}$. Новая норма — это $|||x||| = \sup_{t \geq 0} \|e^{-\beta t} F_t(x)\|$.

Однако следует отметить, что не всегда возможно перенормировать X так, чтобы одновременно две полугруппы стали квазисжимающими.

(8A.25) **Теорема**. Пусть для каждого t $\|\cdot\|_t$ является новой нормой на X , эквивалентной исходной и гладко зависящей от t , т. е. удовлетворяющей условию

$$\|x\|_t / \|x\|_s \leq e^{c|t-s|}, \quad x \in X, \quad 0 \leq s, t \leq T.$$

Пусть $A(t)$ для каждого t определяет производящий оператор квазисжимающей полугруппы с постоянной β в норме $\|\cdot\|_t$. Тогда $\{A(t)\}$ устойчиво на X с $M \neq e^{2cT}$, $0 \leq t \leq T$ относительно любой из норм $\|\cdot\|_t$.

Доказательство фактически является простой проверкой; см. Като [3, предл. 3.4].

Существует другой полезный критерий проверки условий (8A.21).

(8A.26) **Теорема**. Пусть в (8A.21) выполнены условия 1) и 3), а условие 2) заменим на 2'') существует семейство $\{S(t)\}$ изоморфизмов Y на X , таких, что

$$S(t) A(t) S(t)^{-1} = A(t) + B(t)$$

$B(t) \in B(X)$, где $B: [0, T) \rightarrow B(X)$ сильно непрерывно. Предположим, что $S: [0, T) \rightarrow B(Y, X)$ сильно класса C^1 .

Тогда имеют место заключения теоремы (8А.21) $((2) \rightarrow \rightarrow (2''))$ и, более того, прямое дифференциальное уравнение удовлетворяется и эволюционная система Y -регулярна.

Приведем две важные аппроксимационные теоремы (см. Като [5]).

(8А.27) Теорема. Пусть $\{A_n(t)\}$ удовлетворяют условиям теоремы (8А.21), $n = 0, 1, 2, \dots$, причем константы устойчивости в (1), (2) не зависят от n . Предположим, что

$$\|A_0(t) - A_n(t)\|_{B(Y, X)} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

равномерно по t . Тогда $U_n(t, s) \rightarrow U_0(t, s)$ сильно в $B(X)$, равномерно по $t, s \in [0, T)$ и $\|U_n(t, s) - U_0(t, s)\|_{B(Y, X)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

(8А.28) Теорема. Пусть $\{A_n(t)\}$ удовлетворяют предположениям (8А.26), $n = 0, 1, 2, \dots$, в которых основные постоянные $M, \beta, \|S\|_{\infty, Y, X}, \|S^{-1}\|_{\infty, Y, X}, \|B\|_{\infty, X, X}, \|\dot{S}\|_{\infty, Y, X}$ могут быть выбраны независимо от n . Предположим, что $\|A_0(t) - A_n(t)\|_{B(Y, X)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по t , как в (8А.26), и в дополнение к этому, что $B_n(t) \rightarrow B_0(t)$ в $B(X)$, $S_n(t) \rightarrow S_0(t)$ в $B(Y, X)$, $S_n(t) \rightarrow S_0(t)$ в $B(Y, X)$ равномерно по t . Тогда

$$U_n(t, s) \rightarrow U_0(t, s)$$

сильно в $B(Y)$ равномерно по $t, s \in [0, T)$.

Критерий гладкости

Теперь мы получим один результат, используя который можно выяснить, когда полупоток состоит из гладких отображений. Этот результат особенно эффективен при использовании вместе с вышеприведенной линейной теорией. Настоящая теорема принадлежит Дорро и Марсдену [1], к книге которых мы отсылаем за дополнительными результатами. Сначала читателю рекомендуется попытаться решить упражнение 2.9, чтобы прочувствовать ситуацию.

Мы будем использовать следующие обозначения. Пусть X и Y — банаховы пространства, Y плотно и непрерывно вложено в X , подмножество D открыто в Y и F_t — непрерывный локальный полупоток на D . Предположим, что отображение $G: D \rightarrow X$ таково, что F_t — полупоток для G . Для точек

$p, q \in D$ и отрезка $\{p + r(q - p) \mid 0 \leq r \leq 1\} \subset D$ определим

$$Z(q, p) = \int_0^1 DG(p + r(q - p)) dr$$

— усреднение производной G вдоль отрезка.

Предположения: (а) $G: D \rightarrow X$ класса C^1 ;

(б) для фиксированного $f \in D$ и $g \in D$, достаточно близкого к f , существует сильно непрерывная эволюционная система $\{U^g(t, s) \mid 0 \leq s \leq t < T_g\}$ в X , у которой X -инфинитезимальное производящее семейство операторов является расширением $\{Z(F_s g, F_s f) \mid 0 \leq s < T_g\}$ (здесь T_g означает время существования для $F_s g$ и $F_s f$).

(в) $\|U^g(t, s) - U^f(t, s)\|_{B(Y, X)} \rightarrow 0$ при $\|g - f\|_Y \rightarrow 0$ (см. (8А.27)).

(8А.29) Теорема. При предположениях (а), (б), (в) $F_t: Y \rightarrow X$ дифференцируемо по Фреше в точке f и $DF_t(f) = U^f(t, 0)$.

(8А.30) Замечания. 1. Из доказательства также следует, что если $\|U^g(t, 0)\|_{B(X)}$ равномерно ограничены при изменении g , то F_t липшицево, как отображение $X \rightarrow X$, для g , достаточно близких к f в Y .

2. Соображения сдвига дают $DF_{t-s}(F_s(f)) = U^f(t, s)$.

Дальнейшие предположения:

(г) система $U^g(t, s)$ Y -регулярна;

заменим (в) на

(в') $U^g(t, s)$ сильно сходится в Y к $U^f(t, s)$, когда g стремится к f вдоль прямолинейного отрезка (см. теорему (8А.28)).

(8А.31) Теорема. При условиях (а), (б), (в'), (г) $F_t: Y \rightarrow Y$ дифференцируемо по Гато в точке f и

$$DF_t(f) = U^f(t, 0).$$

(8А.32) Замечания. 1. Из доказательства также следует, что если $\|U^g(t, 0)\|_{B(Y)}$ локально ограничены, то $F_t: Y \rightarrow Y$ локально липшиц-непрерывно.

2. Воспользовавшись теоремой (8А.26), мы видим, что фактически $DF_t(f)$ локально ограничено в $B(Y, Y)$ при $f \in Y$. Мы можем повторно воспользоваться (8А.31) и получить, что F_t дважды дифференцируемо по Гато и т. д. Отсюда следует, что на самом деле F_t класса C^∞ (дифференцируемость по Гато и непрерывность производной по норме означает принад-

лежность функции к классу C^1 в силу соотношения

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 Df(x + t(y - x))(y - x) dt;$$

дифференцируемость по Гато и локальная ограниченность производных означает липшиц-непрерывность).

3. Производная $DF_t(f)$ в (8А.29) продолжается до ограниченного оператора $X \rightarrow X$.

Доказательство (8А.29). Пусть $0 < T' T_f$. При достаточно малой $\|g - f\|_Y$ определим функцию w на $[0, T']$ по формуле $w(s) = F_s g - F_s f$. Дифференцируя и используя равенство $Z(q, p)(q - p) = G(q) - G(p)$, получаем

$$w'(s) = G(F_s g) - G(F_s f) = Z(F_s g, F_s f) w(s)$$

при $0 \leq s \leq T'$. Если $0 \leq s \leq t \leq T'$, то в силу следствия (8А.18)

$$\frac{\partial}{\partial s} U^g(t, s) w(s) = 0,$$

поэтому $F_t g - F_t f = U^g(t, 0)(g - f)$ при $0 \leq t \leq T'$. Тогда получаем оценки

$$\begin{aligned} \|F_t g - F_t f - U^f(t, 0)(g - f)\|_X \cdot \|g - f\|_Y^{-1} &\leq \\ &\leq \|U^g(t, 0) - U^f(t, 0)\|_{B(Y, X)}, \\ \|F_t g - F_t f\|_X &\leq \|U^g(t, 0)\|_{B(X)} \|g - f\|_X. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Доказательство (8А.31). Как и при доказательстве (8А.29), имеем

$$F_t g - F_t f = U^g(t, 0)(g - f),$$

поэтому

$$\|F_t g - F_t f\|_X \leq \|U^g(t, 0)\|_{B(X)} \cdot \|g - f\|_X$$

и

$$\|F_t g - F_t f\|_Y \leq \|U^g(t, 0)\|_{B(Y)} \cdot \|g - f\|_Y.$$

Отсюда следуют утверждения о липшиц-непрерывности. Если мы положим $g = f + \lambda h$, то получим

$$\lambda^{-1} [F_t(f + \lambda h) - F_t(f)] = U^{f+\lambda h}(t, 0) h,$$

откуда сразу следует утверждение о дифференцируемости. $\blacksquare$

Используя эти рассуждения, можно также установить Y -дифференцируемость F_t по t и дифференцируемость по

внешним параметрам. Рассмотрим два таких результата из работы Дорро и Марсдена [1].

(8A.33) **Следствие.** В условиях теорем (8A.29) или (8A.31) допустим, что эволюционная система $\{U^f(t, s)\}$ с семейством производящих операторов $\{DG(F_s)\}$ удовлетворяет условию $U^f(t, s)X \subset Y$ для $0 \leq s < t < T_f$. Тогда $G(F_t f) \in Y$ при $f \in D$ и $0 < t < T_f$. Если $U^f(\cdot, 0)g$ Y -непрерывна на $(0, T_f)$ для каждого $g \in X$, то $F(\cdot)f$ непрерывно Y -дифференцируема¹⁾ на интервале $(0, T_f)$.

Доказательство. При этих предположениях можно установить правило дифференцирования сложной функции, поэтому дифференцируя $F_{t+s}f = F_t(F_s(f))$ по s при $s = 0$, получим

$$G(F_t f) = DF_t(f) \cdot G(f) = U^f(t, 0) \cdot G(f) \in Y,$$

что доказывает первую часть заключения. Вторая часть следует из равенства

$$F_t f - F_s f = \int_s^t G(F_\tau f) d\tau = \int_s^t U^f(\tau, 0) \cdot G(f) d\tau. \quad \blacksquare$$

Условие Y -дифференцируемости $F_t f$ при $t > 0$ является нелинейным аналогом условия, используемого в теории линейных аналитических полугрупп (см. Иосида [1]).

Для рассмотрения зависимости от параметра мы предположим, что $G(f, z)$ и F_t^z зависят от параметра $z \in V \subset Z$, где V — открытое множество в банаховом пространстве. Вначале будем предполагать, что $F_t^z(f)$ непрерывна по всем переменным и для каждого z F_t^z обладает теми же свойствами, что и выше.

Чтобы доказать дифференцируемость $F_t^z(f)$ по (z, f) , мы можем использовать переход к надстройке. Именно, рассмотрим полупоток H_t на $D \times V$, определенный соотношением

$$H_t(f, z) = (F_t^z(f), z).$$

Производящим оператором является оператор $K: D \times V \rightarrow X \times Z$:

$$K(f, z) = (G(f, z), 0).$$

¹⁾ Здесь Y -непрерывность, Y -дифференцируемость означают соответствующее свойство функции со значениями в пространстве Y . — Прим. перев.

Если (8А.29) или (8А.30) можно применить к H_t , то можно получить дифференцируемость ¹⁾ $F_t^z(f)$ по (f, z) .

Одним из ключевых моментов в (8А.29) является предположение, касающееся линеаризованных уравнений. Здесь

$$DK(f, z)(g, w) = (D_1G(f, z) \cdot g + D_2G(f, z) \cdot w, 0);$$

поэтому в соответствии с (8А.29) или (8А.31) мы можем потребовать разрешимость системы

$$\frac{dw}{dt} = 0, \quad \text{т. е.} \quad w = \text{const},$$

$$\frac{dg}{dt} = D_1G(F_t^z(f), z) \cdot g(t) + D_2G(F_t^z(f), z) \cdot w$$

(аналогично для систем, включающих усредненный производящий оператор Z). Это линейная система по g с неоднородным членом $D_2G(F_t^z(f), z) \cdot w$. Решение эволюционной системы для $D_1G(F_t^z(f), z)$ может быть записано обычным образом с помощью формулы Дюамеля. Для систем такого типа существуют теоремы, из которых следует, что при этом получается эволюционная система, и которые позволяют изучить ее свойства. Отметим, например, теорему 7.2 в работе Като [4]. В этом случае можно проверить для H_t условия теорем (8А.29) или (8А.31). Мы смогли бы получить соответственно дифференцируемость отображения $F_t^{(\cdot)}(\cdot)$ из $D \times V$ в $X \times V$ и (при более сильных условиях 8А.31) из $D \times V$ и $Y \times V$. (Для голоморфных полугрупп гладкая зависимость от параметра может быть проанализирована непосредственно, как в книге Като [3].)

(8А.34) Замечания и приложения. В работе Аронсона и Теймза [1] изучается следующая система:

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} - q^2u &= u_t, & v_{xx} - q^2v &= v_t & \text{в } (0, 1) \times \mathbb{R}^+ \\ u_x(1, t) &= v_x(0, t) = 0 \\ u_x(0, t) &= -pq(f \circ v)(0, t) \\ v_x(1, t) &= pq\{1 - (f \circ u)(1, t)\} \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0.$$

Здесь p и q — положительные параметры, а $f(u) = u^2/(1 + u^2)$. Эта система описывает диффузию ферментов в биологических системах. В работе доказывается, что условия на собственные значения для применения теоремы Хопфа

¹⁾ Более непосредственный анализ, из которого получаются изящные результаты, дан Дорро и Марсденом [1].

выполнены. В работе Дорро и Марсдена [1] показано, используя методы, описанные выше, что полупоток этой системы гладкий. Отсюда следует, что все условия теоремы Хопфа выполняются, и, следовательно, доказано существование устойчивых периодических решений этой системы для значений параметров, больших критических.

Эти уравнения обычно называются уравнениями Гласса — Кауфмана, см. Гласс и Кауфман [1]. Работа по дискретным аналогам этих уравнений была недавно сделана Сю (Hsü).

БИФУРКАЦИИ В ГИДРОДИНАМИКЕ И ПРОБЛЕМА ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В этом разделе мы продемонстрируем, как, используя результаты гл. 8 и 8А, можно получать бифуркационные теоремы для уравнений Навье — Стокса. Другие (по нашему мнению, более сложные) методы описаны в гл. 9А, 9В, а также в работах Сэттинджера [5] и Джозера и Сэттинджера [1].

Новое доказательство бифуркационных теорем, использующее теорию центрального многообразия, как она изложена в гл. 8, позволяет очень просто, с минимумом технических трудностей, получать результаты для уравнений Навье — Стокса. Это относится ко всем типам бифуркаций, даже к бифуркации рождения инвариантного тора (см. гл. 6 или работу Йоста и Зендера [1]). Все что мы должны сделать — это проверить, что поток, полученный из уравнений Навье — Стокса, гладкий (в смысле гл. 8А); тогда остальное следует автоматически, так как теорема о центральном многообразии немедленно сводит все к конечномерному случаю (детали см. в гл. 8). Отметим, что уже в работе Рюэля и Такенса имеется простое доказательство теперь уже классических результатов Вельте [1] по стационарным бифуркациям от течения Куэтта к вихрям Тейлора в потоке между вращающимися цилиндрами. Первая часть этой главы посвящается доказательству гладкости полупотока уравнений Навье — Стокса. Для этого мы используем технику Дорро и Марсдена [1] (см. гл. 8А). Гладкость гарантирует нам, что все результаты, полученные в предыдущих разделах для конечномерного случая, включая вычисление условий устойчивости, будут верны и в бесконечномерном.

Во второй части главы кратко излагается описание турбулентности, принадлежащее Рюэлю и Такенсу. Эта схема является пока гипотетической, однако похоже, что постепенно она получает все большее признание, по крайней мере для описания некоторых типов турбулентности. Здесь же кратко обсуждается связь с проблемой глобальной регулярности (или проблемой неограниченной «продолжимости решений»¹⁾).

¹⁾ Имеется в виду продолжение на все $t \geq 0$. — Прим. перев.

Формулировка теоремы о гладкости

Прежде чем сформулировать теорему о гладкости, напомним уравнения, которые мы рассматриваем. Классические уравнения Навье — Стокса, описывающие движение однородной несжимаемой вязкой жидкости, как уже упоминалось в гл. 1, таковы:

$$(НС) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} = - \operatorname{grad} p + \mathbf{b}_t, & \mathbf{b}_t \text{ — внешняя сила} \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v} = 0 & \text{на } \partial M \text{ (или поле на } \partial M \text{ задается, причем,} \\ & \text{возможно, зависящим от параметра } \mu \text{).} \end{cases}$$

Здесь M — компактное риманово многообразие с гладкой границей ∂M , обычно — открытое множество в $\mathbb{R}^3$.

Уравнения Эйлера получаются в предположении $\nu = 0$ при замене граничных условий на условие $\mathbf{v} \parallel \partial M$ ¹⁾:

$$(Э) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \operatorname{grad} p + \mathbf{b}_t \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{v} \parallel \partial M \end{cases}$$

Давление $p(t, x)$ в этих уравнениях определяется из условия несжимаемости.

Уравнения Эйлера являются *вырожденным предельным случаем* уравнений Навье — Стокса. Переход к пределу при $\nu \rightarrow 0$ является очень коварным, и в последнее время он интенсивно изучается. Исчезновение членов со старшей производной и соответствующее резкое изменение граничных условий — вот источник трудностей и причина, почему столь не легки задачи теории пограничного слоя и теории турбулентности. Эту тему мы обсудим позднее.

Отметим, что уравнения Эйлера обратимы в том смысле, что если мы решим их для любых начальных условий и $t \geq 0$, то мы можем решить их также для $t < 0$. Это следствие того, что если при $t \geq 0$ $\mathbf{v}_t$ — решение, то и $\mathbf{w}_t = -\mathbf{v}_{-t}$, $t < 0$ — тоже решение.

Для целых $s \geq 0$ и p , $1 < p < \infty$, обозначим через $W^{s,p}$ пространство Соболева функций (или вектор-функций) на M , производные которых до порядка s лежат в L_p ; другим опи-

¹⁾ См. гл. 1.

санием $W^{s,p}$ является пополнение C^∞ -функций f по норме

$$\|f\|_{s,p} = \sum_{0 \leq \alpha \leq s} \|D^\alpha f\|_{L_p},$$

где $D^\alpha f$ есть полная α -я производная f . Более подробные сведения о пространствах Соболева можно найти у Фридмана [1]¹⁾.

Укажем, что для некомпактной области важную роль играют асимптотические условия, и многие результаты, обсуждаемые здесь, в некомпактном случае неизвестны (см. тем не менее Кантор [1] и Мак-Кракен [2]).

Следующий результат является специальным случаем общей теоремы, доказанной Морри [1]. Прямое доказательство см. у Бургиньона и Брезиса [1].

(9.1) **Лемма (разложение Ходжа).** Пусть M то же, что и выше, и X — векторное поле на M класса $W^{s,p}$, $s \geq 0$, $p > 1$. Тогда X единственным образом представляется в виде

$$X = Y + \text{grad } g,$$

где $\text{div } Y = 0$ и $Y \parallel \partial M$. Кроме того, $Y \in W^{s,p}$, а $g \in W^{s+1,p}$.

Пусть $\tilde{W}^{s,p} = \{ \text{векторные поля } X \text{ на } M \mid X \in W^{s,p}, \text{div } X = 0 \text{ и } X \parallel \partial M \}$. По теореме Ходжа, существует отображение $P: W^{s,p} \rightarrow \tilde{W}^{s,p}$, именно: $X \mapsto Y$. Тогда задачу решения уравнения Эйлера можно сформулировать так: найти $v_t \in \tilde{W}^{s+1,p}$, такое, что

$$(Э) \quad \frac{dv_t}{dt} + P((v_t \cdot \nabla) v_t) = 0$$

(плюс начальные условия). Если $s > \frac{n}{p}$ ²⁾, то произведение двух $W^{s,p}$ функций является также функцией класса $W^{s,p}$, поэтому $(v \cdot \nabla)v$ класса $W^{s,p}$, если $v \in W^{s+1,p}$. Таким образом, уравнения такого типа задают эволюционную систему на $\tilde{W}^{s,p}$, как в гл. 8А.

Введем обозначение:

$$\tilde{W}_0^{s,p} = \{ \text{векторные поля } v \text{ на } M \mid v \text{ класса } \tilde{W}^{s,p}, \\ \text{div } v = 0 \text{ и } v = 0 \text{ на } \partial M \}.$$

Если $s = 0$, то определение тем не менее имеет смысл, а пространство обозначается J_p (см. Ладыженская [1]).

¹⁾ См. также Ладыженская [1, 4], Михайлов [1]. — Прим. перев.

²⁾ Здесь n — это размерность M . — Прим. перев.

Тогда задачу решения уравнений Навье — Стокса можно записать так: найти $v_t \in \tilde{W}_0^{s,p}$, такое, что

$$(НС) \quad \frac{dv_t}{dt} - \nu P \Delta v_t + P((v_t \cdot \nabla) v_t) = 0,$$

т. е. опять получаем эволюционное уравнение на $\tilde{W}_0^{s,p}$. В терминологии гл. 8А банахово пространство X здесь $\tilde{W}_0^{0,p} = J_p$, а $Y = \tilde{W}_0^{2,p}$. Бифуркационным параметром чаще всего служит $\mu = \frac{1}{\nu}$ — число Рейнольдса.

Случай $p \neq 2$ очень труден, и, хотя он и очень важен, мы не будем здесь его касаться. Если $p = 2$, обычно пишут

$$\tilde{H}^s = \tilde{W}^{s,2}, \quad \tilde{H}_0^s = \tilde{W}_0^{s,2} \text{ и т. д.}$$

(9.2) **Теорема.** Уравнения Навье — Стокса в размерности 2 и 3 определяют гладкий локальный полупоток на $\tilde{H}_0^2 \subset \subset \tilde{H}^0 \equiv J$.

Этот полупоток удовлетворяет условиям 8.1 и 8.2, предположению о гладкости в п. 8.3 гл. 8, поэтому можно применять теоремы о рождении. (Остальные предположения в п. 8.3 и п. 8.4 зависят от конкретной задачи и должны проверяться вычислением.)

Другими словами, технические трудности, связанные с тем, что мы имеем дело с уравнениями в частных производных, а не с обыкновенными дифференциальными уравнениями, преодолеваются автоматически.

(9.3) **Замечания.** 1. Если границы подвижные и бифуркационный параметр μ зависит от их скорости, то имеют место те же самые результаты и с аналогичными доказательствами. Так происходит, например, в задаче Тейлора.

2. Вышеприведенная теорема неявно имеется в работах многих авторов. Например, Д. Генри сообщил нам, что он получил ее, используя технику Като и Фуджиты. Она доказана многими авторами для размерности 2 (например, Проди). Первое явное доказательство, которое мы нашли — это работы Иосса [3, 5].

3. Случай $p \neq 2$ см. у Мак-Кракен [2].

4. Гладкость полупотока, имеющаяся для уравнений Навье — Стокса, по-видимому, отсутствует у уравнений Эйлера в $\tilde{H}^s$ (см. Като [6], Эбин и Марсден [1]). Таким образом, она существенно зависит от диссипативного члена. Удивительно, однако, что поток, определяемый уравнениями Эйлера, гладкий, если пользоваться лагранжевым описанием

(Эбин и Марсден [1]). Мы с тем же успехом могли бы воспользоваться лагранжевым описанием для доказательства наших результатов об уравнениях Навье — Стокса, но проще использовать настоящий метод.

Перед доказательством гладкости нам необходимо иметь локальную теорему существования. Так как ее легко найти в литературе (Ладыженская [1]), мы только вкратце изложим *метод ее доказательства, отличный от обычного* (см. Соболевский [1]).

Локальная теория существования решений

Основной метод, который здесь можно применить, — это использовать интегральные уравнения, как в методе Пикара для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для уравнения с частными производными его разрабатывали Сегал [1], Като и Фуджита [1], Иосс [3, 6], Сэттинджер [2] и др. (общие предпосылки см. у Кэррола [1]).

Нижеследующий результат сформулирован Вейслером [1] (обсуждение в связи с техникой Иосса см. в гл. 9А).

Сначала некоторые обозначения: E_0, E_1, E_2 — три банаховых пространства с нормами $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, $E_2 \subset E_1 \subset E_0$, где включения плотны и непрерывны (некоторые из этих пространств могут совпадать). Пусть e^{tA} — линейная C^0 -полугруппа на E_0 , ограничение которой на E_2 является сжимающей полугруппой. Предположим, что $e^{tA}: E_1 \rightarrow E_2$ — ограниченное линейное отображение при $t > 0$, и пусть его норма обозначается через $\mu(t)$. Наше первое предположение:

$$\text{П1) При } T > 0 \int_0^T \mu(\tau) d\tau < \infty.$$

Для уравнений Навье — Стокса $A = \nu P\Delta$, и мы можем выбрать или

$$(1) \quad E_0 = J_2, \quad E_1 = \tilde{H}^1 \quad \text{и} \quad E_2 = \tilde{H}_0^2$$

или

$$(2) \quad E_0 = E_1 = \tilde{H}^{-\frac{1}{2}} = \text{пополнение } J \text{ относительно нормы } \|(-\nu P\Delta)^{-1/4} u\|_{L_2}, \quad E_2 = \tilde{H}^1 = \text{область определения оператора } (-\nu P\Delta)^{1/2}.$$

Случай (2) рассмотрен Като и Фуджитой [1].

П1) выполняется вследствие того, что A — отрицательный самосопряженный оператор на J с областью определения $\tilde{H}_0^2$ (Ладыженская [1]), и поэтому он определяет аналитическую полугруппу; таким образом, норма e^{tA} , как отобра-

жения из $\tilde{H}_0^2$ в J_2 , меньше или равна C/t (см. Иосида [1]). Имеется, однако, неравенство Соболева

$$\|f\|_{H^1} \leq \|f\|_{H^2}^{1/2} \cdot \|f\|_{L^2}^{1/2}.$$

Легче всего его можно получить из общего неравенства Соболева — Ниренберга — Гальярдо, имеющегося у Ниренберга [1]:

$$\|D^j f\|_{L_p} \leq C \|D^m f\|_{L^r}^a \cdot \|f\|_{L^q}^{1-a},$$

где

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + a \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n} \right) + (1-a) \frac{1}{q}, \quad \frac{j}{m} \leq a \leq 1$$

(если $m - j - n/r$ — целое число ≥ 1 , то случай $a = 1$ исключается). Поэтому мы можем выбрать $\mu(t) \leq C \sqrt{t}$ и, следовательно, П1) выполняется. Таким же образом в случае (2) можно показать, что $\mu(t) \leq C/t^{3/4}$ (Като и Фуджита [1]).

Относительно нелинейных членов будем предполагать справедливым следующее *предположение*.

П2) $J_t: \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_1$ — полулипшицево отображение (т. е. липшицево на ограниченных множествах) локально равномерно по t , и $J_t(\varphi)$ непрерывно по (t, φ) . Для простоты мы можем считать $J_t(0) = 0$.

Рассмотрим «формальное» дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varphi}{dt} = A\varphi + J_t(\varphi) \quad (9.1)$$

в форме интегрального уравнения (см., например, Сегал [1])

$$W(t, t_0)\varphi = e^{(t-t_0)A}\varphi + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A} J_\tau(W(\tau, t_0), \varphi) d\tau, \quad (9.2)$$

где $t > t_0$ (добавление неоднородного члена не вносит дополнительных трудностей).

(9.4). **Теорема.** При условиях П1), П2) уравнение (9.2) определяет единственный локальный полупоток (т. е. эволюционную систему) на $\mathbb{E}_2$ (в смысле гл. 8А), для которого отображения $W(t, t_0): \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ локально равномерно липшицевы и непрерывно зависят от t .

Доказательство. Воспользуемся обычным принципом сжимающих отображений, как для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. Ленг [1]): выберем α_0 , $0 < \alpha_0 < \alpha$, и пусть $K_\alpha(t)$ обозначает константу Липшица отображения

J_t на шаре B_α радиуса α ; выберем T таким, чтобы выполнялось

$$\left(\int_0^{T-t_0} \mu(\tau) d\tau \right) \left(\sup_{\tau \in [t_0, T]} K_\alpha(\tau) \right) \leq 1 - \frac{\alpha_0}{\alpha}. \quad (9.3)$$

Возьмем теперь $\varphi \in B_{\alpha_0}$, и пусть M — полное метрическое пространство C^0 отображений $\Phi: [0, T] \rightarrow \mathbb{E}_2$ с $\Phi(t_0) = \varphi$, $\Phi(t) \in B_\alpha$ и метрикой

$$d(\Phi, \Psi) = \sup_{t \in [t_0, T]} \|\Phi(t) - \Psi(t)\|_2.$$

Определим $\mathcal{F}: M \rightarrow M$ по формуле

$$\mathcal{F}\Phi(t) = e^{(t-t_0)A}\varphi + \int_{t_0}^t e^{(t-\tau)A} J_\tau(\Phi(\tau)) d\tau.$$

Из определения и (9.3) получаем две важные оценки: во-первых,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}\Phi(t)\|_2 &\leq \alpha_0 + \int_{t_0}^T \mu(t-\tau) K_\alpha(\tau) \cdot \alpha d\tau \leq \\ &\leq \alpha_0 + \alpha \left(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha} \right) = \alpha \end{aligned} \quad (9.4)$$

(напомним, что здесь $J_\tau(0) = 0$), откуда следует, что $\mathcal{F}$ отображает M в M , и во-вторых, тем же способом,

$$d(\mathcal{F}\Phi, \mathcal{F}\Psi) \leq \left(1 - \int \frac{\alpha_0}{\alpha} \right) d(\Phi, \Psi), \quad (9.5)$$

откуда следует, что $\mathcal{F}$ — сжимающее. Отсюда легко вытекает требуемый результат. ■

(9.5) *Упражнения.* 1. Показать, что $W(t, t_0)$ имеет в $\mathbb{E}_2$ константу Липшица, равную α/α_0 . Проверить, что $W(t, s) \times \times W(s, t_0) = W(t, t_0)$.

2. Пусть φ_t — максимальное решение (9.2) на $[0, T]$ и $T < \infty$; показать, что $\limsup_{t \rightarrow T} \|\varphi_t\|_2 = \infty$, т. е. проверить условие продолжимости 8.2.

3. Используя неравенство Соболева, проверить, что оператор $J_t(u) = P((u \cdot \nabla)u)$ удовлетворяет предположениям случая (1) выше. По поводу случая (2) см. Като и Фуджиты [1].

В дальнейшем мы бы хотели все же иметь решение дифференциального уравнения. Поэтому сделаем дополнительное предположение.

П3) Предположим, что область определения A как оператора, действующего $\mathbb{E}_0$, в точности совпадает с $\mathbb{E}_2$.

(9.6) **Теорема.** Если условия П1), П2), П3) выполнены, то любое решение (9.2) удовлетворяет (9.1) как эволюционной системе в $\mathbb{E}_0$ с областью определения $D = \mathbb{E}_2$ (в терминологии гл. 8А $W(t, t_0)$ — это (зависящий от времени) локальный поток оператора $X(\varphi) = A(\varphi) + J_t(\varphi)$, отображающего $\mathbb{E}_2$ в $\mathbb{E}_0$). Решения (9.2) в $\mathbb{E}_2$ единственны.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathbb{E}_2$ и $\varphi(t) = W(t, t_0)\varphi \in \mathbb{E}_2$ — решение (9.2); тогда, выбирая для простоты $t_0 = 0$, имеем

$$\varphi(t) = e^{tA}\varphi + \int_0^t e^{(t-\tau)A} \cdot J_\tau(\varphi(\tau)) d\tau.$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \{\varphi(t+h) - \varphi(t)\} &= \frac{1}{h} \{e^{hA}\varphi(t) - \varphi(t)\} - J_t(\varphi(t)) + \\ &+ \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \{e^{(t+h-\tau)A} J_\tau(\varphi(\tau)) - J_t(\varphi(t))\} d\tau. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Из выражения

$$\begin{aligned} e^{(t+h-\tau)A} J_\tau(\varphi(\tau)) - J_t(\varphi(t)) &= \\ &= e^{(t+h-\tau)A} [J_\tau(\varphi(\tau)) - J_t(\varphi(t))] + e^{t+h-\tau} J_t(\varphi(t)) - J_t(\varphi(t)) \end{aligned}$$

нетрудно увидеть, что последний член (9.6) стремится к нулю при $h \rightarrow 0$ в $\mathbb{E}_1$ и, следовательно, в $\mathbb{E}_0$. Первый член в (9.6) стремится в $\mathbb{E}_0$ к $A(\varphi(t)) - J_t(\varphi(t))$ при $h \rightarrow 0$, так как $\varphi(t) \in \mathbb{E}_2$ — области определения A . ■

Таким образом, мы можем заключить, что уравнения Навье — Стокса определяют локальный полупоток в $\tilde{H}_0^2$, который продолжается до локального полупотока в $\tilde{H}^1$ (с помощью интегрального уравнения).

Гладкость

(9.7) **Теорема.** Пусть выполнены условия П1), П2), П3) и дополнительно условие

П4) $J_t: \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_1$ — отображение класса C^∞ с производными, непрерывно зависящими от t .

Тогда полупоток на $\mathbb{E}_2$, определяемый уравнением (9.1), является полупотоком класса C^∞ , т. е. каждое $W(t, t_0)$ класса C^∞ , а его производные непрерывно зависят от t в сильной топологии (см. гл. 8).

Доказательство. Проверим условия теоремы (8А.31). В нашем случае $X = \mathbb{E}_0$ и $Y = \mathbb{E}_2$, $D = Y$. Из предположений теоремы следует, что условие (а) теоремы 8А.31 наверняка выполняется. Так как $Z(\varphi_1, \varphi_2)$ — оператор того же типа, что и рассмотренный выше, то из (9.4) следует, что условие (б) выполняется, (в) выполняется в силу доказанной в (9.4) липшиц-непрерывности $W(t, t_0)$ в $\mathbb{E}_2$. Условие (г), очевидно, выполнено. Следовательно, $W(t, t_0): \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{E}_2$ дифференцируемо по Гато.

Эта процедура может быть повторена. Те же самые рассуждения можно применить к полупотоку

$$\tilde{W}(t, t_0)(\varphi, \psi) = (W(t, t_0)\varphi, DW(t, t_0)\varphi \cdot \psi),$$

действующему в $\mathbb{E}_2 \times \mathbb{E}_2$. Следовательно, отображение W класса C^1 (см. 8А.32)) и по индукции класса C^∞ . ■

Для уравнения (9.1) не обязательно использовать всю технику гл. 8А, в частности тонкие результаты о зависимости решений эволюционных уравнений от времени. Действительно, можно прямо доказать (9.7) тем же методом, что и теорему (8А.31). Однако желательно получать результаты такого типа с единой точки зрения.

(9.8) *Задача.* Предположим дополнительно, что

П5) A порождает аналитическую полугруппу.

Показать, что при $t > 0$ и $\varphi \in \mathbb{E}_1$, $\varphi(t)$ лежит в области определения любой степени A и что $\varphi(t)$ — функция от t класса C^∞ для $t > 0$. (Указание: использовать (8А.33).) Показать также гладкость по v , если A заменено на vA (см. замечания, следующие за (8А.33)).

Более внимательный анализ показывает, что в действительности для уравнения Навье — Стокса отображения $W(t, t_0)$ принадлежат к классу C^∞ на $\tilde{H}^1$ (т. е. предположение П3) не нужно). См. по этому поводу Вейслер [1].

Таким образом, мы доказали требуемую гладкость для уравнений Навье — Стокса, поэтому доказательство (9.2) и, следовательно, бифуркационных теорем для этих уравнений обосновано.

Проблема турбулентности

Мы уже видели, как бифуркации могут приводить от устойчивых особых точек к устойчивым периодическим орбитам, а затем к устойчивым двумерным торами. Подобным образом мы можем прийти к торами более высоких размерностей¹⁾. Рюэль и Такенс [1] утверждают, что в этой и других ситуациях можно ожидать появления сложных («странных») аттракторов и что это лежит в основе объяснения турбулентности.

В частном случае, когда при изменении параметра образуются торы возрастающей размерности, такая модель является техническим усовершенствованием идеи Хопфа [4]²⁾; при этом турбулентность является результатом последовательных потерь устойчивости и ветвления. Однако странные аттракторы, по-видимому, могут образовываться также другим путем, как в уравнениях Лоренца (см. гл. 4В) (строго говоря, имеется только «странное» инвариантное множество). Это хорошо согласуется с общей картиной Рюэля и Такенса, а также тесно связано с идеей жесткого возникновения колебаний Джозефа и Сэттинджера [1].

В процессе ветвления при возрастании числа Рейнольдса устойчивые решения становятся неустойчивыми. Следовательно, предполагается, что турбулентность есть необходимое следствие уравнений, действительно является «типичным случаем» и просто представляет собой сложное решение. Например, в течении Куэтта с ростом угловой скорости Ω_1 внутреннего цилиндра при некотором бифуркационном значении Ω_1 происходит переход от ламинарного потока к вихрям Тейлора или течению подобного типа и в конце концов развивается турбулентность. По такой схеме, как это делалось в течение длительного времени, сначала доказывают теорему устойчивости и смотрят, когда теряется устойчивость (Хопф [2], Чандрасекар [1], Линь [1] и т. д.). Например, если параметр остается достаточно близким к значению, при котором существует ламинарный поток, следует ожидать, что поток останется приблизительно ламинарным. Серрин [2] доказал теорему такого типа, которую мы приведем в качестве иллюстрации.

(9.9) Теорема об устойчивости. Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область и поток v_t^y на ∂D задан (что соответствует

¹⁾ Рождение $(k+1)$ -мерного тора из k -мерного при $k \geq 2$ пока является нерешенной задачей, гораздо более сложной, чем рождение из точки и замкнутой орбиты. — Прим. перев.

²⁾ Гораздо раньше такая идея была высказана Л. Д. Ландау. — Прим. перев.

подвижной границе, как в потоке Куэтта). Пусть $V = \max_{x \in D, t \geq 0} \|v_t^v(x)\|$, d — диаметр D , а ν — вязкость. Тогда, если число Рейнольдса $N_{\text{Re}} = Vd/\nu \leq 5,71$, то v_t^v является абсолютно L^2 -устойчивым для всех решений уравнений Навье — Стокса.

Абсолютная L^2 -устойчивость означает, что если $\bar{v}_t^v$ — любое другое решение уравнений с теми же самыми граничными условиями, тогда L^2 -норма (или энергия) разности $\bar{v}_t^v - v_t^v$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство этой теоремы очень простое, и поэтому мы советуем прочитать Серрина [1, 2]. Используя теорему 1.4 гл. 2А и идеи гл. 8, можно получить локальную устойчивость и в сильной топологии.

Критерии такого типа для потока Куэтта подробно анализировали Чандрасекар [1], Серрин [2] и Вельте [3].

Как частный случай, мы обнаруживаем теперь то, что мы и ожидали. Именно, если v_t^v — любое решение, равное нулю на ∂M и $\nu \rightarrow 0$, то $v_t^v \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ в L^2 -норме, так как нулевое решение абсолютно устойчиво.

Традиционное определение (Хопф [2], Ландау и Лифшиц [1]) говорит, что при развитии турбулентности векторное поле v_t описывается квазипериодическими функциями, т. е. $v_t(\omega_1, \dots, \omega_n) = f(t\omega_1, \dots, t\omega_n)$, где f является периодической по каждой координате, но периоды рационально независимы. Например, если орбиты v_t на торе, который получается из теоремы Хопфа, являются спиралями с рационально независимыми углами, то v_t — именно такой поток.

Если рассмотреть этот пример несколько подробнее, становится ясно, что существует много орбит потока v_t , которые качественно похожи на квазипериодические, но сами не являются квазипериодическими, и действительно, малая окрестность квазипериодической функции может не содержать достаточно много других таких функций. Хотелось бы, однако, чтобы множество функций, описывающих турбулентность, содержало бы большинство функций, а не было бы тощим множеством. Точнее, назовем подмножество топологического пространства S типичным, если оно является бэровским множеством (т. е. счетным пересечением открытых всюду плотных множеств). Естественно ожидать, что функции, описывающие турбулентность, будут типичными, так как турбулентность — явление общего характера, а уравнения, описывающие поток, никогда не являются точными. Таким образом, хотелось бы, чтобы построенная теория турбулентности

не рушилась при добавлении малых возмущений к уравнениям движения.

Такого рода причины привели Рюэля и Такенса [1] к следующей точке зрения: маловероятно, чтобы квазипериодические функции могли «реально» описывать турбулентность, так как они не типичны. Вместо них предлагается использовать «странные аттракторы». Решения, лежащие на странных аттракторах, обладают многими качественными свойствами, которые можно ожидать от «турбулентных» решений уравнений Навье — Стокса, и они устойчивы при возмущениях уравнений, т. е. «структурно устойчивы»¹⁾.

За примерами странных аттракторов мы отсылаем к Смейлу [1]. Обычно странный аттрактор устроен, как произведение канторовского множества на многообразие, по крайней мере, локально²⁾.

Рюэль и Такенс показали, что если мы определим странный аттрактор как аттрактор, не являющийся точкой или замкнутой орбитой и пренебрежем нетипичными случаями, вроде «восьмерки», то такие странные аттракторы существуют на торе T^4 , т. е. каждое векторное поле из некоторого открытого множества пространства векторных полей имеет странный аттрактор.

Если притягивающее множество потока, который порождается уравнениями Навье — Стокса на пространстве векторных полей, является странным, то ясно, что решение, притягивающееся к этому множеству, ведет себя сложным, турбулентным образом. В то время как в целом множество устойчиво, индивидуальная точка может не быть таковой. Притягивающаяся орбита все время проходит около неустойчивого (близкого к периодическому) решения и смещается аттрактором случайным образом (см. рис. 9.1). Таким образом, мы приходим к следующему определению турбулентности, предложенному Рюэлем и Такенсом: «... движение жидкой среды турбулентно, если это движение описывается интегральной кривой векторного поля X_μ , которая стремится к непустому множеству A , не являющемуся состоянием равновесия или замкнутой орбитой».

¹⁾ Как сейчас уже стало ясно, многие аттракторы не являются устойчивыми в обычном смысле. Например, таков аттрактор в уравнениях Лоренца (см. Афраймович, Быков, Шильников [1]). Однако при возмущениях сам аттрактор сохраняется (хотя структура на нем меняется). — *Прим. перев.*

²⁾ Здесь имеются в виду аттракторы, являющиеся базисными множествами в смысле Смейла. В общем случае это не так (см. Гукенхеймер [2]). — *Прим. перев.*

Одна из возможностей возникновения турбулентного движения — это его появление на торе T^k , рождающемся в результате бифуркации рождения цикла. Такое может случиться после *конечного* числа последовательных бифуркаций. Однако С. Смейл и К. Симон указали нам, что здесь могут иметь место бесконечное число других бифуркаций (таких, как различные пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий и т. д.). Однако турбулентность, по-видимому, может возникать и другим путем. Например, в примере 4В.9



Рис. 9.1.

(уравнения Лоренца) бифуркация рождения цикла является субкритической, и странный аттрактор может появиться неожиданно, когда μ проходит критическое значение, без предварительного появления автоколебаний. Описание возникающего здесь аттрактора имеется в гл. 12. См. также Мак-Лафлин и Мартин [1, 2], Гукенхеймер и Йорк [1] и Ланфорд [2]¹⁾.

Суммируя сказанное, эту точку зрения на турбулентность можно сформулировать следующим образом. При малых μ (соответствующих числу Рейнольдса во многих проблемах гидродинамики) наши решения устойчивы, а при возрастании μ эти решения становятся неустойчивыми при определенном критическом значении μ , после чего решения стремятся к более сложному устойчивому решению; в конце концов после определенного (конечного) числа таких бифуркаций решение попадает на странный аттрактор (в пространстве всех решений задачи). Такое решение, которое блуждает вблизи странного аттрактора, называется турбулентным.

¹⁾ См. работу В. С. Афраймовича, В. В. Быкова и Л. П. Шильникова, где описана схема появления аттрактора, а также приложение Л. П. Шильникова к настоящей книге. — Прим. перев.

Попадание на странный аттрактор может случаться после бифуркации рождения цикла, а затем инвариантного тора или с помощью других механизмов, таких, как в уравнениях Лоренца («жесткое возникновение турбулентности»).

Лере [3] утверждал, что уравнения Навье — Стокса могут терять смысл, их решения перестают быть гладкими, когда начинается турбулентность. Эта идея еще более распространилась, когда Хопф [3] в 1950 году доказал глобальное существование (по времени) слабых решений уравнений, но не их единственность. Было выдвинуто предположение, что турбулентность возникает, когда сильное решение становится слабым и нарушается единственность. Однако до сих пор неизвестно, так это или нет в действительности (см. Ладыженская [1, 2]).

Представление Рюэля и Такенса и представление Лере противоречат друг другу. В самом деле, если объяснением являются странные аттракторы, то их устойчивость влечет за собой гладкость решений для всех t . Действительно, как мы знаем из нашего доказательства теоремы Хопфа, вблизи устойчивой замкнутой орбиты решения определены, остаются гладкими и удовлетворяют условию единственности для всех $t \geq 0$ (см. гл. 8, а также Сэттинджер [2]). И это происходит уже в области интересных чисел Рейнольдса, где глобальная гладкость не получается из классических оценок.

Известно, что в двумерных задачах решения уравнений Эйлера и Навье — Стокса существуют глобально по t и остаются гладкими. В трехмерной задаче это неизвестно и называется задачей «глобальной регулярности» или «задачей продолжения на все время».

Недавние численные результаты (см. Темам и др. [1]) наводят на мысль, что для уравнений Эйлера ответ отрицательный.

Теоретические исследования, включающие анализ спектра, пока не дают окончательного ответа на этот вопрос для уравнений Навье — Стокса (см. Марсден, Эбин и Фишер [1] и статьи Фриша и др. в книге Темама и др. [1]).

Мы хотим сформулировать в качестве гипотез два утверждения:

1. В картине Рюэля и Такенса глобальная регулярность для всех начальных условий не является априорно необходимой, области притяжения аттракторов будут определять, какие решения регулярны, и будут гарантировать регулярность для турбулентных решений (которые существуют, как считает теперь большинство специалистов).

2. Глобальная регулярность, если она верна в общем, вероятно никогда не будет доказана с помощью оценок на

уравнения. Необходимо гораздо более глубоко исследовать притягивающие множества бесконечномерной динамической системы уравнений Навье — Стокса и получить таким путем априорные оценки.

Две важные открытые проблемы

1. Получить странный аттрактор в конкретной задаче для уравнений Навье — Стокса (например, для течения в трубе, обтекания цилиндра и т. д.).

2. Связать эргодическую теорию на странном аттракторе (Боуэн и Рюэль [1])¹⁾ со статистической теорией турбулентности (стандартная ссылка здесь Бэтчелор [1]²⁾; однако в этой теории далеко не все ясно, некоторые идеи Хопфа [5] были недавно развиты в работах Чорина, Фойаша и др.).

¹⁾ См. также Бунимович и Синай [1]. — *Прим. перев.*

²⁾ На русском языке такой стандартной ссылкой является Монин и Яглом [1]. — *Прим. перев.*

Глава 9А

О РАБОТЕ Г. ИОССА

Г. Чайлдс

В этой работе [3] доказывается существование периодической орбиты, возникающей из стационарного решения через бифуркацию рождения цикла, для одной задачи гидродинамики. Эти результаты аналогичны результатам, описанным ранее. Например, в субкритическом случае показано, что периодическое решение будет неустойчиво по Ляпунову, если действительный бифуркационный параметр (число Рейнольдса) меньше того критического значения, при котором происходит бифуркация; в суперкритическом случае оно будет (экспоненциально) устойчиво, если значение параметра больше критического.

В отличие от основной части настоящих заметок Иосс почти всюду использует технику различных функциональных пространств. Характерно, что периодическое решение, полученное им, является непрерывной функцией со значениями в пространстве Соболева, построенном на основной области Ω в $\mathbb{R}^3$. Тем не менее широко используется теорема о неявной функции. Здесь будут сформулированы три основные теоремы работы Иосса, и для иллюстрации метода будут даны наброски их доказательства.

Сначала сформулируем саму задачу. Пусть I — замкнутый интервал на действительной прямой, $V(I)$ — окрестность этого интервала в $\mathbb{C}$. Предположим, что для каждого $\lambda \in V(I)$ задан L_λ -замкнутый линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H . Семейство $\{L_\lambda\}$ голоморфно и имеет тип (A) в $V(I)$ (см. Като [3]). Кроме того, каждый L_λ m -секториален с вершиной γ_λ . Наконец, L_λ имеет в H компактную резольвенту. Пусть $\mathcal{D}$ — общая область определения всех L_λ . Предположим, что K — гильбертово пространство, такое, что $\mathcal{D} \subseteq K \subseteq H$, где все вложения непрерывны и $\forall U \in K, 0 \leq \alpha < 1, \|I_\lambda(t)U\|_{\mathcal{D}} \leq ke^{\gamma_\lambda t} (1 + t^{-\alpha}) \times \|U\|_K$, где $I_\lambda(t)$ — голоморфная полугруппа, порожденная оператором $-L_\lambda$. Пусть $M: \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow K$ — непрерывная билинейная форма. Теперь мы можем сформулировать за-

дачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + L_\lambda U - M(U, U) = 0, \\ U \in C^0(0, \infty; \mathcal{D}) \cap C^1(0, \infty; H), \\ U(0) = U_0 \in \mathcal{D}, U(0) = U(T) = U(2T) = \dots \text{ для} \\ \text{некоторого } T > 0. \end{cases} \quad (9A.1)$$

Иосс показывает, что для течений в областях некоторой формы уравнения для возмущений стационарного решения уравнений Навье — Стокса имеют такой вид. (См. работу Иосса [5].) Для доказательства существования решений уравнений (9A.1) необходимо сделать дополнительные предположения. Пусть $\xi_0(\lambda) = \sup_{\xi \in \sigma(-L_\lambda)} \{\operatorname{Re} \xi\}$. Тогда

(Н.1) $\exists \lambda_c \in \mathbb{R}$, левая полуокрестность $V^-(\lambda_c)$ и правая полуокрестность $V^+(\lambda_c)$, такие, что $\xi_0(\lambda_c) = 0$, $\lambda \in V^-(\lambda_c) \Rightarrow \xi_0(\lambda) < 0$, $\lambda \in V^+(\lambda_c) \Rightarrow \xi_0(\lambda) > 0$.

(Н.2) Оператор L_{λ_c} имеет чисто мнимые собственные значения $\xi_0 = i\eta_0$ и $\bar{\xi}_0$. Кроме того, эти собственные значения простые. Для $\lambda \in V(\lambda_c)$ существуют две аналитические функции ξ_1 и $\bar{\xi}_1 \in \sigma(-L_\lambda)$, такие, что $\xi_1(\lambda_c) = \xi_0$. Спектр $\sigma(L_\lambda)$ представим в виде $\{-\xi_1\} \cup \{-\bar{\xi}_1\} \cup \tilde{\sigma}(L_\lambda)$. Это разложение определяет разложение H на инвариантные подпространства:

$$\forall U \in H, \quad U = X + Y, \quad X = E_\lambda U, \quad Y = P_\lambda U;$$

$$E_\lambda = E(-\xi_1) + E(-\bar{\xi}_1), \quad (L_\lambda + \xi_1)U_1(\lambda) = 0, \quad (L_\lambda^* + \bar{\xi}_1)W_1(\lambda) = 0, \\ (U_1(\lambda), W_1(\lambda))_H = 1, \quad (U_1(\lambda), W_1(0))_H = 1.$$

Собственные векторы $U_1(\lambda)$, $\overline{U_1(\lambda)}$ образуют базис $E_\lambda H$. Для $\lambda \in V(\lambda_c)$

$$L_\lambda(U) = L_{\lambda_c}U + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_c)^n L^{(n)}U;$$

$$U_1(\lambda) = U^{(0)} + (\lambda - \lambda_c)U^{(1)} + \dots;$$

$$W_1(\lambda) = W^{(0)} + (\lambda - \lambda_c)W^{(1)} + \dots; \quad \xi_1(\lambda) = \xi_0 + (\lambda - \lambda_c)\xi^{(1)} + \dots.$$

В частности, мы имеем $\xi^{(1)} = -(L^{(1)}U^{(0)}, W^{(0)})_H$, $L_{\lambda_c} + \xi_0 U^{(0)} = 0$, $L_{\lambda_c}^* + \bar{\xi}_0 W^{(0)} = 0$, $(U^{(0)}, W^{(0)})_H = 1$. Теперь мы можем сформулировать предположение

(Н.3) $\operatorname{Re}(L^{(1)}U^{(0)}, W^{(0)})_H \neq 0$. В силу (Н.1) отсюда следует $\operatorname{Re} \xi^{(1)} > 0$. Это стандартные предположения для существо-

вания бифуркации рождения цикла. Для формулировки теоремы нам также необходимо знать, что

$$\gamma_0 = \gamma_{0r} + i\gamma_{0i} = - \left(M^{(0)} [U^{(0)}, L_{\lambda_c}^{-1} M^{(0)} (U^{(0)}, \overline{U^{(0)}})] + \right. \\ \left. + M^{(0)} [\overline{U^{(0)}}, (L_{\lambda_c} + 2i\eta_0 I)^{-1} M(U^{(0)}, U^{(0)})], W^{(0)} \right)_H,$$

где $M^{(0)}(U, V) = M(U, V) + M(V, U)$.

Теперь мы сформулируем теорему, принадлежащую Иоссу.

Теорема 2. Если выполнены предположения (Н.1), (Н.2), (Н.3) и $\gamma_{0r} \neq 0$, то имеет место бифуркация рождения нетривиального T -периодического решения системы (9А.1), происходящая при $\lambda = \lambda_c$. Если $\gamma_{0r} > 0$, то бифуркация происходит при $\lambda \in V^+(\lambda_c)$, в то же время, если $\gamma_{0r} < 0$, то она происходит при $\lambda \in V^-(\lambda_c)$. Решение $\mathcal{U} \in C^0(-\infty, \infty, \mathcal{D})$ единственно с точностью до $\text{Arg } a$, что соответствует сдвигу по t . Наконец, $\mathcal{U}(t)$ аналитично относительно $\varepsilon = \sqrt{|\lambda - \lambda_c|}$, период аналитичен по $\lambda - \lambda_c$, и можно записать $\mathcal{U}(t, \varepsilon) = \varepsilon \mathcal{U}^{(1)}(t) + \varepsilon^2 \mathcal{U}^{(2)}(t) + \dots$, где $\mathcal{U}^{(i)}(t)$ T -периодичны. Здесь $\text{Arg } a$ — фаза колебаний $X(t)$.

Дадим набросок доказательства. Обозначим

$$\xi_1(\lambda) = \xi(\lambda) + i\eta(\lambda), \quad N_\lambda = iE(-\xi_1) - iE(-\bar{\xi}_1).$$

Тогда уравнения для X и Y -компонент $\mathcal{U}$, получающиеся из (9А.1), таковы:

$$Y(t) = \tilde{B}_t(X + Y, X + Y; \lambda), \\ \frac{dX}{dt} - \eta N_\lambda X = \xi X + E_\lambda M(X + Y, X + Y) \equiv F(X, Y; \lambda), \quad (9A.2) \\ X(0) = X(T), \quad X, Y \in C^0(-\infty, \infty; \mathcal{D}),$$

$$\text{где } \tilde{B}_t(U, V; \lambda) = \int_{-\infty}^t I_\lambda(t - \tau) P_\lambda M[U(\tau), V(\tau)] d\tau.$$

Подставляя выражение $X(t) = A(t)U_1(\lambda) + \overline{A(t)U_1(\lambda)}$ в правую часть уравнения для Y , мы получаем, что правая часть аналитична относительно (λ, X, Y) в окрестности точки $(\lambda_c, 0, 0)$ в пространстве $\mathbb{C} \times \{C^0(-\infty, \infty; \mathcal{D})\}^2$. Производная правой части по Y в точке $(\lambda_c, 0, 0)$ равна нулю. Обозначая тогда $X^{(0)}(t) = A(t)U^{(0)} + \overline{A(t)U^{(0)}}$ и применяя теорему о неявной функции, получаем, что

$$Y(t) = \eta_t(X, \lambda) = \sum_{i, l \geq 2}^{\infty} (\lambda - \lambda_c)^i \eta_t^{(i, l)}(X^{(0)}, \dots, X^{(0)}),$$

где $\eta_t^{(i, j)}(\cdot, \dots, \cdot)$ — однородный степени j непрерывный функционал. Теперь мы должны решить уравнение

$$\frac{dX}{dt} = \eta N_\lambda X + F(X, \eta_t(X; \lambda); \lambda)$$

при условиях $X(0) = X(T)$, $X \in C^0(-\infty, \infty; \mathcal{D})$. Решение X ищется в виде

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{\frac{2\pi t}{T} N_\lambda} \chi + \tilde{X}(t) \equiv \chi(t) + \tilde{X}(t), \\ \chi &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\frac{2\pi t}{T} N_\lambda} X(t) dt = aU_1(\lambda) + \overline{aU_1(\lambda)}. \end{aligned} \quad (9A.3)$$

Раскладывая уравнение для $X(t)$ в соответствии с (9A.3), можно, используя теорему о неявной функции, найти $\tilde{X}(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t) = \mathcal{X}_t(\chi, \lambda, T) &= \sum_{i, j, k \geq 2}^{\infty} (\lambda - \lambda_c)^i (T - T_0)^j \mathcal{X}^{(i, j, k)}(\chi, t), \\ t &\in [0, T], \end{aligned}$$

где $\mathcal{X}^{(i, j, k)}(\chi, t)$ однородна степени k по χ . Теперь $\tilde{X}(t)$ в другом уравнении (для χ) заменяется на $\mathcal{X}_t(\chi, \lambda, T)$. Выделяя действительную и мнимую части, мы получаем

$$\begin{aligned} \xi + f(|a|^2, \lambda, T) &= 0, \\ \eta = \frac{2\pi}{T} + g(|a|^2, \lambda, T) &= 0, \end{aligned}$$

где $f(0, \lambda, T) = g(0, \lambda, T) = 0$. Первый член ряда Тейлора в окрестности точки $(0, \lambda_c, T_0)$ равен $-\gamma_0 |a|^2$. Ненулевое значение γ_0 , позволяет найти решение $|a|^2$ и T с помощью теоремы о неявной функции. Этим заканчивается определение $X(t)$, $Y(t)$, а поэтому и $\mathcal{U}(t, \varepsilon)$.

Теперь мы получили периодическое решение и хочется определить его устойчивость. Рассмотрим близкое решение $U(t)$ и положим $U(t) = \mathcal{U}(t + \delta, \varepsilon) + U'(t)$. Тогда $U'(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U'}{\partial t} = A_\varepsilon(t + \delta) U' + M(U', U'),$$

$$U'(0) = U_0 = \mathcal{U}(\delta, \varepsilon) \in \mathcal{D},$$

$$U' \in C^0(0, \infty; \mathcal{D}) \cap C^1(0, \infty; H),$$

где

$$A_\varepsilon(t + \delta) = -L_\lambda + M^{(0)}[\mathcal{U}(t + \delta, \varepsilon), \cdot], \quad \lambda = \lambda_c + \varepsilon^2 \operatorname{sgn}(\lambda - \lambda_c).$$

Поэтому для изучения устойчивости нужно выяснить свойства решений линеаризованного уравнения:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A_\varepsilon(t + \delta) V, \quad V \in C^0(0, T_1; \mathcal{D}) \cap C^1(0, T_1; H),$$

$$V(0) = V_0 \in \mathcal{D}, \quad T_1 < \infty.$$

Решением этого уравнения является

$$V(t) = I_\lambda(t) V_0 + \int_0^t I_\lambda(t - \tau) M^{(0)}[\mathcal{U}(t + \delta, \varepsilon), V(\tau)] d\tau.$$

Запишем это решение как $V(t) = G_\varepsilon(t, \delta) V_0$. Свойства устойчивости будут следовать из свойств спектра отображения $G_\varepsilon(T, \delta)$, которое играет роль отображения Пуанкаре. Приведем теперь следующую теорему Иосса.

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 2, то оператор $G_\varepsilon(T, \delta)$, определенный выше, имеет спектр, не зависящий от $\delta \in \mathbb{R}$. Он состоит из двух действительных простых собственных значений, 1 и $1 - 8\pi\xi^{(1)}(\lambda - \lambda_c) + o(\lambda - \lambda_c)$, лежащих в окрестности 1, и остальной части спектра, являющейся объединением счетного множества собственных значений конечной кратности, с единственной точкой накопления 0. Они лежат внутри круга радиуса $\xi < 1$ независимо от выбора $\varepsilon \in \mathcal{V}(0)$.

Следующее утверждение теперь непосредственно вытекает из леммы 5 работы Юдовича [10].

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда если $\gamma_0 < 0$, то после бифуркации $\lambda \in \mathcal{V}^-(\lambda_c)$, а вторичное решение неустойчиво по Ляпунову.

Теперь дадим набросок доказательства теоремы 3. Оператор $G_\varepsilon(T, \delta)$ компактен в $\mathcal{D}$. Следовательно, его спектр дискретный. Пусть $\sigma \in \text{Spec } G_\varepsilon(T, \delta)$. Тогда существует вектор $V \neq 0$, такой, что $\sigma V = G_\varepsilon(T, \delta) V$. Далее, если $W = G_\varepsilon(nT - \delta, \delta) V$ и $n \in \mathbb{N}$ таково, что $\delta \leq nT$, то $\sigma W = G_\varepsilon(T, 0) W$. Следовательно, $\text{Spec } (G_\varepsilon(T, \delta)) \subseteq \text{Spec } (G_\varepsilon(T, 0))$. Аналогично этому выполняется и обратное включение. Для того чтобы показать, что $1 \in \text{Spec } G_\varepsilon(T, \delta)$, достаточно установить, что $G_\varepsilon(T, 0) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}(0, \varepsilon) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}(0, \varepsilon)$. Заметим, что $I_{\lambda_c}(T_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(T, 0)$. Можно показать, что 1 — полупростое собственное значение $I_{\lambda_c}(T_0)$ (кратности 2). Всем собственным значениям ξ^n оператора $I_{\lambda_c}(T_0)$ соответствует конечное

число собственных значений $-T_0^{-1}(\log|\zeta_n| + 2k\pi i)$ оператора L_{λ_c} . Если $i\eta_0$ выходит из спектра L_{λ_c} , то собственные значения ζ_i остаются такими, что

$$\operatorname{Re} \zeta_i > \tilde{\xi} > 0 \Rightarrow \log|\zeta_n| < -\tilde{\xi}T_0 < 0.$$

Таким образом, оставшаяся часть спектра оператора $I_{\lambda_c}(T_0)$, отличная от 1, содержится в круге радиуса строго меньше 1. Ввиду непрерывности дискретного спектра то же самое верно для $G_\varepsilon(T, 0)$ при $\varepsilon \in \mathcal{V}(0)$. Другое собственное значение оператора $G_\varepsilon(T, 0)$ или $G_\varepsilon(T, \delta)$ находится из исследования вырожденного оператора

$$\varepsilon^{-1}[E(\varepsilon)G_\varepsilon E(\varepsilon) - E(\varepsilon)] = \tilde{G}(\varepsilon),$$

где $E(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} [\zeta I - G_\varepsilon]^{-1} d\zeta$, Γ — окружность достаточно

малого радиуса с центром в точке 1, а $G_\varepsilon \equiv G_\varepsilon(T(\varepsilon), 0)$. Используя разложение $G_\varepsilon = I_{\lambda_c}(T_0) + \varepsilon G^{(1)} + \varepsilon \tilde{G}(\varepsilon)$, $\tilde{G}(\varepsilon) = o(1)$ и методы теории возмущений, получим $\tilde{G}(\varepsilon) = \varepsilon \tilde{G}^{(1)} + o(\varepsilon)$,

$$\tilde{G}^{(1)} = -T_0 \begin{pmatrix} |a^{(1)}|^2 \gamma_0 & (a^{(1)})^2 \gamma_0 \\ (\bar{a}^{(1)})^2 \gamma_0 & |a^{(1)}|^2 \bar{\gamma}_0 \end{pmatrix}$$

(в базисе $\{U^{(0)}, \overline{U^{(0)}}\}$). Биекция $\sigma \rightarrow \varepsilon^{-1}(\sigma^{-1})$ дает соответствие между собственными значениями $G(\varepsilon)$ и $\tilde{G}(\varepsilon)$. Собственные значения $\tilde{G}^{(1)}$ равны 0 и $-4T_0\gamma_{0,r}|a^{(1)}|^2 = -8\pi\xi^{(1)} \operatorname{sgn} \gamma_{0,r}$. Отсюда следует, что 1 и $1 - 8\pi\xi^{(1)}(\lambda - \lambda_c) + o(\varepsilon^2)$ являются собственными значениями $G_\varepsilon(T, \delta)$.

Теперь мы докажем следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $\gamma_{0,r} > 0$. Тогда после бифуркации $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_c)$. Существует $\mu > 0$ и правый полуинтервал $\mathcal{V}^+(\lambda_c)$, такие, что если $\lambda \in \mathcal{V}^+(\lambda_c)$ и для некоторого $\delta_0 \in [0, T]$ начальное условие U_0 удовлетворяет неравенству

$$\|U_0 - \mathcal{U}(\delta_0, \varepsilon)\| \leq \mu\varepsilon^2 \quad (\varepsilon = \sqrt{\lambda - \lambda_c}),$$

то существует $\delta_1 \in [0, T]$, такое, что $\|U(t) - \mathcal{U}(t + \delta_1, \varepsilon)\| \rightarrow 0$ экспоненциально быстро при $t \rightarrow \infty$, где $U(t)$ — решение (9А.1) с начальным условием $U(0) = U_0$.

Это не очень простой случай, так как существует собственное значение 1. Теорема вытекает из следующей леммы.

Лемма 9. Пусть $V_0 \in V(\delta)$ и удовлетворяет условиям

$$E_\delta V_0 = \mathcal{G}(P_\delta V_0, \varepsilon, \delta) \quad \text{и} \quad \|P_\delta V_0\| \leq \mu_1 \varepsilon^2.$$

Тогда уравнение

$$\frac{\partial V}{\partial t} = A_\varepsilon(t + \delta) V + M(V, V), \quad V(0) = V_0$$

имеет единственное решение, лежащее в $C^0(0, \infty; \mathcal{D}) \cap \cap C^1(0, \infty; H)$ и удовлетворяющее оценке

$$\|V(t)\|_{\mathcal{D}} \leq \mu_2 \varepsilon^2 e^{-(\sigma/2)t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Сначала необходимо пояснить обозначения. Во-первых, E_δ — проектирование на вектор, коллинеарный $\frac{\partial \mathcal{U}(\delta, \varepsilon)}{\partial t}$, а $P_\delta = 1 - E_\delta$.
Далее,

$$\mathcal{G}(P_\delta V_0, \varepsilon, \delta) = E_\delta \hat{\mathcal{B}}_0 \{ \eta_\tau [W_0(P_\delta V_0, \varepsilon, \delta), \varepsilon, \delta], \eta_t[\dots]; \varepsilon, \delta \}.$$

Обозначения в правой части равенства связаны со следующей задачей:

$$V(t) = G_\varepsilon(t, \delta) W_0 + \hat{\mathcal{B}}_t(V, V; \varepsilon, \delta) + \hat{\mathcal{B}}_t(V, V; \varepsilon, \delta).$$

где

$$\hat{\mathcal{B}}_t(U, V; \varepsilon, \delta) = \int_0^t G_\varepsilon(t - \tau, \tau + \delta) P_{\delta + \tau} M[U(\tau), V(\tau)] d\tau,$$

$$\hat{\mathcal{B}}_t(U, V; \varepsilon, \delta) = - \int_t^\infty G_\varepsilon(t - \tau, \tau + \delta) E_{\delta + \tau} M[U(\tau), V(\tau)] d\tau.$$

Здесь W_0 удовлетворяет условию $E_\delta W_0 = 0$, а V ищется в банаховом пространстве $\mathcal{B}_\beta = \{V: t \rightarrow e^{\beta t} V(t) \in C^0(0, \infty; \mathcal{D})\}$ с нормой $|V|_\beta = \sup_{t \in (0, \infty)} \|e^{\beta t} V(t)\|_{\mathcal{D}}$ при $\beta = \frac{\sigma}{2}$.

Можно показать выполнение следующих оценок:

$$|G_\varepsilon(t, \delta) W_0|_\beta \leq M_1 \|W_0\|_{\mathcal{D}},$$

$$|\hat{\mathcal{B}}_t(U, V; \varepsilon, \delta)|_\beta \leq M_2 \gamma \sigma^{-1} |U|_\beta |V|_\beta,$$

$$|\hat{\mathcal{B}}_t(U, V; \varepsilon, \delta)|_\beta \leq M_2 \gamma \sigma^{-1} |U|_\beta |V|_\beta,$$

где γ — верхняя грань для билинейной формы M . Отсюда следует, что существует μ_0 , не зависящее от ε и такое, что для $\|W_0\| \leq \mu_0 \varepsilon^2$ существует единственная функция $V \in \mathcal{B}$, являющаяся решением задачи. Обозначим это решение через $V(t) = \eta_t(W_0, \varepsilon, \delta)$. Тогда $V(0) = \eta_0(W_0, \varepsilon, \delta) = W_0 +$

$+ \check{\mathcal{B}}_0[\eta_t(W_0, \varepsilon, \delta), \eta_\tau(W_0, \varepsilon, \delta); \varepsilon, \delta]$, откуда после разложения получаем

$$E_\delta V_0 = E_\delta \check{\mathcal{B}}_0[\eta_\tau(W_0, \varepsilon, \delta), \eta_\tau(W_0, \varepsilon, \delta); \varepsilon, \delta],$$

$$P_\delta V_0 = W_0 + P_\delta \check{\mathcal{B}}_0[\eta_\tau(W_0, \varepsilon, \delta), \eta_\tau(W_0, \varepsilon, \delta); \varepsilon, \delta].$$

Заметим теперь, что $\frac{\partial}{\partial W_0}[\eta_\tau(W_0, \varepsilon, \delta)]_{W_0=0} = G_\varepsilon(t, \delta)$, поэтому легко найти μ_1 , не зависящее от ε и такое, что при $\|P_\delta V_0\| \leq \leq \mu_1 \varepsilon^2$ второе из вышеприведенных уравнений в силу теоремы и неявной функции разрешимо относительно W_0 , и $W_0 = W_0(P_\delta V_0, \varepsilon, \delta)$ удовлетворяет оценке $\|W_0\|_{\mathcal{D}} \leq \mu_0 \varepsilon^2$. Обозначения здесь вполне понятны. Отсюда дальнейшее доказательство не представляет труда. Единственность следует из единственности решения уравнений (9А.1) на ограниченном интервале при достаточно малом ε . Лемма будет доказана, если показать, что решение нашей задачи совпадает с решением уравнения, указанного в лемме. Но это немедленно следует из оценки производных по t для $\hat{\mathcal{B}}_t[V, V; \varepsilon, \delta]$ и $\check{\mathcal{B}}_t(V, V; \varepsilon, \delta)$ и использования равенства

$$\frac{\partial}{\partial t} G_\varepsilon(t - \tau, \tau + \delta) = A_\varepsilon(\tau + \delta) G_\varepsilon(t - \tau, \tau + \delta).$$

(Нетрудно видеть, что многообразие $V(\delta)$ принадлежит множеству тех V_0 , для которых можно найти W_0 , удовлетворяющее оценке $\|W_0\| \leq \mu_0 \varepsilon^2$, и которые являются решениями уравнений для $P_\delta V_0$ и $E_\delta V_0$.)

Техника Иосса очень близка к технике Юдовича [1—12] (см. также Брушлинская [2, 3]). Эти методы несколько отличаются от методов Хопфа, которые были обобщены на нелинейные уравнения с частными производными Джозефом и Сэттинджером [1].

Тем не менее по духу оба этих метода функционально-аналитические. Подход, используемый в настоящих заметках, более геометричен; на каждом шаге мы руководствуемся геометрической интуицией (инвариантные многообразия, отображения Пуанкаре и т. д.). Подход Иосса, с другой стороны, имеет то преимущество, что результаты получаются в более «конкретном» виде, например $\mathcal{U}(t, \varepsilon)$ дается в виде ряда по ε . Это же имеет место и в методе Хопфа. Однако вычисление условий устойчивости (см. гл. 4А, 5А) не становится легче при использовании этого метода.

В конце хочется отметить, что Иосс [6] получил аналогичные результаты для случая рождения инвариантного тора (см. гл. 6).

Глава 9В

О РАБОТЕ КИРШГАССНЕРА И КИЛЬХЁФФЕРА

О. Руиз

Цель этого раздела — изложить общую идею Киршгасснера и Кильхёффера [1], которую они применяли при решении некоторых задач устойчивости и теории бифуркаций.

Модель Тейлора

Имеются два коаксиальных бесконечных цилиндра радиусов r'_1 и r'_2 ($r'_1 < r'_2$), вращающихся с постоянными угловыми скоростями ω_1 и ω_2 . Между цилиндрами находится несжимаемая вязкая жидкость, которая вследствие вязкости вращается. Если λ — число Рейнольдса, $\lambda = \frac{r'_1 \omega_1 (r'_2 - r'_1)}{\nu}$ (ν — коэффициент кинематической вязкости), то при малых λ мы получаем течение, не зависящее от λ , называемое течением Куэтта. По мере роста λ возникают несколько типов движений жидкости, простейшим из которых является течение, не зависящее от φ и периодическое по z (r, φ, z — цилиндрические координаты). Если мы ограничимся такими течениями и потребуем, чтобы решение v было инвариантно относительно действия группы T_1 , порожденной сдвигами $z \rightarrow z + \frac{2\pi}{\sigma}$ и $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$, $\sigma > 0$, и рассмотрим «основное» течение $V(V_r, V_\varphi, V_z)$, P в цилиндрических координатах (предполагая V и P заданными), то мы можем записать уравнения Навье — Стокса в виде

$$\begin{aligned} (a) \quad D_t u - \tilde{\Delta} u + \lambda L(V) u + \lambda \nabla q &= -\lambda N(u), \\ (б) \quad \nabla \cdot u &= 0, \quad u|_{r=r_1, r_2} = 0, \quad u(Tx, t) = u(x, t), \\ (в) \quad u|_{t=0} &= u^0, \end{aligned} \quad (9В.1)$$

где $v = V + u$, $p = P + q$, $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, 0, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ (градиент)

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (лапласиан), $\tilde{\Delta}_{ik} = (\Delta - (1 - \delta_{i3})/r^2) \delta_{ik}$,

$$L^0_{ik}(V) = -2V_\varphi \delta_{il} \delta_{2k}/r + (V_r \delta_{2k} + V_\varphi \delta_{lk}) \delta_{i2}/r,$$

$$L(V)u = L^0(V)u + (V \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)V,$$

$$Q(u)_i = -u_\varphi^2 \delta_{i1}/r + u_\varphi u_r \delta_{i2}/r,$$

$$N(u) = (u \cdot \nabla)u + Q(u).$$

Модель Бенара

Вязкая жидкость заполняет слой между двумя горизонтальными плоскостями и движется при наличии сил вязкости и плавучести, причем последняя вызывается нагревом нижней плоскости. Если температура верхней плоскости T_1 , а температура нижней T_0 ($T_0 > T_1$), то при малой величине $T_0 - T_1$ жидкость покоится, а распределение температуры по вертикали линейно. Однако когда $T_0 - T_1$ становится больше критического значения, наблюдаются конвективные движения. Пусть α , h , g , ν , ρ , k обозначают соответственно коэффициент объемного расширения, толщину слоя, ускорение силы тяжести, кинематическую вязкость, плотность и коэффициент теплопроводности. Выберем декартовы координаты, в которых ось x_3 направлена противоположно силе тяжести. Обозначим через $\tilde{\theta}$ температуру, а через p — давление. Из уравнений Навье — Стокса для произвольно взятого течения V , T , P получим следующую задачу с начальными данными. Пусть $\omega = (u, \theta)$, $v = V + u$, $p = P + q$, $\tilde{\theta} = T + \theta$, тогда

$$\begin{aligned} (a) \quad & D_t \omega - \tilde{\Delta} \omega + \lambda L(V) \omega + \nabla q = -N(\omega), \\ (б) \quad & \nabla \cdot \omega = 0, \quad \omega|_{x_3=0, 1} = 0, \\ (в) \quad & \omega|_{t=0} = \omega^0, \end{aligned} \tag{9В.2}$$

где $\lambda = \alpha g (T_0 - T_1) h^3 / \nu^2$ (число Рейнольдса или число Грасгоффа),

$$\begin{aligned} \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, 0 \right), \\ \tilde{\Delta}_{ik} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \left(\delta_{ik} + \frac{1}{\text{Pr}} \delta_{i4} \right), \quad \text{Pr} = \frac{k}{\nu}, \\ L_{ik}^0 &= -\delta_{i3} \delta_{k4} - \frac{1}{\text{Pr}} \delta_{i4} \delta_{k3}, \\ L(V) \omega &= L^0 \omega + (V \cdot \nabla) \omega + (u \cdot \nabla) V, \\ N(\omega) &= (u \cdot \nabla) \omega. \end{aligned}$$

Экспериментальные исследования показывают, что конвективные движения образуют регулярную структуру в виде замкнутых ячеек, имеющих форму валов. Поэтому мы рассмотрим класс таких решений, что

$$1) \quad \omega(Tx, t) = \omega(x, t), \quad q(Tx, t) = q(x, t),$$

где $T \in T_1$, а T_1 — группа, порожденная сдвигами:

$$x_1 \rightarrow x_1 + \frac{2\pi}{\alpha}, \quad x_2 \rightarrow x_2 + \frac{2\pi}{\beta}; \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0;$$

2) $u(Tx, t) = Tu(x, t)$, $q(Tx, t) = q(x, t)$, $\theta(Tx, t) = \theta(x, t)$, $T \in T_2$, где T_2 — группа вращений, порожденная операторами

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Можно показать, что все дифференциальные операторы в дифференциальных уравнениях инвариантны относительно T_1 и T_2 . Интересно, что необходимым условием существования нетривиальных решений является равенство $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ и что существует только 6 возможных комбинаций, n, α, β , которые дают различные ячеистые структуры (отсутствие ячеистой структуры, валы, прямоугольники, шестиугольники, квадраты, треугольники).

Функционально-аналитический подход

Аналогия между (9В.1) и (9В.2) в задачах Тейлора и Бенара подсказала авторам работы абстрактную формулировку задачи о бифуркации и устойчивости. В этой части я хочу вкратце описать идею, следуя которой авторы переходят от дифференциальных уравнений (9В.1) и (9В.2) к соответствующим эволюционным уравнениям в некотором гильбертовом пространстве.

Мы можем рассматривать D как открытое подмножество $\mathbb{R}^3$ с границей ∂D , являющейся двумерным многообразием класса C^2 . T_1 будет обозначать группу сдвигов, а Ω — ее фундаментальную область, которую мы будем считать ограниченной. Допустим, что $D = \bigcup_{T \in T_1} T\Omega$. Рассмотрим теперь

следующие множества (cl обозначает замыкание): $C^{T, \infty}(\bar{D}) = \{\omega \mid \omega: \text{cl}(D) \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ бесконечно дифференцируемое в } \text{cl}(D), \omega(Tx) = \omega(x), T \in T_1\}$,

$$C_0^{T, \infty}(D) = \{\omega \mid \omega \in C^{T, \infty}(\bar{D}), \text{ supp } \omega \subset D\}^1),$$

$$C_{0, \infty}^{T, \infty}(D) = \{\omega \mid \omega \in C_0^{T, \infty}(D), \nabla \cdot u(x) = 0, \omega = (u, v), u \in \mathbb{R}^3\}.$$

¹⁾ $\text{supp } \omega$ — носитель ω , т. е. замыкание множества тех $x \in \mathbb{R}^3$, где $\omega(x) \neq 0$. — Прим. перев.

Определим

$$(v, \omega)_m = \sum_{|\gamma| \leq m} (D^\gamma v, D^\gamma \omega), \quad |v|_m = \{(v, v)_m\}^{\frac{1}{2}},$$

где

$$(D^\gamma v, D^\gamma \omega)_2 = \int_{\omega} (D^\gamma v(x) \cdot D^\gamma \omega(x)) dx,$$

а γ — мультииндекс длины 3. При этом получаются следующие гильбертовы пространства:

L_2^T — замыкание пространства $C_0^{T, \infty}(D)$ по норме $|\cdot|_0$,

$\overset{\circ}{J}^T$ — замыкание пространства $C_{0, \sigma}^{T, \infty}(D)$ по норме $|\cdot|_0$,

$\overset{\circ}{H}_{1, \sigma}^T$ — замыкание пространства $C_{0, \sigma}^{T, \infty}(D)$ по норме $|\cdot|_1$,

H_m^T — замыкание пространства $C^{T, \infty}(\bar{D})$ по норме $|\cdot|_m$.

Для задачи Тейлора $n=3$, $D = (r_1, r_2) \times [0, 2\pi)$, $\Omega = (r_1, r_2) \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi/\sigma)$, а для задачи Бенара $n=4$, $D = \mathbb{R}^2 \times (0, 1)$, $\mathbb{R}$ — действительные числа, $\Omega = [0, 2\pi/\alpha) \times [0, 2\pi/\beta) \times (0, 1)$. Мы можем считать, что операторы в дифференциальных уравнениях (9В.1) или (9В.2) действуют в L_2^T .

В силу леммы Вейля L_2^T можно представить в виде $L_2^T = \overset{\circ}{J}^T \oplus G^T$, где G^T содержит множества вида ∇q , для которых $q \in H_1^T$. Используя ортогональную проекцию $P: L_2^T \rightarrow \overset{\circ}{J}^T$, перейдем от дифференциального уравнения $D_t \omega - \Delta \omega + \lambda L(V) \omega + \lambda \nabla q = -\lambda N(\omega)$ с дополнительным условием периодичности и граничными условиями к дифференциальному уравнению на $\overset{\circ}{J}^T$. Если мы выберем $q \in H_1^T$, то $P \nabla q \equiv 0$, а так как для решений на $\overset{\circ}{J}^T$, как мы видели, $Pu = u$, то можно записать новое уравнение на $\overset{\circ}{J}^T$ как

$$\frac{d\omega}{dt} + P\Delta \omega + \lambda PL(V) \omega = -\lambda PN(\omega) \quad (9В.3)$$

с начальным условием $\omega|_{t=0} = \omega^0$.

Авторы работы записывают (9В.3) в виде

$$\frac{d\omega}{dt} + \tilde{A}(\lambda) \omega + h(\lambda) R(\omega) = 0, \quad \omega|_{t=0} = \omega^0,$$

где $\tilde{A}(\lambda) = P\Delta + \lambda PL(V)$, $R(\omega) = PN(\omega)$, а $h(\lambda) = \lambda$ для задачи Тейлора и $h(\lambda) = 1$ для задачи Бенара. Используя ре-

зультаты Като — Фуджиты, они показывают, что можно определить дробные степени оператора $\tilde{A}(\lambda)$:

$$\tilde{A}(\lambda)^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\infty} \exp[-\tilde{A}(\lambda)t] t^{\beta-1} dt, \quad \beta > 0,$$

причем этот оператор обратим. Этот факт полезен при решении некоторых бифуркационных задач в стационарном случае. Если $A = P\tilde{A}$, $M(V) = PL(V)$, то стационарное уравнение, получаемое из уравнения (9B.3), таково:

$$(SP) \quad A\omega + \lambda M(V)\omega + h(\lambda)R(\omega) = 0,$$

где V — любое известное стационарное решение, V принадлежит области определения A .

Сделаем замену $A^{3/4}\omega = v$ и обозначим

$$K(V) = A^{-1/4}M(V)A^{-3/4}, \quad T(v) = A^{-1/4}R(A^{-3/4}v).$$

Тогда можно записать уравнение (SP) в виде

$$v + \lambda K(V)v + h(\lambda)T(v) = 0.$$

Пользуясь теоремой Красносельского, можно доказать следующую теорему:

Теорема 4.1. Пусть $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $\lambda_j \neq 0$ и $(-\lambda_j)^{-1}$ — нечетнократное собственное значение оператора K . Тогда

(1) в каждой окрестности точки $(\lambda_j, 0)$ в $\mathbb{R} \times J^T$ существует точка (λ, ω) , $0 \neq \omega \in D(A)$, такая, что ω является решением стационарного уравнения (SP);

(2) если $(-\lambda_j)^{-1}$ — простое собственное значение, то существует единственная кривая $(\lambda(\alpha), \omega(\alpha))$, такая, что $\omega(\alpha) \neq 0$ при $\alpha \neq 0$, и является решением уравнения (SP), причем $(\lambda(0), \omega(0)) = (\lambda_j, 0)$.

Если теперь мы предположим, что $V \in C(\bar{\Omega})$, а ∂D является C^∞ -многообразием (это выполняется для задач Тейлора и Бенара), и рассмотрим решения (SP) в пространстве $H_{m+2} \cap H_{1,\sigma}$, $m > 3/2$, то уравнение (SP) можно записать в виде

$$(SP') \quad A_m\omega + \lambda M\omega + h(\lambda)R(\omega) = 0,$$

где A_m — оператор, область определения которого $D(A_m) = H_{m+2} \cap H_{1,\sigma} \subset PH_m$, $A_m(\omega) = A\omega$, $\omega \in D(A)$. Если в дополнение к этому мы рассмотрим в равенстве $R(\omega) = PN(\omega)$ в качестве $N(\omega)$ произвольный полиномиальный оператор от

операторов дифференцирования до второго порядка и положим $K_m = MA_m^{-1}$, то мы можем получить следующую теорему:

Теорема 4.2. Пусть $V \in C(\bar{D})$ и ∂D — C^∞ -многообразие. Предположим, что существуют постоянные C_1, C_2 , такие, что

$$|M\omega|_{m+1} \leq C_1 |\omega|_{m+2}, \quad |MA_m^{-1}\omega|_{m+1} \leq C_2 |\omega|_m.$$

Тогда для каждого нечетнократного собственного значения $(-\lambda_j)^{-1}$ оператора K_m , $\lambda_j \neq 0$, точка $(\lambda_j, 0)$ является точкой бифуркации уравнения (S') . Решение ω принадлежит $C(\bar{D})$ и удовлетворяет граничному условию $\omega|_{\partial D} = 0$.

Эта теорема показывает, что для ответвляющихся решений можно получить сильную регулярность. Отметим также, что теоремы 4.1 и 4.2 сводят вопрос существования решений уравнения (SP) к изучению спектра операторов K или K_m .

Применим теперь эти теоремы к задачам Тейлора и Бенара.

Задача Тейлора. Выберем здесь $K = A^{-1/4}M(v^0)A^{-3/4}$, где v^0 — решение Куэтта. В цилиндрических координатах это решение есть $v^0(0, v_\phi^0, 0)$, где $v_\phi^0 = ar + \frac{b}{r}$,

$$a = \frac{1}{r_1\omega_1} \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad b = \frac{1}{r_1\omega_1} \frac{(\omega_1 - \omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Для $a \geq 0$, $v_\phi^0 \geq 0$ Синг показал, что течение Куэтта локально устойчиво. Для $a < 0$, $v_\phi^0(r) > 0$ Вельте и Юдович для оператора K доказали следующую теорему:

Теорема 4.3. Пусть $a < 0$, $v_\phi^0(r) > 0$ при $r \in (r_1, r_2)$, T_1 — группа сдвигов, порожденная отображениями $z \rightarrow z + 2\pi/\sigma$, $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$, $\sigma > 0$. Тогда для всех $\sigma > 0$, за исключением не более чем счетного множества положительных чисел, существует счетное множество действительных простых собственных значений $(-\lambda_i)^{-1}$ оператора K . Каждая точка $(\lambda_i, 0) \in \mathbb{R} \times D(A)$ для стационарной задачи является точкой бифуркации, в которой появляется в точности одно нетривиальное решение $(\lambda(\alpha), \omega(\alpha))$. Эти решения являются вихрями Тейлора¹⁾.

Экспериментальные данные свидетельствуют, что все решения, ветвящиеся из точки $(\lambda_i, 0)$, при $\lambda_i \neq \lambda_1$ неустойчивы, однако доказательство этого утверждения неизвестно.

¹⁾ Вихрю Тейлора соответствует первая точка бифуркации $(\lambda_1, 0)$. — Прим. перев.

Задача Бенара. Если $\lambda = \alpha g (T_0 - T_1) h^3 / \nu^2$, $\sigma = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$, α, β как на стр. 247, то, как известно, существует некоторое $\lambda_1(\sigma)$, такое, что при $\lambda \in [0, \lambda_1]$ $\omega = 0$ является единственным решением стационарной задачи. Бифуркационная картина здесь определяется спектром оператора $K = A^{-1/4} M(v^0) A^{-3/4}$, где v^0 в декартовых координатах задается выражением

$$v^0 = 0, \quad P(x_3) = -\frac{gh^3}{\nu^2} (x_3 + \alpha(T_0 - T_1)), \quad \theta_0(x_3) = -x_3.$$

Чтобы сделать собственные значения простыми, В. И. Юдович вводит четные решения $u(-x) = (-u_1(x), -u_2(x), u_3(x))$, $\theta(-x) = \theta(x)$, $q(-x) = -q(x)$, и доказывает в работах «О возникновении конвекции» (Юдович [6]) и «Свободная конвекция и ветвление» (ПММ, 1967, т. 31, вып. 1) следующую теорему:

Теорема 4.6. (1) В задаче Бенара для почти всех α и β существует счетное множество простых положительных характеристических чисел λ_i . Точки $(\lambda_i, 0) \in \mathbb{R} \times D(A)$ являются точками бифуркации.

(2) Если n, α, β выбраны в соответствии с замечанием на стр. 247, то ветвям, выходящим из точки $(\lambda_i, 0)$, соответствуют: дважды периодические ячейки, валы, шестиугольные, прямоугольные и треугольные ячейки.

(3) Если λ_1 обозначает наименьшее характеристическое число, то нетривиальное решение появляется справа от λ_1 (по λ) и с помощью замены параметра его можно записать в виде $\omega(\lambda) = \pm (\lambda - \lambda_1)^{1/2} F(\lambda)$, где $F: R \rightarrow D(A)$ голоморфная по $(\lambda - \lambda_1)^{1/2}$ функция.

Интересно отметить следующий факт: поскольку характеристические числа определяются только значением σ , то мы можем рассматривать различные α, β с одним и тем же σ и получать решения любой возможной пространственной структуры, появляющиеся в точке бифуркации.

Устойчивость

Я хочу дать краткий обзор основных результатов, относящихся к этой теме. Известно, что основное решение теряет устойчивость при некотором $\lambda_c \in (0, \lambda_1]$, λ_1 определено в предыдущем разделе. В предположении, что $\lambda_c = \lambda_1$ и λ_1 — простое, рождающееся нетривиальное решение устойчиво при $\lambda > \lambda_1$ и неустойчиво при $\lambda < \lambda_1$. Этот результат можно получить, используя степень Лере — Шаудера или аналитические методы теории возмущений.

Более точно, если мы выберем $V = v_0 + \omega^+$, где ω^+ — стационарное решение (SP), то V называется устойчивым, если

для оператора $\tilde{A}(\lambda) = A + \lambda M(V)$ решение $\omega = 0$ устойчиво относительно строгих решений из $D(A^\beta)$, $3/4 < \beta < 1$ (строгие решения понимаются в смысле статьи Като и Фуджиты); V называется *неустойчивым*, если оно не является устойчивым в J^T .

Рассмотрим случай, когда ветвь нетривиального решения $(\lambda(\alpha), V(\alpha))$ в $\mathbb{R} \times J^T$ при $|\alpha| \leq 1$, $(\lambda(0), V(0)) = (\lambda_1, v_0)$ может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\alpha(\lambda) &= \pm c_1 |\lambda - \lambda_1|^{1/r}, \\ V(\lambda) &= v_0 + |\lambda - \lambda_1|^{1/r} F(\lambda),\end{aligned}\quad r \in N,$$

где $F: R \rightarrow D(A)$ аналитично относительно $(\lambda - \lambda_1)^{1/r}$ и $F(\lambda_1) \neq 0$ (эти условия выполнены для задач Бенара и Тейлора в силу теоремы 4.6 и следствия 4.4). Тогда имеет место следующее утверждение (лемма 5.6 рассматриваемой работы).

Лемма 5.6. *Допустим, что $\lambda_c = \lambda_1$ и $\operatorname{Re} \mu \geq \alpha > 0$ для всех ненулевых μ из спектра $\sigma(\tilde{A}(\lambda_1, v_0))$. Пусть λ_1 — простое характеристическое значение оператора $K(v_0)$, а 0 — простое собственное значение оператора $\tilde{A}(\lambda_1, v_0)$.*

Тогда существует окрестность λ_1 , такая, что для λ , лежащих в этой окрестности,

- (1) v_0 устойчиво при $\lambda < \lambda_1$ и неустойчиво при $\lambda > \lambda_1$;
- (2) $V(\lambda)$ устойчиво при $\lambda > \lambda_1$ и неустойчиво при $\lambda < \lambda_1$.

Для задачи Бенара условия леммы 5.6 выполняются при фиксированных n, α, β : λ_1 — простое характеристическое значение $K(v_0)$ по теореме 4.6, а условие $\lambda_c = \lambda_1$ следует из леммы 4.5 рассматриваемой работы.

Для задачи Тейлора известна только простота характеристического значения λ_1 оператора $K(v_0)$. Простота же $\mu = 0$ в $\sigma(\tilde{A}(\lambda_1, v_0))$ является открытой проблемой.

Тем не менее можно получить следующую теорему:

Теорема 5.7. (1) *Для задачи Бенара каждое решение с заданной формой ячейки (фиксированные h, α, β) существует в некоторой правой полуокрестности точки λ_1 и асимптотически устойчиво в $D(A^\beta)$, $\beta \in (3/4, 1)$. Основное решение v_0 асимптотически устойчиво при $\lambda < \lambda_1$ и неустойчиво при $\lambda > \lambda_1$.*

(2) *Для задачи Тейлора предположим, что условия леммы 5.6 на спектр $\tilde{A}(\lambda_1, v_0)$ выполняются. Тогда для каждого периода (σ фиксировано) решение $V(\lambda)$, если оно сущест-*

вует, асимптотически устойчиво при $\lambda > \lambda_1$ и неустойчиво при $\lambda < \lambda_1$.

Наконец, заметим, что эти результаты можно также получить, используя технику инвариантного многообразия (см., например, упр. 4.3). Возможность этого уже отмечалась Рюэлем и Такенсом [1] в их элегантном и простом доказательстве теоремы Вельте.

Укажем также, что основные результаты Проди, касающиеся спектральных свойств и устойчивости уравнений Навье — Стокса, следуют из свойств гладкости потока (гл. 9) и результатов гл. 2А.

БИФУРКАЦИИ В МОДЕЛЯХ ПОПУЛЯЦИЙ

Г. Остер и Дж. Гукенхеймер

1. Введение: роль бифуркаций в моделях популяций

Биологические системы, как правило, значительно сложнее, чем те, которые изучаются в физике или химии. При анализе моделей чаще всего приходится выбирать одну из двух возможностей: либо целиком полагаться на грубую силу компьютера, либо упрощать модель до такой степени, что она становится биологически неинтересной. Ни одна из этих возможностей не является привлекательной. В самом деле, первая из них едва ли окажется пригодной для большинства ситуаций в экологии, так как здесь имеющихся в распоряжении данных редко бывает достаточно для количественной проверки модели. Это резко контрастирует с ситуацией в физических науках, где часто даже небольшие различия распознаются конкурирующими теориями. Положение таково, что многие экологи серьезно ставят вопрос: может ли математика вообще играть какую-либо полезную роль в биологии? Некоторые утверждают, что пока еще нет ни одного фундаментального достижения в биологии, которое было получено с помощью математической теории¹⁾. При описании сложных систем, утверждают они, английский язык лучше математического. Типичная позиция биологов такова: модели полезны только тогда, когда они объясняют что-то непонятное или подсказывают новые эксперименты. Такие модели получить трудно.

Сталкиваясь с подобной позицией, те математики, которые знают биологию поверхностно, должны, вероятно, ставить себе более скромные цели. Вместо того чтобы представлять биологической общественности исчерпывающий анализ интересной модели, им следовало бы сосредоточить усилия на «умеренном» анализе содержательных моделей. С этой точки зрения, роль математики в рассматриваемой области — руководить интуицией в постижении того, что собой представляет природа, а не в получении доказательств. Это, конечно, не

¹⁾ Исключая, возможно, закон Харди — Вайнберга, который математически тривиален.

может служить оправданием уклонения от строгого анализа там, где он может быть сделан, но когда модели более точно отображают природу, доказывать теоремы становится труднее.

Следуя этой идее, мы обсудим несколько примеров, в которых при экологическом моделировании оказались полезными некоторые понятия теории бифуркаций. Мы вкратце рассмотрим бифуркационные явления в трех типах моделей: 1) популяции с дискретными поколениями, моделируемые при помощи разностных уравнений; 2) непрерывно размножающиеся популяции, моделируемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, и 3) популяции с возрастной структурой, что требует применения уравнений с частными производными или функционально-дифференциальных уравнений. Эти типы моделей представляют собой три последовательные стадии все более точного отображения биологической реальности, но одновременно и возрастания математических трудностей. Таким образом, мы будем переходить от менее реалистичных моделей, стоящих на твердом математическом фундаменте, к более реалистичным моделям, основанным на математической интуиции. В любом случае, однако, польза теории бифуркации намного превышает наши возможности цитировать соответствующие теоремы. Давая качественное объяснение, этот подход создает понятийную основу, в рамках которой мы можем рассмотреть ряд важных экологических процессов.

2. Популяции с дискретными поколениями

(2.1) Рассмотрим популяцию насекомых, которая размножается раз в году. График общего количества особей как функция времени может иметь вид, показанный на рис. 10.1а.

Если мы интересуемся только максимальным, или только общим, или только усредненным числом особей в году, то мы можем приближенно смоделировать процесс разностным уравнением, как показано на рис. 10.1б, т. е. уравнением вида

$$N_{t+1} = F(N_t). \quad (2.1)$$

Модели этого типа обычно используются в энтомологии (Хассел и Мэй [1], Вали, Грэдуэлл и Хассел [1]). Функция $F(\cdot)$ обычно имеет вид, изображенный на рис. 10.2. Причина этого состоит в том, что вместе с ростом плотности популяции растут «эффекты переуплотнения», такие, как конкуренция за пищу, рост смертности и снижение рождаемости.

Обычно при моделировании популяций насекомых используют следующие типы функциональных зависимостей:

$$N_{t+1} = N_t e^{r(1-N_t/K)}, \quad (2.2a)$$

$$N_{t+1} = N_t \frac{\lambda}{(1 + N_t)^b}, \quad (2.2б)$$

$$N_{t+1} = \frac{N_t}{1 + e^{-a(1-N_t/K)}}, \quad (2.2в)$$

$$N_{t+1} = \begin{cases} \lambda N_t, & N_t < 1 \\ \lambda N_t^{1-b}, & N_t > 1. \end{cases} \quad (2.2г)$$

В каждой из этих моделей начало координат — неподвижная точка, и все они имеют характерную форму «горба», как на

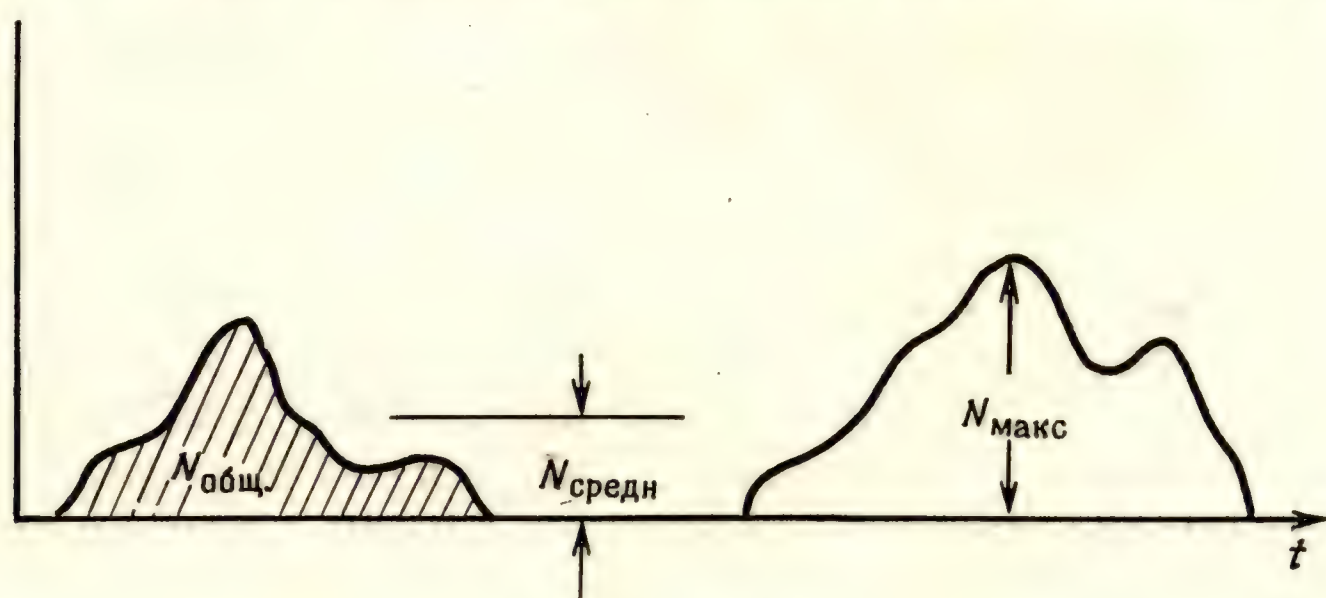


Рис 10.1а.

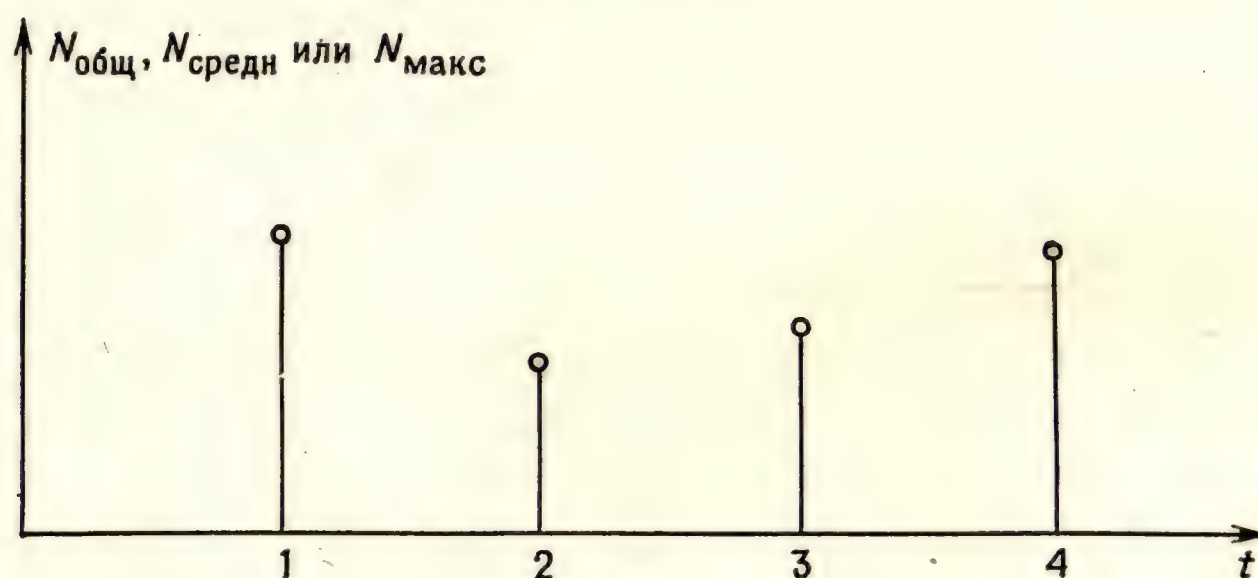


Рис. 10.1б.

рис. 10.2, т. е. одну критическую точку, расположенную между нулем и другой неподвижной точкой с положительной координатой. В остальном, однако, эти зависимости в значительной степени эмпирические, получаемые для каждого данного случая регрессией по двум последовательным поко-

лениям ¹⁾. Однако такие незатейливые модели оказываются неожиданно эффективными при воспроизведении изменений численности популяции от поколения к поколению (Ауслендер, Остер, Хаффекер [1]; Вали и др., цитир. выше).

(2.2) Приходит или нет популяция, моделируемая любым из уравнений (2.2), к неизменному от поколения к поколению уровню численности, определяется устойчивостью неподвижной точки $F(N) = N$, $N > 0$ и, возможно, начальными

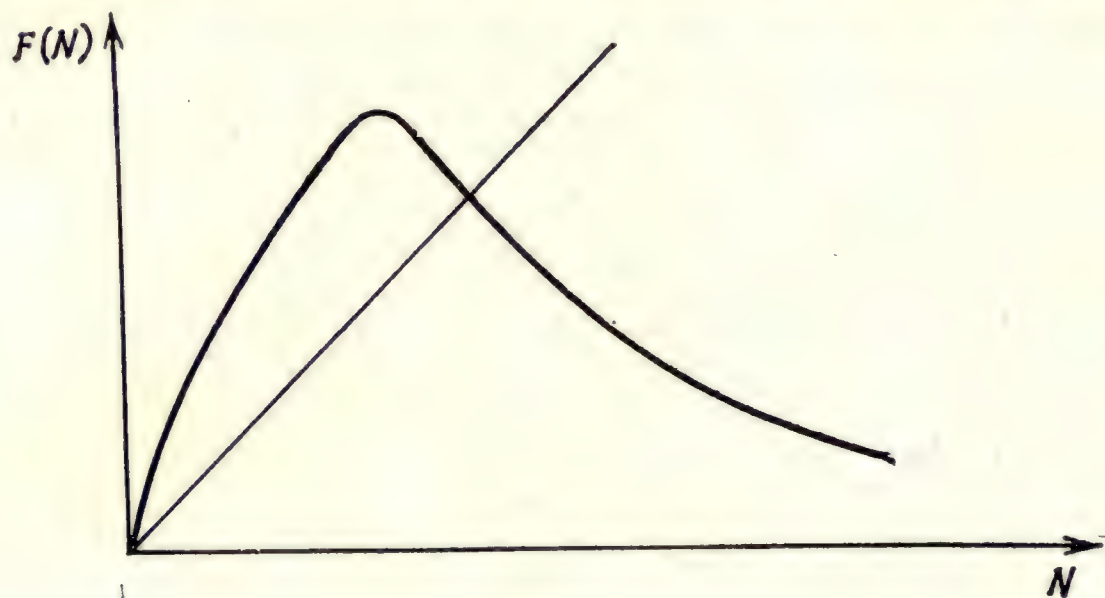


Рис. 10.2.

условиями. А это в свою очередь определяется конкретными значениями параметров, таких, как r в (2.2а). В качестве характерного примера мы обсудим систему (2.2а). Собственное значение отображения $F(\cdot)$ в неподвижной точке $\bar{N} = K$ равно $\lambda(r) = F'(\bar{N}) = 1 - r$. Когда скорость размножения становится больше 2, $\lambda(r)$ проходит через единичную окружность, и $\bar{N}$ перестает быть аттрактором. Однако если F имеет критическую точку, как мы предполагали для моделей (2.2), то композиция F с самим собой будет иметь по меньшей мере 3 критические точки, и мы можем найти неподвижные точки периода 2:

$$F^2(\bar{N}_2) \equiv F \circ F(\bar{N}_2) = \bar{N}_2, \quad (2.3)$$

¹⁾ Заметим, что при $r \ll 1$ уравнение (2.2а) сводится к

$$N_{t+1} - N_t = rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right), \quad (2.2a^*)$$

которое как раз является разностным уравнением, соответствующим известному логистическому уравнению роста популяции $\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$.

Таким образом, параметр r в (2.2) можно интерпретировать как относительный прирост от поколения к поколению при отсутствии насыщения. Хотя в уравнении (2.2а) возможны бифуркации, в уравнении (2.2а*) их нет (например, при больших r (2.2а) имеет критическую точку, поэтому оно не может быть каким-либо вариантом (2.2а*) для конечных r).

а собственные значения F^2 в этих точках равны

$$\lambda_2(r) = DF^2(\bar{N}_2). \quad (2.4)$$

Устойчивость пары точек периода 2, которые отщепляются от исходной неподвижной точки, когда r проходит значение 2, определяется собственными значениями $\lambda_2(r)$. Устойчивые вначале, эти периодические точки бифурцируют при $|\lambda_2(r)| \geq 1$. В этом случае природа бифуркации зависит от того, равно ли $\lambda_2(r)$ 1 или -1 . При $\lambda < -1$ каждая точка периода 2 бифурцирует в пару устойчивых точек периода 4. При

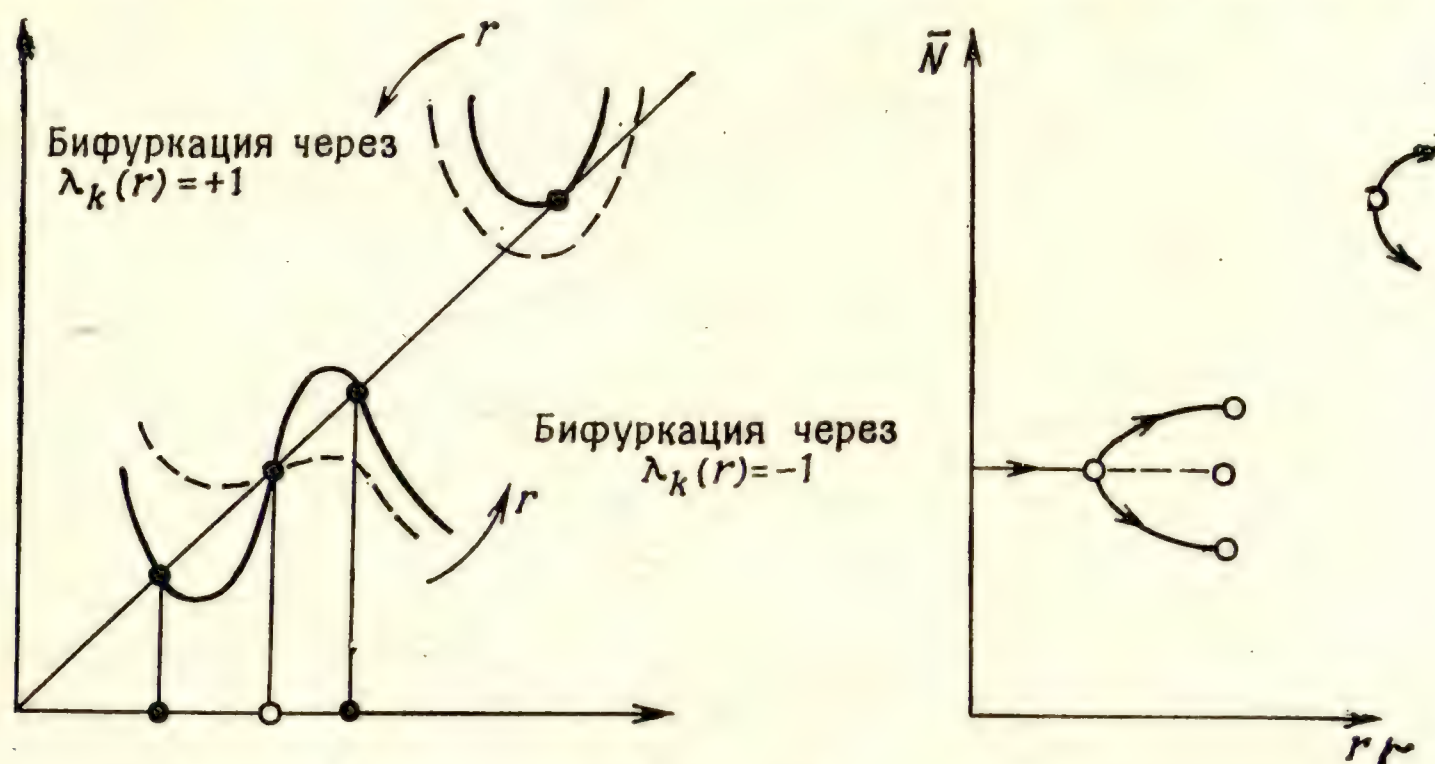


Рис. 10.3.

возрастании r этот процесс продолжается: бифуркация через $\lambda_k(r) = -1$ дает пару устойчивых точек периода $2k$, в то время как при бифуркации через $\lambda_k(r) = +1$ рождаются или исчезают периодические точки (см. рис. 10.3).

Орбита отображения $F(\cdot)$ с каждой бифуркацией становится все сложнее — первоначально устойчивая неподвижная точка расщепляется на точки все больших периодов. Этот процесс может продолжаться бесконечно, причем значения параметра, при которых происходят бифуркации, могут накапливаться. При r , больших 2, происходит рождение периодических орбит со все большим периодом, и может существовать предельная точка r_c , за которой возникают полностью апериодические движения, т. е. орбиты, не стремящиеся асимптотически к периодическим орбитам. Достаточные условия существования таких апериодических орбит были даны Ли и Йорком [1]¹⁾. Если отображение $F(\cdot)$ складывает некоторый интервал, как показано на рис. 10.4а, то существуют

¹⁾ Гораздо раньше это было сделано Шарковским [1]. — Прим. перев.

апериодические точки (т. е. начальные условия, не лежащие в области притяжения никакой устойчивой периодической точки). С другой стороны, если популяция имеет «трехгодичный цикл», т. е. ее численность 2 года подряд увеличивается, а затем падает ниже исходного уровня, то возникает непериодическое движение (рис. 10.4б).

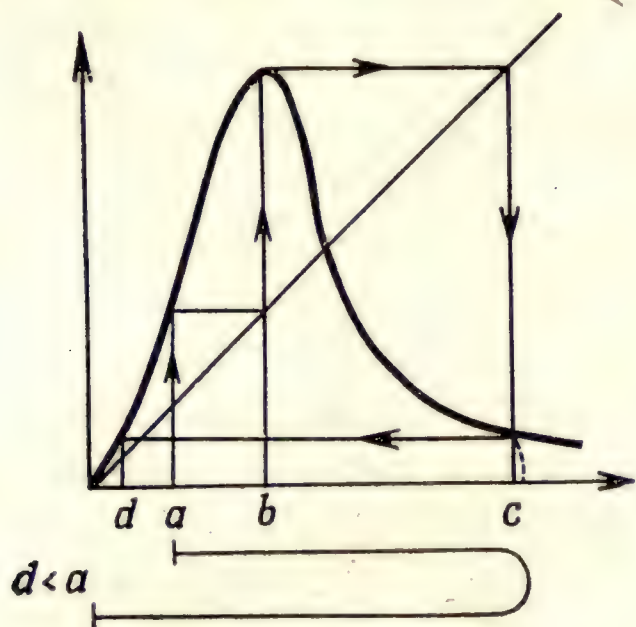


Рис. 10.4а.

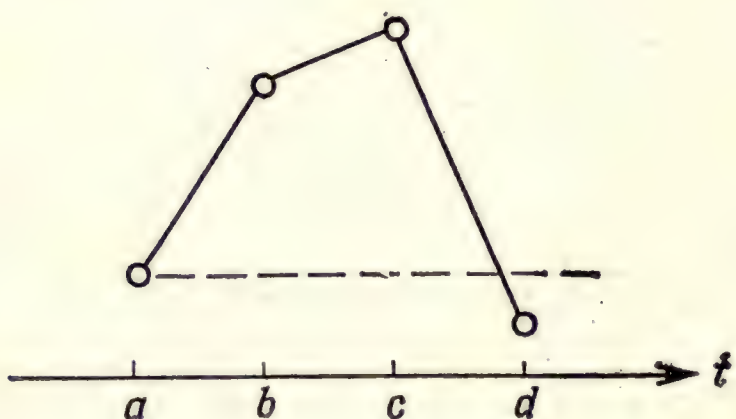


Рис. 10.4б.

Это явление имеет глубокие следствия для экологического моделирования. Мы можем доверять модели только в том случае, когда она подвергнута экспериментальной проверке. Если для некоторой популяции имеются ежегодные данные относительно ее численности и они показывают хаотичность, отсутствие всякой регулярности, то можно заключить одно из трех: (а) система по-настоящему случайна — преобладают случайные воздействия; (б) экспериментальные ошибки столь велики, что затемняют всю регулярность; (в) всем управляет очень простой детерминированный механизм, но он скрыт вышеописанным явлением. Крайний случай этого явления показан на рис. 10.5, где орбиты простого отображения не отличаются от порожденных последовательностью испытаний Бернулли. Для системы из двух связанных популяций (например, хищник — жертва, паразит — хозяин и т. д.) ситуация еще более деликатная, и здесь мало что известно относительно ее перехода к апериодическому поведению. Тем не менее Мэй [2], численно моделируя некоторую систему разностных уравнений, описывающую две взаимодействую-

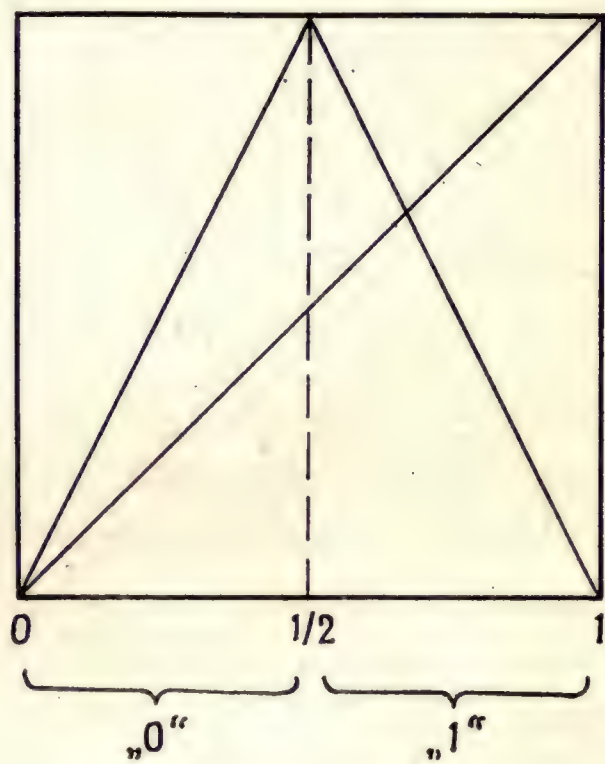


Рис. 10.5.

щие популяции, обнаружил, что траектории такой системы проявляют хаотическое поведение при вполне разумных значениях параметров.

3. Популяции с перекрывающимися поколениями

(3.1) Если популяция размножается непрерывно, так что поколения перекрываются, то подходящей моделью будет обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dN}{dt} = Nf(N) = N [(\text{рождаемость}) - (\text{смертность})]. \quad (3.1)$$

Подобных моделей в литературе можно найти великое множество, и мы только кратко прокомментируем некоторые аспекты их поведения, имеющие отношение к бифуркациям.

(3.2) Постоянно обсуждаемая тема в экологии — это явление колебаний численности популяций. Прототипом таких моделей были уравнения системы «хищник — жертва» Вольтерры и Лотки (см., например, Мэй [1]¹⁾):

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= N_1 f_1(N_1, N_2) = N_1 [c_1 - c_2 N_2], \\ \dot{N}_2 &= N_2 f_2(N_1, N_2) = N_2 [-c_3 + c_4 N_1]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решения уравнений (3.2) действительно периодические (Хирш и Смейл [1]), однако они нейтрально устойчивы²⁾, амплитуда колебаний зависит от начальных условий.

Недавно Мэй [1, 2] показал, что, в сущности, все модели систем типа «хищник — жертва» имеют или устойчивое состояние равновесия, или устойчивый предельный цикл (в первом квадранте). В основе его доказательства лежит установление того факта, что большинство моделей попадает под действие теоремы Колмогорова [1], которая по существу является применением теоремы Пуанкаре — Бендиксона к системам вида (3.1). В сущности, любая популяционная модель, для которой в первом квадранте существует единственная неустойчивая особая точка и оси инвариантны (например, $\dot{N} = Nf(N)$), имеет предельный цикл, так как для достаточно больших радиусов орбиты должны быть направлены внутрь в силу конечных размеров популяции — условие, которое всегда должно присутствовать в реалистичной модели.

¹⁾ См. также Вольтерра [1], Свирежев и Логофет [1]. — *Прим. перев.*

²⁾ Это впервые было доказано Баутиным [2] для более общей системы, полное качественное исследование которой на всей плоскости было выполнено Серебряковой [1]. — *Прим. перев.*

Типичная система «хищник — жертва», имеющая предельный цикл, такова (Розенцвейг [1], Мэй [1]):

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= N_1[r(1 - N_1/K)] - kN_2(1 - e^{-cN_1}), \\ \dot{N}_2 &= N_2[-b + \beta(1 - e^{-fN_1})].\end{aligned}\quad (3.3)$$

Система интерпретируется так: число жертв N_1 в отсутствие хищников растет по логистическому закону¹⁾, а хищники в отсутствие жертв экспоненциально вымирают. Второй член

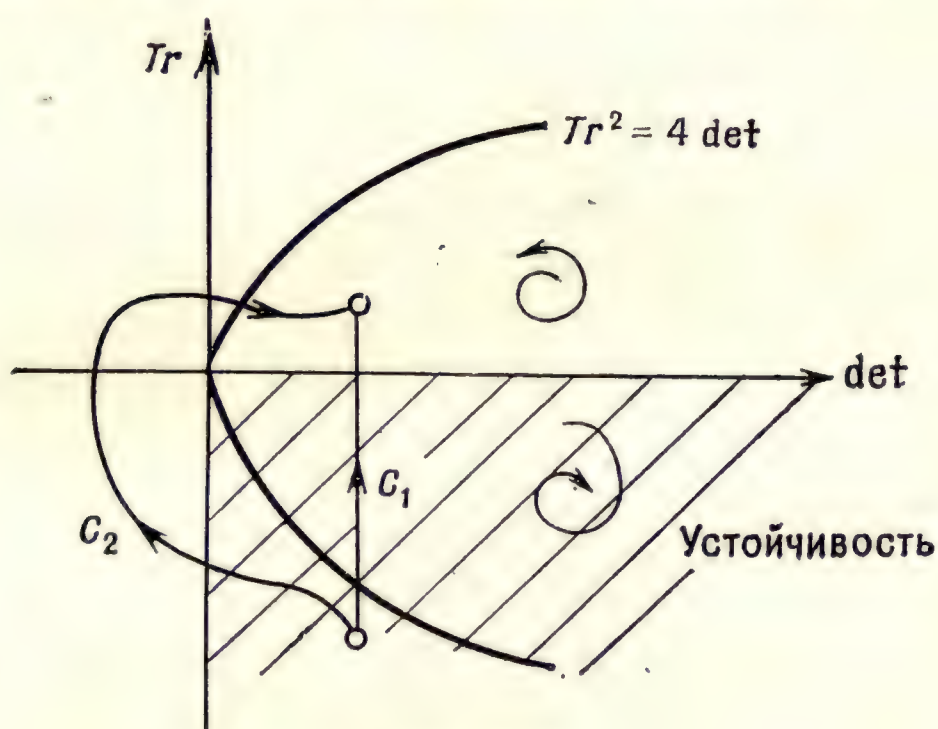


Рис. 10.6.

в первом уравнении моделирует популяцию хищников, у которой способность к поимке жертвы постепенно насыщается.

Состояние равновесия уравнений (3.3) можно вычислить в явном виде:

$$\begin{aligned}\bar{N}_1 &= \ln \left(1 + \frac{b}{\beta} \right)^{-1/f}, \\ \bar{N}_2 &= r\bar{N}_1 \left(1 - \frac{\bar{N}_1}{K} \right) / k \left[1 - \left(1 + \frac{b}{\beta} \right)^{c/f} \right].\end{aligned}$$

Вычисляя тогда якобиан в состоянии равновесия, нетрудно проверить, что знаки детерминанта и следа зависят от параметров $\{r, K, k, c, b, \beta, f\} \equiv \pi$. Таким образом, существует семейство кривых, параметризованных некоторой комбинацией параметров, входящих в π , вдоль которых собственные значения переходят в правую полуплоскость (рис. 10.6). Так как при большой величине радиуса орбиты направлены внутрь, то появление предельных циклов действительно обусловлено механизмом бифуркации рождения цикла. Отметим также, что собственные значения зависят от нескольких

¹⁾ См. Вольтерра [1], Свирежев и Логофет [1]. — Прим. перев.

параметров, поэтому может возникнуть предельный цикл конечной, а не только нулевой амплитуды.

(3.3) Уравнения типа «хищник — жертва» использовались Беллом [1] для моделирования «популяции» антител и антигенов в иммунном ответе. Используя принадлежащий Фридрихсу [1] вариант бифуркационной теоремы, Пимбли [1] показал, что уравнения Белла имеют периодическое решение, которое можно интерпретировать биологически в терминах механизма подавления инфекций.

(3.4) Для систем, состоящих из трех и более видов, возможность бифуркаций более высокого порядка ставит те же проблемы, с которыми мы уже сталкивались для разностных моделей. После первой бифуркации могут последовательно происходить другие бифуркации, если собственные значения отображения Пуанкаре выходят из единичной окружности (Хирш и Смейл [1]), и тогда более высокие периоды (и апериодическое поведение) такого разностного уравнения приведут к регистрации совершенно хаотического поведения численностей популяций. Это явление очень хорошо известно в гамильтоновых системах (Арнольд и Аве [1]). Обычно получить надежную экспериментальную регистрацию численности видов намного сложнее, поэтому существование таких «странных аттракторов» может означать экспериментальную непроверяемость модели.

Таким образом, мы обнаружили, что бифуркации в модельных уравнениях объясняют одни явления и затемняют другие.

4. Популяции с возрастной структурой

(4.1) Используя для моделей обыкновенные дифференциальные или разностные уравнения, мы придерживались наивной точки зрения на популяционную динамику, считая, что состояние популяции определяется только ее общей численностью. Минутное размышление немедленно обнаруживает, что для предсказания роста популяции следует учитывать такие внутренние переменные, как распределения по возрасту и размеру. Например, тысяча особей, принадлежащих к одному полу или вышедших из репродуктивного возраста, очевидно, не является жизнеспособной популяцией. В этом разделе мы проиллюстрируем некоторые из следствий, получающихся при использовании возрастной структуры популяции в качестве переменной, описывающей ее состояние.

(4.2) Уравнения динамики популяции с возрастной структурой записать нетрудно. Пусть $n(a, t)$ — функция плотности

распределения популяции по возрасту, т. е. $N(t) = \int_0^{\infty} n(a, t) da$ — общая численность популяции. Тогда уравнение баланса для n имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} J_n = \{\text{потери из-за смертности}\}. \quad (4.1)$$

Так как плотность потока особей, достигающих некоторого возраста (или же покидающих его), т. е. J_n , равна $v \cdot n$, где $v = \frac{da}{dt} = 1$, то можно записать

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial a} = -\mu n, \quad (4.2)$$

где $\mu(a, t, \cdot)$ — смертность, зависящая от возраста. Характерной особенностью уравнения являются граничные условия, задаваемые рождаемостью

$$n(0, t) = \int_0^{\infty} b(a, t, \cdot) n(a, t) da, \quad (4.3)$$

где $b(a, t, \cdot)$ — рождаемость, зависящая от возраста. Как мы уже указывали, рождаемость и смертность являются функциями также и других переменных. Например, плотность популяции часто влияет на смертность и плодовитость, поэтому

$$\mu = \mu(a, t, N), \quad (4.4a)$$

$$b = b(a, t, N), \quad (4.4b)$$

где

$$N = \int_0^{\infty} n(a, t, N) da \quad (4.4b)$$

есть общая численность популяции. При соответствующих предположениях гладкости и ограниченности Гэтин и Мак-Кэми [1] доказали теорему существования и единственности для системы (4.2) — (4.4). Отметим, что в технике возрастные уравнения называют «системой с распределенными параметрами и положительной обратной связью». Из них легко следует, что, когда рождаемость растет и (или) смертность уменьшается, система переходит от устойчивого к неустойчивому режиму. В следующем разделе мы рассмотрим бифуркационные явления в одновидовой популяции, питающейся единственным кормом. Затем мы смоделируем систему паразит — хозяин, рассматривая совместно две популяции с воз-

растной структурой. В обоих случаях существование бифуркаций должно быть показано с помощью качественных и численных рассуждений, так как прямая проверка невозможна. Тем не менее с помощью наших моделей удастся существенно лучше понять некоторые интересные явления в экологии.

(4.3) В одном из наиболее известных в экологии экспериментов австралийский энтомолог А. Ничолсон содержал популяцию мясных зеленых мух в течение нескольких лет на

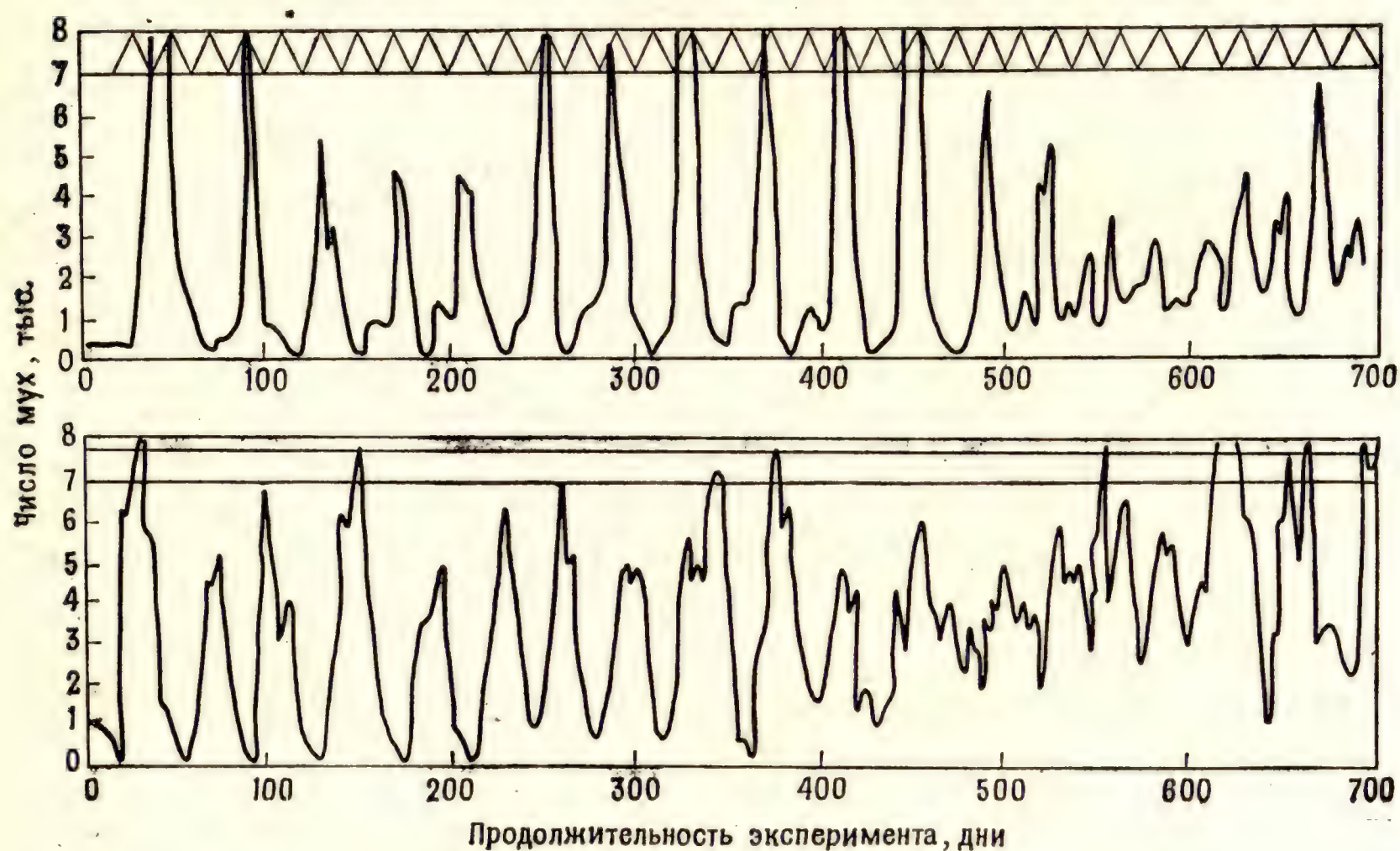


Рис. 10.7. Сверху: периодически изменяемый режим питания. Снизу: постоянный режим питания.

диете из нарубленной печенки с сахаром. На рис. 10.7 мы приводим часть его данных. Биологическое объяснение столь сильных колебаний следующее: Ничолсон умышленно поддерживал количество пищи на таком уровне, чтобы оно было меньше требуемого для взрослых мух при максимальной численности популяции. При умеренной численности популяции конкуренция не позволяет какой-либо особи получить достаточное количество белка. Белковое голодание в свою очередь уменьшает плодовитость каждой взрослой мухи настолько, что численность следующего поколения оказывается существенно меньше. Для этого малочисленного поколения пищи уже достаточно, и его плодовитость возвращается к своему максимальному уровню.

Модель этой ситуации должна включать в какой-то форме упитанность взрослых мух, так как именно она управляет скоростью кладки яиц. Соответственно мы введем переменную ξ , которая измеряет упитанность (например, массу, «здоровье») (Остер и Ауслендер [1]). Уравнение баланса в координатах (t, a, ξ) принимает вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial \xi} (gn) = -\mu n, \quad (4.5)$$

где

$$\frac{d\xi}{dt} = g(t, a, \xi, f) \quad (4.6)$$

есть скорость роста ξ , которая зависит от запасов пищи $f(t)$. Тогда рождаемость есть

$$n(0, t, \xi) = \int \int da d\xi' nb(t, a, \xi', \xi). \quad (4.7)$$

Уравнение для запасов пищи следующее:

$$\frac{df}{dt} = u(t) - C(t, a, n), \quad (4.8)$$

где $u(t)$ — скорость изменения количества пищи, поставляемой популяции, а $C(\cdot)$ — скорость потребления ее взрослыми мухами. Подходящие эмпирические зависимости $b(\cdot)$, $\mu(\cdot)$, C показаны на рис. 10.8. Тщательное численное моделирование показывает приемлемое соответствие теоретической модели экспериментальным данным, см. рис. 10.9 (Остер и Ауслендер [1]). Однако нам бы хотелось увидеть, как эти колебания порождаются моделью; механизм бифуркации, естественно, напрашивается сам собой. Для испытания этого механизма рассмотрим более простую систему «популяция — ресурсы»:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial a} = -\mu n, \quad (4.9a)$$

$$n(0, t) = \int b(a, R) n da, \quad (4.9б)$$

$$\frac{dR}{dt} = F(R, n). \quad (4.9в)$$

Независимо от вида функций в уравнениях при линеаризации последних около состояния равновесия получим (Остер

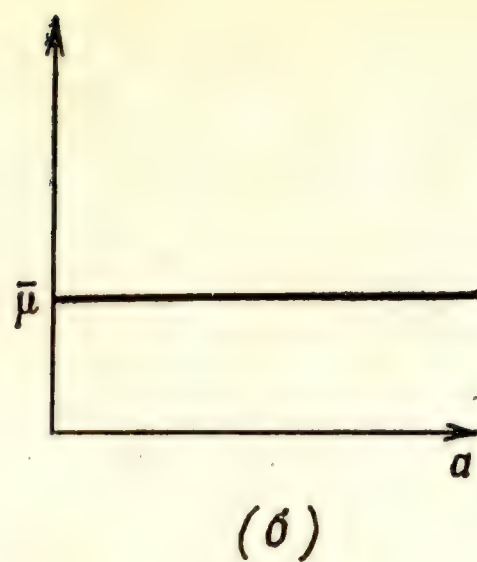
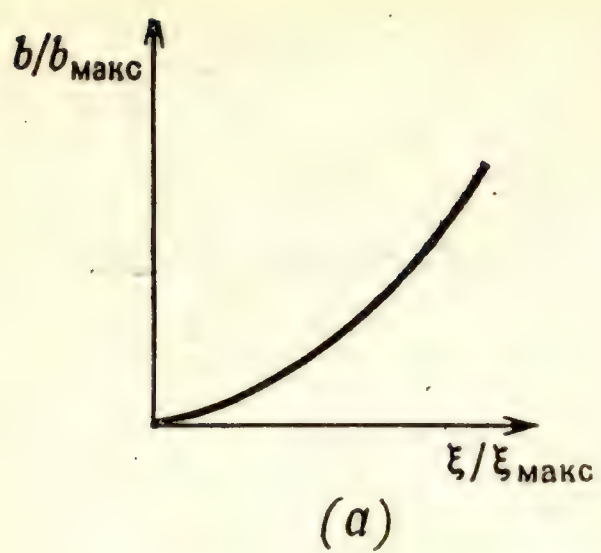


Рис. 10.8. Основные зависимости.

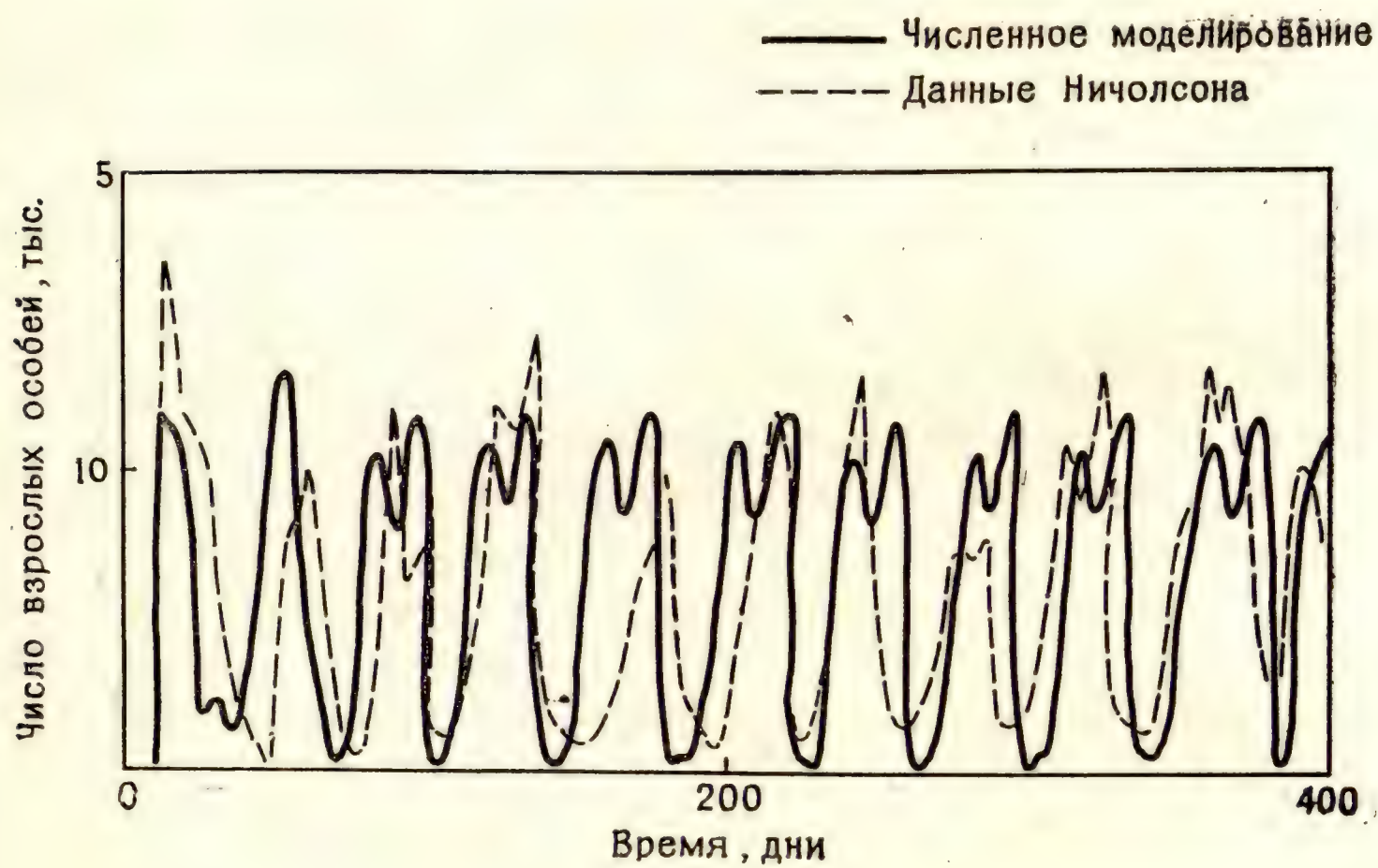


Рис. 10.9.

и Такахаси [1])

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial a} = -\bar{\mu}x, \quad (4.10a)$$

$$x(0, t) = gR(t) + \bar{b} \int_a^{\alpha+\gamma} x(t, a) da, \quad (5.10b)$$

$$\frac{dR}{dt} = -AR(t) - By(t) + Cu(t), \quad (4.10b)$$

где $g, A, B, C, \bar{b}$ и $\bar{\mu}$ — постоянные линеаризации и $y(t) = \int_0^\infty x da$. Один из путей получения ответа системы (4.10) на различные режимы снабжения пищей $u(t)$ — это вычисление «передаточной функции» (Такахаси, Рэбиенс, Ауслендер [1]). Именно, уравнение (4.10a) можно переписать в виде $\frac{\partial x}{\partial t} = Lx$, где L — линейный оператор. Заметим, что начальные условия линеаризованной системы равны нулю, т. е. применение преобразования Лапласа по времени эквивалентно решению задачи на собственные значения $Lx(a, s) = sx(a, s)$, где $s \in \mathbb{C}$. Поэтому мы можем вычислять спектр системы (4.10) следующим образом. Применяя преобразование Лапласа к системе (4.10), мы получим

$$X(a, s) = e^{-(s+\bar{\mu})a} G(s) R(s), \quad (4.11)$$

$$R(s) = \frac{C}{s + A + \frac{B}{s + \bar{\mu}} G(s)} U(s), \quad (4.12)$$

где $X(a, s)$, $R(s)$ и $U(s)$ — изображения, а

$$G(s) = g / \left[1 - \frac{\bar{b}}{s + \bar{\mu}} \left\{ e^{-(s+\bar{\mu})\alpha} - e^{-(s+\bar{\mu})(\alpha+\gamma)} \right\} \right]. \quad (4.13)$$

Таким образом, ответ или «выход» $X(s, a)$ может быть выражен через «вход» $U(s)$:

$$X(s, a) = g(s) U(s), \quad (4.14)$$

где $g(s) = e^{-(s+\bar{\mu})\alpha} G(s)$ есть «передаточная функция». Ответ всей популяции на поступление пищи можно записать в виде

$$Y(s) = \frac{1}{s + \bar{\mu}} G(s) R(s), \quad (4.15)$$

где $Y(s) = \int_0^\infty X(s, a) da$. Характеристическое уравнение для этой системы получается из равенства нулю знаменателя

уравнения (4.12),

$$1 + \frac{Bg}{(s + A) \{s + \bar{\mu} - \bar{b}e^{-(s+\bar{\mu})\alpha} (1 - e^{-(s+\bar{\mu})\gamma})\}} = 0. \quad (4.16)$$

Корни уравнения (4.16) дают собственные значения системы, что можно проверить непосредственной подстановкой в (4.10). Произведение Bg можно интерпретировать как меру следующей величины: (влияние численности популяции на доступность пищи) $\times$ (влияние доступности пищи на рождаемость). Таким образом, при изменении Bg каждое из бесконечного

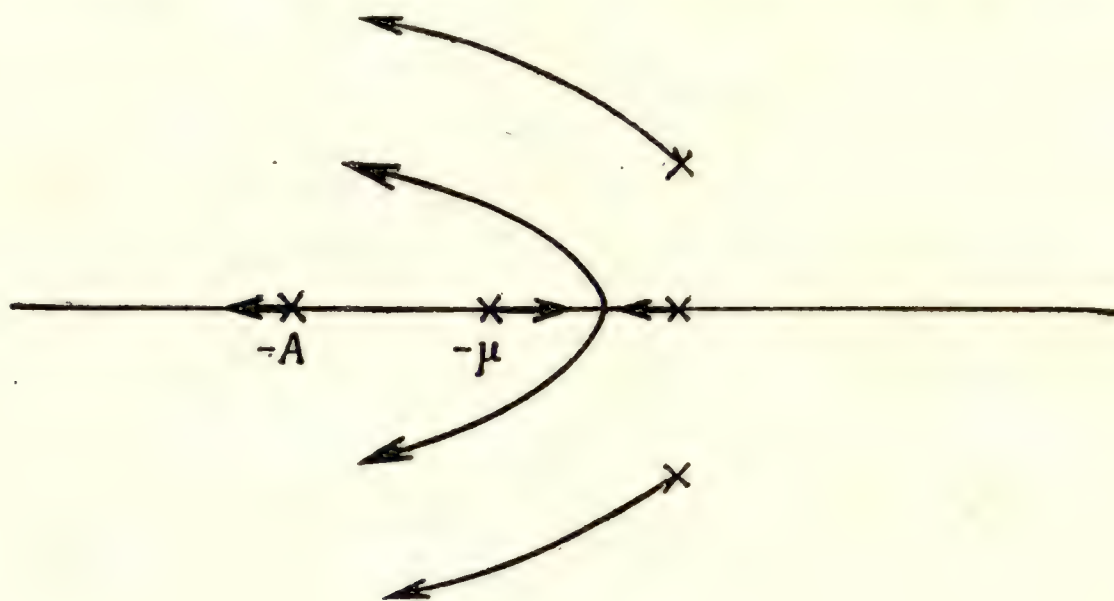


Рис. 10.10.

числа собственных значений проходит некий путь на комплексной плоскости. Ясно, что система асимптотически устойчива при $u(t) = 0$, так как популяция в конце концов вымрет от голода. При $u(t) > 0$ динамика контролируется параметром Bg . Мы можем получить некоторое представление о зависимости собственных значений системы от Bg , рассмотрев специальный случай $b(a) = b^*\delta(a - \alpha)$ (т. е. все рождения происходят в возрасте α). Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$1 + \frac{Bg}{(s + A)(s + \bar{\mu})(1 - b^*e^{-(s+\bar{\mu})\alpha})} = 0. \quad (4.17)$$

При $Bg = 0$ (4.17) имеет корни $s = -A$ и $s = -\bar{\mu}$, которые удовлетворяют уравнению

$$e^{(s+\bar{\mu})\alpha} = b^*. \quad (4.18)$$

Полагая $s = \sigma + i\omega$, нетрудно видеть, что корни (4.18) суть $\sigma = \rho$, $\omega = 2\pi n/\alpha$, $n = 1, 2, \dots$, где $s = \rho$ — действительный корень (4.18). На рис. 10.10 мы набросали эскиз «траекторий корней» (Такахаси, Рэбине и Ауслендер [1]) уравнения (4.17) при изменении Bg от 0 до ∞ (Остер и Такахаси [1]). Ветви начинаются при $Bg = 0$ (эти точки обозначаются крестиком)

и при $Bg \rightarrow \infty$ приближаются к асимптотам $\omega = \pm \frac{2\pi n}{\alpha}$, $n = 0, 1, \dots$. Из рисунка 10.10 видно, что существует область значений параметров, в которой линеаризованная модель переходит от устойчивости к неустойчивости. Это значит, что если параметр взаимодействия ($B \cdot g$) изменяется в соответствующей области, то первая пара собственных значений пересекает мнимую ось. В этой точке в нелинейной системе наблюдаются колебания с малой амплитудой, которая растет при дальнейшем возрастании параметра (конечно, раньше или позже другие пары корней попадут в правую полуплоскость; с ними связаны вторичные частоты, и мы здесь их не касаемся). Численное изучение модельной системы (4.5—4.8)



Рис. 10.11.

указывает, что колебания начинаются не с нулевой амплитуды, а появляются сразу с конечной амплитудой. Это наводит на мысль, что бифуркация контролируется не одним, а двумя параметрами (см. Такенс [1]), как показано на рис. 10.11.

(4.4) Мы можем воспользоваться возрастной моделью, чтобы попытаться ответить на один известный в литературе по экологии загадочный вопрос.

В течение нескольких лет профессор К. Б. Хаффекер поддерживал экспериментальную экосистему, состоящую из паразитирующих ос, откладывающих свои яйца на личинках определенных мотыльков. Он заметил, что очень скоро после начала эксперимента численности популяций начинают устойчиво колебаться. Эти колебания характеризуются возрастной структурой, которая практически имеет дискретные поколения. Обычные модели «хищник — жертва» не достаточны для объяснения этих колебаний, так как траектории на фазовой плоскости пересекаются; их причина — динамика возрастной структуры. Мы можем связать два уравнения баланса типа

(4.2) зависящим от возраста взаимодействием, которое моделирует поисковое поведение паразита. В результате модель будет выглядеть так:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial a} = -\mu_p(a, t)p, \quad (4.19)$$

$$p(0, t) = \int_{\gamma_p}^{\alpha_p + \gamma_p} b_p(a', t, H_0) p(a', t) da', \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial a} = -\mu_h(a, t, H, H_0, P_1)h, \quad (4.21)$$

$$h(0, t) = \int_{\alpha_h}^{\alpha_h + \gamma_h} b_h(t, a', H_1(t - \tau)) h(a', t) da', \quad (4.22)$$

где

$$H_0(t) = \int_{\beta}^{\beta + \delta} h(a', t) da' - \text{число личинок хозяина}, \quad (4.23)$$

$$H_1(t) = \int_{\alpha_h}^{\alpha_h + \gamma_h} h(a', t) da' - \text{число взрослых особей хозяина}, \quad (4.24)$$

$$H(t) = \int_0^{\infty} h(a', t) da' - \text{общее число особей хозяина}, \quad (4.25)$$

$$P_1(t) = \int_{\alpha_p}^{\alpha_p + \gamma_p} p(a', t) da' - \text{число взрослых особей паразита}. \quad (4.26)$$

Вид взаимодействия между популяциями может быть получен из предположения о случайном поиске каждым паразитом личинок хозяина, используя A — среднюю «площадь обнаружения» каждой личинки. Если личинки хозяина распределены на плоскости случайно (согласно распределению Пуассона), то время между внедрениями паразита распределено экспоненциально. Таким образом, взаимодействие принимает вид (цит. работа Ауслендера, Остера и Хаффекера):

$$[\text{число зараженных личинок}](a) = bh(a)(1 - e^{-A(s)P_1}). \quad (4.27)$$

Это нужно добавить к естественной смертности (предполагаемой постоянной), чтобы получить общую смертность популяции хозяина. Как видно из уравнения (4.22), рождаемость

хозяина содержит эффект запаздывания, который зависит от питания хозяина в прошлом. Происходит это вследствие того, что плодовитость является функцией размера взрослых особей, который зависит от имевшейся в наличии пищи.

Вышеуказанная модель изучалась численно с использованием данных Хаффекера (цит. работа Ауслендера, Остера и Хаффекера). Некоторые результаты показаны на рис. 10.12.

Во-первых, когда интенсивность взаимодействия увеличивается (например, при увеличении площади обнаружения A), система совершает переход от состояния, в котором все возрастные группы представлены в обеих популяциях, к состоянию, в котором представлено только небольшое число возрастных групп. То есть возрастные профили обоих видов превращаются в «движущиеся волны», которые распространяются по возрастной структуре таким образом, что на «стробоскопической фотографии» поколения выглядят фактически дискретными. Фазовый сдвиг популяционных волн для этих популяций определяет пространство, в котором они могут сосуществовать. Если параметры выбраны так, что представлены все возрастные группы, то популяции не сосуществуют: паразит уничтожает хозяина и затем погибает сам.

Следуя той же процедуре, что и для одновидовой модели, мы можем линеаризовать уравнения (4.19) — (4.26), применить преобразование Лапласа и исследовать корни характеристического уравнения при возрастании параметра взаимодействия. Ясно, что при отсутствии взаимодействия паразитирующая система устойчиво остается около нулевого решения, а система хозяина достигает устойчивого возрастного распределения. Моделирование показывает, что существует также стационарный возрастной профиль, при котором в обеих популяциях представлены все возрастные группы (непрерывная смена поколений). Кроме того, при достаточно сильном взаимодействии система устойчива в нуле.

Таким образом, изучение поведения корней, которое указывает на существование первой пары корней, пересекающей мнимую ось при возрастании взаимодействия, приводит нас к заключению, что интуитивное объяснение популяционных волн — это бифуркационные явления. Более того, именно этот механизм дает нам удовлетворительное объяснение возможности сосуществования двух популяций в однородной окружающей среде: бифуркация создает «фазовую нишу», в которой хозяин может спастись от полного уничтожения паразитом.

(4.5) Следует упомянуть о двух других явлениях, связанных с наличием возрастной структуры. Во-первых, рассмот-

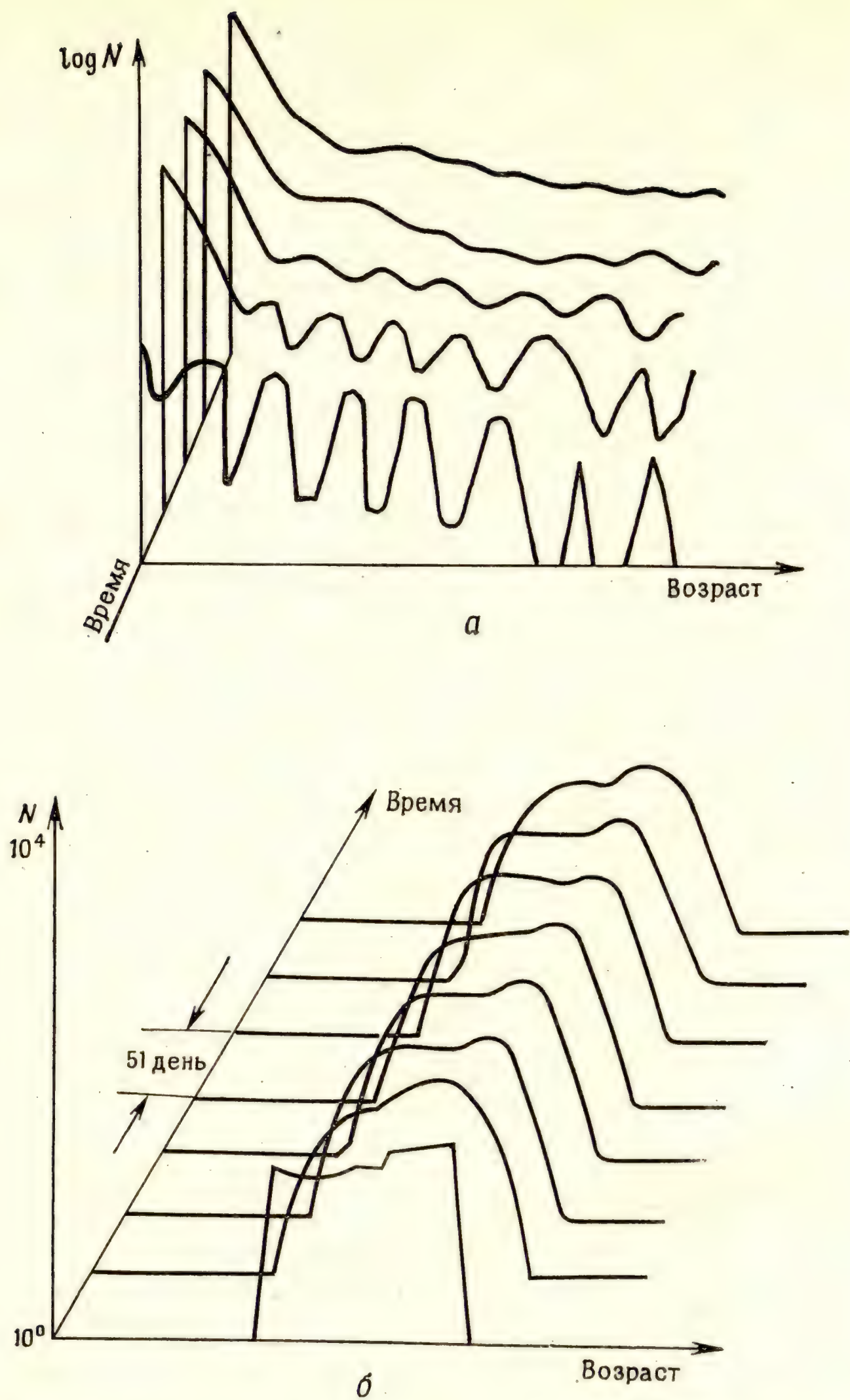


Рис. 10.12. Моделирование системы «паразит — хозяин»: *а* — эволюция популяции хозяина к устойчивому возрастному распределению в отсутствие паразита; первоначально волны были вызваны добавлением взрослых самок. *б* — «пульс» популяции хозяина, эволюционирующий к устойчивому периодическому решению; временные интервалы между соседними кривыми (≈ 51 день) соответствуют одному поколению,

рение рис. 10.7 показывает, что при наличии периодического воздействия на популяционную систему (в данном случае — периодического режима подачи пищи) внешняя частота, взаимодействуя с естественной резонансной частотой, задает частоту «биений» с длиной волны большей, чем любая из составляющих (Остер и Ауслендер [1]). Это подсказывает возможное объяснение периодических колебаний численности природных популяций, связь которых с какими-либо очевидными периодическими изменениями среды обитания проследить не удастся. Во-вторых, видимо, существуют составляющие частоты, превышающие частоту основного резонанса. Это наводит на мысль, что вторичная бифуркация из основного цикла может также играть роль в динамике процесса. Когда возрастное распределение дискретизируется вдоль характеристик, возникающий в результате набор разностных уравнений соответствует модели Лесли, хорошо известной в демографии. Беддингтон и Фри [1] изучили такую модель с дискретными возрастными группами и обнаружили, что при определенном изменении параметров происходит переход к хаотическому поведению, напоминающему движение по апериодическим орбитам, обсуждавшееся в разд. 2 для случая одного разностного уравнения. Таким образом, представляется, что бифуркации могут давать удовлетворительное математическое объяснение не только циклических явлений в популяционной динамике, но также и некоторых нерегулярностей.

Глава 11

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ КЛЕТОК, ИСПОЛЬЗУЮЩАЯ УРАВНЕНИЕ ТЬЮРИНГА¹⁾

С. Смейл

(11.1) Здесь мы изложим математическую модель, относящуюся к биологии клетки. Эта модель описывает две одинаковые клетки, взаимодействующие путем диффузии через мембрану. Каждая клетка сама по себе инертна или мертва в том смысле, что концентрация ее ферментов достигает равновесного состояния. При взаимодействии, однако, клеточная система пульсирует (или, выражаясь, пожалуй, слишком драматично, становится живой) в том смысле, что концентрации ферментов в каждой клетке осциллируют неограниченно долго. Конечно, мы используем крайне упрощенную схему реальной клетки. Наша модель — это частный случай уравнений Тьюринга для биологии клетки [1], которые описаны в следующем разделе. Я хотел бы поблагодарить Г. Хартмана, обратившего мое внимание на важность этих уравнений и показавшего мне работу Тьюринга.

Общая идея нашей модели состоит в том, чтобы дать сперва абстрактный пример динамической системы для химической кинетики четырех химических веществ (или ферментов). Эта динамика описывает реакции этих веществ между собой и обладает тем свойством, что каждое решение стремится к единственной стационарной точке, или равновесию, в пространстве концентраций, когда время стремится к ∞ . Именно в этом смысле клетка, состоящая из четырех таких веществ, мертва. По окончании переходного процесса химическая система остается в равновесии. Мы подчеркиваем, что такая реакция является математической абстракцией, и мы не пытались найти четыре вещества, для которых характерна подобная химическая кинетика.

На следующем шаге мы выберем четыре положительные диффузионные постоянные мембраны, которые будут описывать диффузию четырех веществ через нее. Клеточная система, состоящая из двух клеток, разделенных мембраной, бу-

¹⁾ Перепечатано с разрешения издателя, Американского математического общества, из *Лекций по прикладной математике*. © 1974, т. 6, стр. 15—26.

дет описана дифференциальными уравнениями согласно Тьюрингу. В силу нашего выбора химической кинетики и диффузионных постоянных эта новая динамическая система будет иметь нетривиальное периодическое решение и, что существенно, каждое решение будет стремиться к этому периодическому решению. Таким образом, независимо от начальных условий в системе со взаимодействием устанавливаются колебания (с фиксированным периодом). После переходного процесса система будет осциллировать.

Как состояние равновесия изолированной клетки, так и колебания системы со взаимодействием устойчивы (или являются аттракторами) и даже глобально устойчивы. Более того, сами уравнения устойчивы, так что любые уравнения, близкие к нашим, имеют те же свойства, т. е. эти динамические системы «структурно устойчивы». Отсюда следует по крайней мере физическая возможность их существования.

В исходной работе Тьюринга приведены примеры уравнений Тьюринга с колебаниями. Однако эти уравнения линейны, а во всякой линейной структурно устойчивой системе никакие колебания невозможны. Линейный анализ можно использовать в основном для изучения окрестности состояния равновесия. Развитие линейной теории Тьюринга было достаточно далеко продвинуто в интересной работе Осмера и Скривена [1].

В нашем примере при стремлении к 0 или ∞ одной или нескольких концентраций должны выполняться вполне разумные граничные условия. Получен полный фазовый портрет дифференциального уравнения в восьмимерном фазовом пространстве.

Данный пример, как и уравнения Тьюринга, довольно далеки от биологии. Модель, представленная здесь, показывает, как можно получить колебания, линейно связывая два различных процесса, каждый из которых сам по себе стационарен. Имеется в виду связывание процессов переноса (в данном случае диффузии через мембрану) с процессами превращений (в данном случае — химическими реакциями). В экологии уравнения Тьюринга интерпретируют по-другому, см., например, работу Левина [1]. По этому поводу см. также диссертацию С. Бурмана, выполненную в Гарварде.

Наконец заметим, что наши результаты с равным успехом могут быть интерпретированы как помещение одиночной клетки в некую среду, способную заставить ее пульсировать.

(11.2) Дадим краткое описание уравнений Тьюринга. Иногда они называются уравнениями Рашевского — Тьюринга, так как на эту тему имеется более ранняя работа Рашевского.

Начнем с клеточного комплекса в биологическом или математическом смысле этого слова, например изображенного на рис. 11.1.

С математической точки зрения эта система является клеточным комплексом на двух- или трехмерном многообразии (например, открытое множество в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$). Допустим, что имеется N клеток и они перенумерованы $1, \dots, N$.

Предполагается, что клетки содержат ферменты (или вещества, или «морфогены» в терминологии Тьюринга), кото-

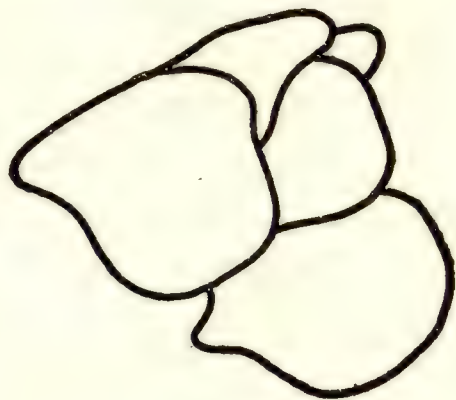


Рис. 11.1.

рые реагируют между собой. Пусть имеются m таких веществ. Тогда пространство состояний каждой клетки — это пространство

$$P = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x = (x^1, \dots, x^m), \forall i, x^i \geq 0\},$$

где x^i обозначает концентрацию i -го вещества.

Под пространством расстояний системы будем понимать декартово произведение $P \times \dots \times P$ (N раз) или P^N . Таким образом, состояние этой клеточной системы — это точка $x \in P^N$, $x = (x_1, \dots, x_N)$, где $x_i \in P$ задает все концентрации для i -й клетки, $i = 1, 2, \dots, N$. Динамика типичной клетки (без взаимодействия с соседями) определяется обыкновенным дифференциальным уравнением на P : его можно записать как отображение $R: P \rightarrow \mathbb{R}^m$ и равенство $dx/dt = R(x)$. R описывает, как реагируют между собой вещества в этой клетке; химическая кинетика изучает природу R . В типичном случае динамика $dx/dt = R(x)$ на P такова, что существует единственное состояние равновесия $\bar{x} \in P$, и любое решение стремится к $\bar{x}$; по крайней мере так происходит, если законы сохранения учитываются тем или иным способом (как у Тьюринга [1] или Осмера и Скривена [1]). Для этого уравнения ставятся также естественные граничные условия: если $x \in P$, $x = (x^1, \dots, x^m)$ и $x^k = 0$, то k -я компонента $R^k(x)$ отображения $R(x)$ положительна.

До сих пор мы рассматривали отдельно каждую клетку, предполагая их изолированными. Клетки обычно разделены мембраной, через которую происходит диффузия из одной клетки в соседние. Когда определенное вещество имеет большую концентрацию в r -й клетке, чем в соседних, концентрация этого вещества в r -й клетке начинает убывать со скоростью, пропорциональной разности концентраций (в наиболее простом случае диффузии). Из этого описания получают уравнения Тьюринга, в которых добавление диффузионного члена задает связь между клетками:

$$(T) \quad \frac{dx_k}{dt} = R(x_k) + \sum \mu_{ik} (x_i - x_k), \quad k = 1, \dots, N.$$

Здесь суммирование ведется по множеству клеток, примыкающих к k -й клетке. Поясним эти уравнения более подроб-

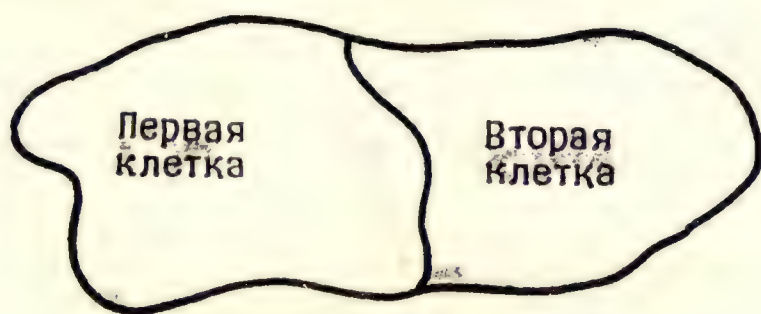


Рис. 11.2.

но. Первый член — $R(x_k)$ — определяет химическую кинетику k -й клетки. Вторым член описывает диффузионные процессы, происходящие между клетками. Таким образом, $x_i - x_k \in \mathbb{R}^m$ представляет разности концентраций всех веществ между i -й и k -й клетками. В этих уравнениях μ_{ik} — это линейные отображения $\mathbb{R}^m$ в себя, т. е. $(m \times m)$ -матрицы. В наиболее естественном простом случае, в том числе в рассматриваемом здесь, μ_{ik} — положительная диагональная матрица. Химическая кинетика для всех клеток предполагается одной и той же. (Т) является системой дифференциальных уравнений 1-го порядка на пространстве состояний биологической системы R^N , которая описывает изменения состояния системы во времени.

Конкретизируем уравнения для случая двух клеток, примыкающих друг к другу по мембране (рис. 11.2), которым мы и будем заниматься в оставшейся части работы:

$$(T_2) \quad \begin{aligned} dz_1/dt &= R(z_1) + \mu(z_2 - z_1), \\ dz_2/dt &= R(z_2) + \mu(z_1 - z_2). \end{aligned}$$

Это уравнение на $P \times P$, $(z_1, z_2) \in P \times P$. Здесь μ будет выбрана вида

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_m \end{pmatrix},$$

где каждое $\mu_i > 0$. Это наиболее простой случай. Мы также можем считать (T_2) заданным векторным полем X на $P \times P$, где

$$X(z_1, z_2) = (R(z_1) + \mu(z_2 - z_1), R(z_2) + \mu(z_1 - z_2)).$$

(11.3) Сформулируем теперь наши результаты.

Основная теорема. Пусть $P = \{z \in \mathbb{R}^4, z = (z^1, z^2, z^3, z^4), z^i \geq 0\}$. Существуют гладкое (C^∞) отображение $R: P \rightarrow \mathbb{R}^4$, и $\mu_1, \dots, \mu_4 > 0$ со следующими свойствами:

(1) дифференциальное уравнение $dz/dt = R(z)$ на P глобально асимптотически устойчиво и структурно устойчиво;

(2) на пространстве $P \times P$ система дифференциальных уравнений

$$(T) \quad \begin{aligned} dz_1/dt &= R(z_1) + \mu(z_2 - z_1), \\ dz_2/dt &= R(z_2) + \mu(z_1 - z_2), \end{aligned} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_4 \end{pmatrix}$$

является «глобальным осциллятором»¹⁾ и структурно устойчива;

(3) граничные условия разумны в следующем смысле: пусть $z_0 = (z_0^1, z_0^2, z_0^3, z_0^4) \in P$ и $z_0^k = 0$ при некотором k от 1 до 4. Тогда k -я компонента $R^k(z_0)$ отображения $R(z_0)$ положительна.

Другими словами, в п. 1 теоремы утверждается, что у дифференциального уравнения существует единственное состояние равновесия $\bar{z} \in P$ и любое решение стремится к $\bar{z}$ при $t \rightarrow \infty$. Структурная устойчивость R означает, что уравнение $dz/dt = R_0(z)$ имеет те же самые структурные свойства, что и $dz/dt = R(z)$, если R_0 является C^1 возмущением R (по поводу такого рода устойчивости и основ теории обыкновенных дифференциальных уравнений см. Смейл [1]).

¹⁾ Термин «глобальный осциллятор» объясняется ниже. — Прим. перев.

Глобальный осциллятор на $P \times P$ — это такая динамическая система, которая имеет нетривиальное устойчивое периодическое решение γ , а любое другое решение, исключая замкнутое множество Σ меры 0, стремится к γ при $t \rightarrow \infty$. В нашем случае Σ является шестимерным, гладко вложенным диском, и на Σ каждое решение стремится к единственному состоянию равновесия (z, z) системы (Т).

Сформулированная теорема придает математическую точность утверждениям п. (11.1), если мы интерпретируем уравнения (Т) согласно (11.2).

Данный пример связан с бифуркацией рождения цикла (см. гл. 3). Однако наш анализ носит более глобальный характер, и мы получаем полное описание фазового портрета.

(11.4) Здесь мы покажем, как построить дифференциальные уравнения предыдущего раздела.

Для того чтобы получить векторное поле $R: P \rightarrow \mathbb{R}^4$ основной теоремы, найдем C^∞ векторное поле $Q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ на $\mathbb{R}^4$ и

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_4 \end{pmatrix}.$$

со следующими свойствами:

(1) начало координат 0 является глобальным аттрактором уравнения $dz/dt = Q(x)$ на $\mathbb{R}^4$;

(2) существует такое $K > 0$, что если $z \in \mathbb{R}^4$ и $\|z\| \geq K$, то $Q(z) = -z$;

(3) на $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ векторное поле

$$(z_1, z_2) \mapsto (2Q(z_1) + \mu(z_2 - z_1), 2Q(z_2) + \mu(z_1 - z_2))$$

является глобальным осциллятором.

Если такое Q уже найдено, то доказательство заканчивается следующим образом: выберем $\bar{z} \in P$ так, чтобы $z - \bar{z} \in P$ для всех z с $\|z\| \leq K$. Положим, $P(z) = 2Q(z - \bar{z})$. Тогда R будет иметь свойства, указанные в (11.3).

Таким образом, построение ведется не в P , а в $\mathbb{R}^4$, где можно систематически использовать линейную структуру (хотя сами уравнения нелинейны). Чтобы построить требуемое Q , мы вначале проигнорируем свойство (2), т. е. поведение Q в бесконечности, и сосредоточим свое внимание на свойствах (1) и (3). Действительно, мы найдем $S: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, удовлетворяющее свойствам (1) и (3), и затем модифицируем его так, чтобы удовлетворялось свойство (2).

Для построения такого S отметим, что множество $\Delta = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \mid z_1 = z_2\}$ обладает тем свойством, что векторное поле

$$(*) \quad (2S(z_1) + \mu(z_2 - z_1), \quad 2S(z_2) + \mu(z_1 - z_2))$$

является касательным к Δ . Тем самым Δ инвариантно относительно потока, и на Δ все траектории стремятся к началу. Предположим теперь, что S удовлетворяет условию $S(-z) = -S(z)$, т. е. нечетна. Тогда на

$$\Delta^\perp = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \mid z_1 = -z_2\}$$

векторное поле $(*)$ имеет вид $z \rightarrow S(z) - \mu(z)$ (с точностью до множителя 2) и $\Delta^\perp$ — инвариантное многообразие для поля $(*)$. Этим мотивируется поиск нечетного отображения $S: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, удовлетворяющего свойствам:

- (1) 0 — глобальный аттрактор для S , а $S - \mu$ — глобальный осциллятор в $\mathbb{R}^4$;
- (2) $\Delta^\perp$ — аттрактор поля $(*)$ в $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$;
- (3) граничные условия могут быть сделаны хорошими.

Суть дела — в условии (1). Мы поступим следующим образом. Рассмотрим сначала матрицу

$$\bar{\mu} = \begin{pmatrix} a & 0 & \gamma a & 0 \\ 0 & a & 0 & \gamma a \\ -\gamma a & 0 & -2a & 0 \\ 0 & -\gamma a & 0 & -2a \end{pmatrix}$$

в линейных координатах $y = (y^1, \dots, y^4)$ на $\mathbb{R}^4$, где $a < -1$ и $\sqrt{2} < \gamma < 3/2$. Заметим, что $\bar{\mu}$ имеет действительные положительные собственные значения, скажем $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$. Это легко проверяется, так как $\bar{\mu}$ похожа на (2×2) -матрицу. Существует линейная замена координат, которая переводит матрицу

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \mu_4 \end{pmatrix}$$

в $\bar{\mu}$. Химическим концентрациям соответствуют координаты, в которых $\bar{\mu}$ имеет диагональный вид. Таким образом, y_i не являются концентрациями. Однако в y -координатах гораздо легче работать.

Возьмем теперь S в y -координатах как сумму линейного отображения $S_1: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ и кубического отображения S_3 , т. е.

положим $S = S_1 + S_3$, где

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & \gamma a & 0 \\ -1 & a & 0 & \gamma a \\ -\gamma a & 0 & 2a & 0 \\ 0 & -\gamma a & 0 & 2a \end{pmatrix},$$

$S_3(y) = (-(y^1)^3, 0, 0, 0)$. Отметим, что S нечетно, а так как скалярное произведение $\langle Sy, y \rangle < 0$ при $y \neq 0$ (что легко проверяется), то начало координат $\mathbb{R}^4$ — глобальный аттрактор для S .

Следующий шаг состоит в проверке того, что $S - \mu$ имеет вид

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4a & 0 \\ 0 & 4a \end{pmatrix} \right) + S_3.$$

Таким образом, в $\mathbb{R}^4$ двумерное подпространство (y^1, y^2) является сжимающимся инвариантным подпространством для $S - \mu$, так как $a < 0$; на этом подпространстве уравнения для $S - \mu$ имеют следующий вид:

$$dy^1/dt = y^2 - ((y^1)^3 - y^1), \quad dy^2/dt = -y^1.$$

Это уравнение Ван-дер-Поля (см. Хирш и Смейл [1])¹⁾, которое, как известно, является глобальным осциллятором. Тем самым $S - \mu$ — глобальный осциллятор в $\mathbb{R}^4$.

На следующем шаге мы должны показать, что выполняется условие (2). Это может быть доказано следующим образом. Векторное поле на $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$, определяемое как

$$X(z) = (2S(z_1) + \mu(z_2 - z_1), 2S(z_2) + \mu(z_1 - z_2)),$$

может быть записано в форме $Y_1(z) + Y_2(z)$, где $Y_1(z) \in \Delta$, $Y_2(z) \in \Delta^\perp$. Тогда

$$Y_1(z) = (S(z_1) + S(z_2), S(z_1) + S(z_2)),$$

$$Y_2(z) = (S(z_1) - S(z_2) + \mu(z_2 - z_1), -(S(z_1) - S(z_2) + \mu(z_2 - z_1))).$$

X направлено к $\Delta^\perp$, что следует из леммы.

Лемма. $\langle S(z_1) + S(z_2), z_1 + z_2 \rangle \leq 0$.

Доказательство леммы. Запишем $S = S_1 + S_2$. Мы уже знаем, что

$$\langle S_1(z_1) + S_1(z_2), z_1 + z_2 \rangle = \langle S_1(z_1 + z_2), z_1 + z_2 \rangle \leq 0.$$

¹⁾ См. также Андронов, Витт, Хайкин [1], Боголюбов и Митропольский [1], Стокер [1]. — Прим. перев.

Но

$$\langle S_3(z_1) + S_3(z_2), z_1 + z_2 \rangle = [-(y_1^1)^3 - (y_2^1)^3] \cdot (y_1^1 + y_2^1).$$

Это выражение ≤ 0 , так как для любых действительных чисел a и b $(a^3 + b^3)(a + b) \geq 0$.

И, наконец, «выпрямим» поток поля S вне некоторого достаточно большого шара. Возьмем гладкую функцию $\varphi: R^+ \rightarrow R^+$, $0 \leq \varphi \leq 1$, которая равна нулю в окрестности 0 и $\varphi(r) \equiv 1$ при достаточно больших r ; тогда

$$Q(z) \equiv (1 - \varphi(\|z\|)) S(z) - \varphi(\|z\|) z.$$

Можно показать, что Q удовлетворяет условиям (1), (2), (3) при подходящем выборе констант в определении φ .

(11.5) Мы хотим закончить эту заметку обсуждением результатов.

Различные типы уравнений Тьюринга или уравнений реакций с диффузией появляются в той или иной форме во многих работах из разных областей. Однако мы еще далеки от настоящего их понимания и анализа. Прежде чем придет настоящее понимание, необходимо осмыслить большое число примеров как с математической, так и с экспериментальной стороны. Это одна из причин, почему я построил эту модель. Кроме того, эта работа ставит довольно острую проблему: «аксиоматизировать» свойства, необходимые для возникновения колебаний из-за диффузии. Например, в случае двух клеток, какими именно свойствами должна обладать пара (R, μ) (где R «мертво»), чтобы сделать систему Тьюринга со взаимодействием осциллирующей? Как влияет топология в случае многих клеток?

Мы без колебаний делаем здесь упрощающие предположения, так как мы не анализируем, а строим пример. В силу свойств структурной устойчивости этого примера, можно воспользоваться им для получения более сложных примеров, например для произвольного числа клеток (свыше одной), или веществ (свыше трех), или для более сложных диффузионных матриц. Однако труднее уменьшить число веществ в задаче до двух или даже до трех. Проблемой также является построение модели с тремя клетками и двумя или тремя химикалиями.

Есть нечто парадоксальное в этом примере. Берутся две мертвые (математически мертвые) клетки, связанные диффузионным процессом, который сам по себе также имеет тенденцию выравнивать концентрации. И тем не менее в присутствии связи система бесконечно пульсирует.

Некоторые химики указали мне, что интерпретация реакции R как «открытой системы» делает модель более понятной.

Существует также целая история численных работ по такого рода системам, которой я здесь не буду касаться.

Наконец имеются уравнения с частными производными, аналогичные рассмотренной здесь версии уравнений Тьюринга. Их можно найти в работе Тьюринга [1]. В контексте таких уравнений с частными производными недавняя работа Л. Ховарда и Н. Коппель по колебаниям в реакциях Жаботинского во многом аналогична настоящей работе ¹⁾).

¹⁾ В заключение хотелось бы указать на интересные работы Колесова [2, 3], которые посвящены той же проблеме, хотя и в несколько другом аспекте. — *Прим. перев.*

СТРАННЫЙ, СТРАННЫЙ АТТРАКТОР

Дж. Гукенхеймер¹⁾

Абрахамом и Смейлом [1], Шубом [1] и Ньюхаусом [2] были построены примеры диффеоморфизмов компактных многообразий, которые не лежат в замыкании множества диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A Смейла, или в замыкании множества Ω -устойчивых диффеоморфизмов (Смейл [1]). Используя конструкцию надстройки (Смейл [1]), аналогичные примеры можно получить и для векторных полей на компактных многообразиях.

Здесь мы приведем другой пример векторного поля на компактном многообразии, не лежащего в замыкании множества Ω -устойчивых или удовлетворяющих аксиоме A векторных полей. Его значение состоит в том, что нарушение аксиомы A осуществляется способом, отличным от предыдущих примеров. Построенный пример имеет дополнительные свойства неустойчивости, которых не имели прежние примеры.

Векторное поле X *топологически Ω -устойчиво*, если близкие векторные поля (в C^1 -топологии на пространстве векторных полей) имеют неблуждающие множества, гомеоморфные неблуждающему множеству поля X . Наш пример не является топологически Ω -неустойчивым. К тому же из него следует отрицательный ответ на следующий вопрос из теории динамических систем: верно ли, что особые точки общего векторного поля изолированы в его неблуждающем множестве?

В примерах, построенных Ньюхаусом, особые точки содержались в непритягивающей части неблуждающего множества.

Наш пример появился в результате численного изучения системы дифференциальных уравнений, построенной Лоренцем [1]. Нам кажется, что система, изученная Лоренцем, имеет такое же динамическое поведение, как и в нашем примере, однако мы не будем проводить оценки, необходимые для доказательства этого утверждения. Мне приятно поблагодарить Алана Перельсона за помощь в численных исследо-

¹⁾ Работа частично финансировалась Национальным научным фондом.

ваниях, лежащих в основе настоящей работы, и Р. Боуэна, Ч. Пью, С. Смейла и Дж. Йорка за полезные обсуждения. Наконец, напомним точные уравнения Лоренца, которые демонстрируют такую удивительную динамику (см. пример 4B.8):

$$\dot{x} = -10x + 10y, \quad \dot{y} = -xz + 28x - y, \quad \dot{z} = xy - (8/3)z.$$

Определим C^∞ -гладкое векторное поле в замкнутой области $\mathbb{R}^3$. Внутри области будет находиться компактное инвариантное множество A , являющееся аттрактором в том смысле, что имеет фундаментальную систему окрестностей, каждая из которых инвариантна при $t \geq 0$ относительно потока, порожденного векторным полем X . Множество A двумерно. В процессе построения поля X будем пользоваться координатами (x, y, z) в $\mathbb{R}^3$. Векторное поле X должно иметь три состояния равновесия. Первое $p = (0, 0, 0)$ — седло с двумерным устойчивым многообразием $W^s(p)$. Прямоугольник $\{(x, y, z) \mid x = 0, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ должен содержаться в $W^s(p)$. Устойчивые собственные вектора поля X в точке p — это $\frac{\partial}{\partial y}$, соответствующий большему по абсолютной величине собственному значению, и $\frac{\partial}{\partial z}$, соответствующий меньшему по абсолютной величине собственному значению. Неустойчивое многообразие $W^u(p)$ содержит отрезок с концами в точках $(-1, 0, 0)$ и $(1, 0, 0)$; оно соответствует промежуточному по абсолютной величине собственному значению. Другие условия на $W^u(p)$ будут наложены ниже.

Другие два состояния равновесия X — это $q_\pm = (\pm 1, \pm 1/2, 1)$, седловые точки с одномерными устойчивыми многообразиями $W^s(q_\pm)$. Отрезки, соединяющие точки $(\pm 1, -1, 1)$ и $(\pm 1, 1, 1)$, содержатся в $W^s(q_\pm)$. Отрицательное собственное значение поля X в точке $q_\pm$ имеет наибольшую абсолютную величину. Оставшиеся собственные значения в точке $q_\pm$ комплексны и соответствуют собственному подпространству, натянутому на $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$. Действительные части этих собственных значений малы.

Рассмотрим квадрат $R = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, z = 1\}$ и его отображение последования Пуанкаре θ . Отображение θ не определено, когда x равно ± 1 или 0 , так как эти точки лежат на устойчивом многообразии одного из состояний равновесия. Траектории в R для значения $x = \pm 1$ никогда не покидают R , в то время как траектории с $x = 0$ никогда не возвращаются. Для всех других точек R отображение θ определено. Обозначим через R_+ множество $R \cap$

$\cap \{(x, y, z) \mid 0 < x < 1\}$, и через R_- — множество $R \cap \cap \{(x, y, z) \mid -1 < x < 0\}$. Определим $\theta_{\pm}$ как ограничение θ на $R_{\pm}$. Предположим, что существуют функции $f_{\pm}, g_{\pm}$ и число $\alpha > 1$, такие, что $\theta_{\pm}(x, y) = (f_{\pm}(x), g_{\pm}(x, y))$, $0 < \partial g_{\pm} / \partial y < 1/2$ и $\partial f_{\pm} / \partial x > \alpha$. Обозначим $\lim_{x \rightarrow 0} f_{\pm}(x)$ через $\rho_{\pm}$ и предположим, что $\rho_+ < 0, \rho_- > 0, \theta_-(\rho_+) < 0$ и $\theta_+(\rho_-) > 0$. Первые пересечения $W^u(p)$ с R осуществляются в точках, в которых $x = \rho_{\pm}$. Предположим, наконец, что множество значений

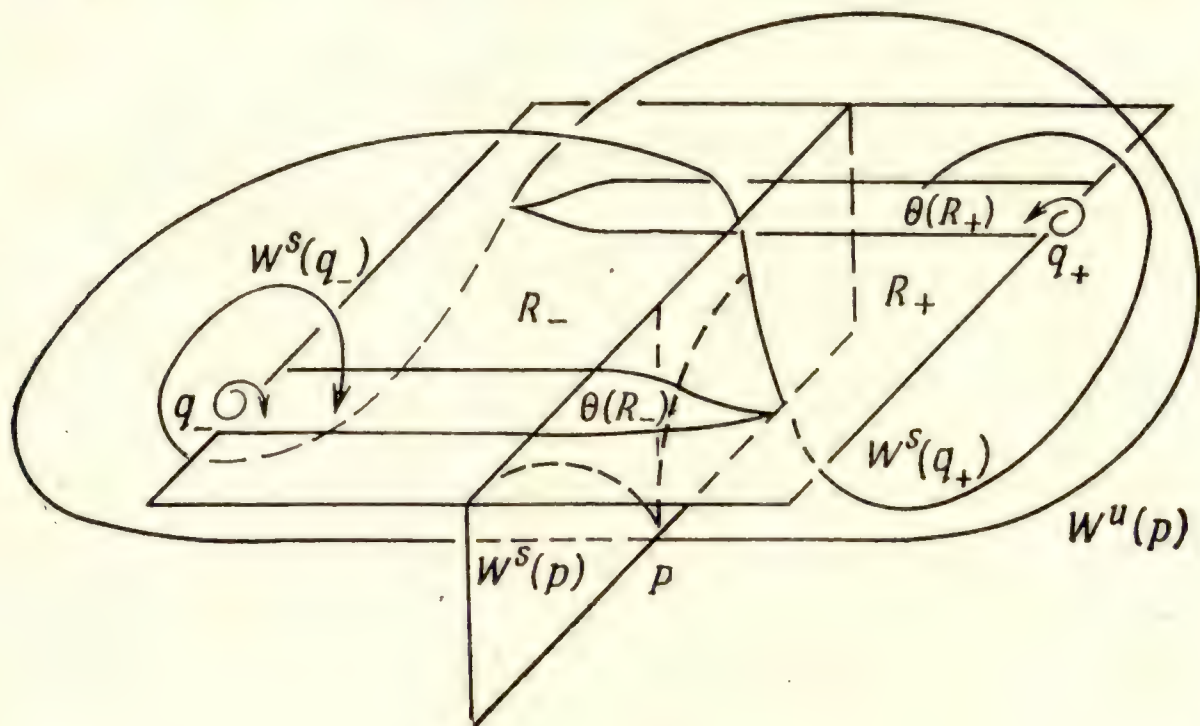


Рис. 12.1.

функций $g_{\pm}$ содержится в интервалах $[\pm 3/4, \pm 1/4]$. Рис. 12.1 иллюстрирует эти основные черты потока X .

Отметим, что из условий, наложенных на собственные значения поля X в точке p , вытекают соотношения $\lim_{x \rightarrow 0} \partial g_{\pm} / \partial y = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \partial f_{\pm} / \partial x = \infty$. Это можно установить, рассматривая решение системы линейных уравнений вблизи седловой точки. Поскольку траектории, выходящие из $R_{\pm}$, проходят произвольно близко к p , то отображения последования $\theta_{\pm}$ будут иметь особенности степенного типа.

В устанавливаемых ниже теоремах предполагается, что векторное поле X продолжено до векторного поля на компактном трехмерном многообразии M . Продолжение по прежнему будем обозначать через X . Отметим, что единственные свойства, использованные при определении X , но не сохраняющиеся при действии возмущений, — это существование функций $f_{\pm}$ и $g_{\pm}$ указанного вида. Однако наличие этих функций не является существенным свойством потока X — они были введены лишь для упрощения доказательств.

(12.1) **Теорема.** У векторного поля X существует окрестность $\mathcal{U}$ в пространстве C^r -гладких векторных полей на

$M(r \geq 1)$ и множество $\mathcal{V}$ второй категории в $\mathcal{U}$, такие, что если $Y \in \mathcal{V}$, то Y имеет состояние равновесия, не изолированное в неблуждающем множестве.

(12.2) **Теорема.** Векторное поле X имеет окрестность $\mathcal{U}$ в пространстве C^r -гладких векторных полей на M , такую, что если $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ есть открытое множество в пространстве C^r -гладких векторных полей, то существуют векторные поля в $\mathcal{V}$, имеющие негомеоморфные неблуждающие множества.

Теорема (12.2) устанавливает тот факт, что X не принадлежит замыканию множества топологически Ω -устойчивых векторных полей.

Доказательство обеих этих теорем начнем с описания неблуждающего множества поля X . Это описание будет дано в основном на языке «символической динамики» (Смейл [4]).

Рассмотрим отображение последования θ на R . Выберем четыре подмножества $\theta(R)$, которые будут использованы при анализе символической динамики неблуждающего множества. Введем следующие обозначения:

$$R_1 = \theta(R_+) \cap \{\rho_+ < x < 0\},$$

$$R_2 = \theta(R_+) \cap \{0 < x < f_+(\rho_-)\},$$

$$R_3 = \theta(R_-) \cap \{f_-(\rho_+) < x < 0\},$$

$$R_4 = \theta(R_-) \cap \{0 < x < \rho_-\}.$$

Эти множества изображены на рис. 12.2. Образ R_1 при отображении θ растягивается в горизонтальном направлении, пересекая R_3 и R_4 , $\theta(R_2)$ растягивается и пересекает R_1 . Аналогично, $\theta(R_3)$ пересекает R_4 , а $\theta(R_4)$ пересекает R_1 и R_2 .

Рассмотрим теперь последовательности $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ целых чисел 1, 2, 3 и 4, такие, что для каждого k (a_k, a_{k+1}) — одна из пар $(3, 1)$, $(4, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 3)$, $(1, 4)$ или $(2, 4)$. Множество таких последовательностей образует пространство Σ

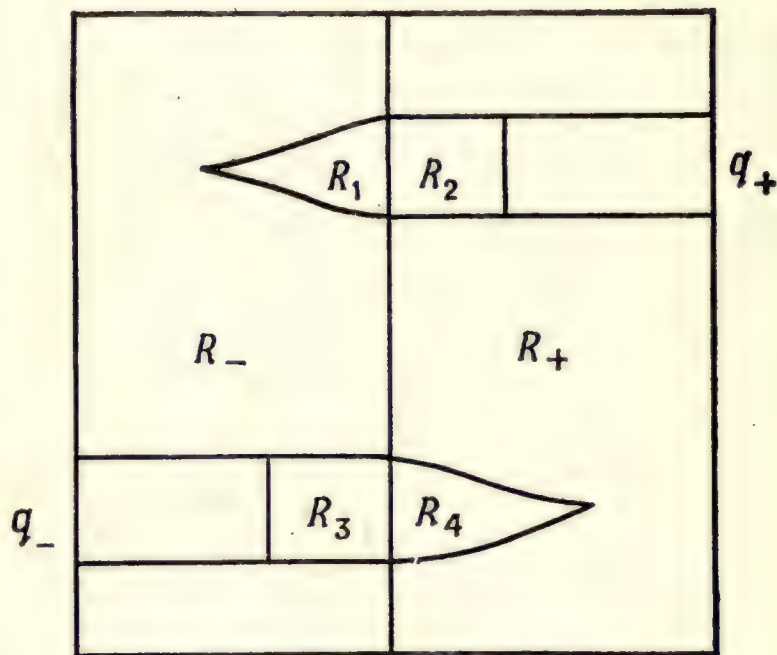


Рис. 12.2.

«подсдвига конечного типа» с матрицей переходов ¹⁾

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пересечение $\bigcap_{k=0}^n \theta^k(R_{a_k})$, соответствующее каждой конечной последовательности $\{a_0, \dots, a_n\}$, сконструированной из описанных выше допустимых пар, содержит компоненту, которая растягивается горизонтально и пересекает R_{a_0} . Например, если $a_0 = 1$, тогда с R_1 пересекаются образцы R_2 и R_4 . Если при этом $a_1 = 2$, то R_2 пересекает лишь образ R_4 . Следовательно, обязательно $a_2 = 4$ и $\theta(R_4)$ пересекает R_{a_2} , а $\theta^2(R_4)$ пересекает R_1 . Когда n возрастает, вертикальный размер этих полосок экспоненциально убывает. Если $\{a_k\} \in \Sigma$, то $\bigcap_{k=0}^{\infty} \theta^k(R_{a_k})$ содержит дугу, горизонтально пересекающую R_{a_0} . В Σ содержится несчетное множество последовательностей, следовательно, $S = \bigcap_{k=0}^{\infty} \theta^k\left(\bigcup_{i=1}^4 R_i\right)$ содержит несчетное множество дуг, пересекающихся с каждым R_i .

Хотелось бы узнать, содержится ли S в неблуждающем множестве θ . Если каждая дуга, принадлежащая S , будет иметь образ относительно некоторой степени θ , пересекающийся с каждым R_i , то S будет содержаться в неблуждающем множестве θ . При этих условиях мы докажем, что точка 0 не изолирована в неблуждающем множестве поля X . Пересекает или нет образ каждой дуги каждое R_i , зависит лишь от поведения функций $f_{\pm}$ на интервалах $(\rho_+, 0)$ и $(0, \rho_-)$. Обозначим через f разрывное отображение $f: (\rho_+, \rho_-) \rightarrow (\rho_+, \rho_-)$, определенное функциями $f_{\pm}$ (скажем, с $f(0) = 0$).

Рассмотрим подынтервал $\gamma \subset (\rho_+, \rho_-)$. Так как $\partial f_{\pm} / \partial x > \alpha > 1$, то сумма длин компонент в $f^k(\gamma)$ не меньше, чем $c\alpha^k$. Поэтому какой-то из образов γ должен состоять более чем из одной компоненты. Так как точка разрыва f — это лишь $x=0$, то существуют $k > 0$ и $x \in \gamma$, такие, что $f^k(x) = 0$.

Отображение θ имеет периодическую точку периода 2 в R_1 , так как $\theta^2(R_1)$ пересекает R_1 . Следовательно, f имеет точку r периода 2. У каждой окрестности r есть образ, в

¹⁾ В советской литературе принят термин «топологическая марковская цепь» (см. Алексеев [1]). — Прим. перев.

конце концов покрывающий (ρ_+, ρ_-) . Предположим, что существует открытое множество U , никакой из образов которого не покрывает (ρ_+, ρ_-) . Тогда никакой из образов U не содержит r . Отсюда следует, что если U_1 и U_2 — два открытых множества и никакой из образов каждого из них не покрывает (ρ_+, ρ_-) , то и $U_1 \cup U_2$ обладает таким же свойством (поскольку r не принадлежит никакому его образу). Следовательно, существует наибольшее открытое множество U с тем свойством, что никакой из его образов не покрывает (ρ_+, ρ_-) . Отсюда следует, что $f^{-1}(U) = U = f(U)$.

Мы видели выше, что каждый интервал содержит точку, отображающуюся в 0 некоторой степенью отображения f . Поэтому U содержит окрестность 0 и, следовательно, окрестности точек $\rho_{\pm}$. Так как эти точки всюду плотны, то U является плотным подмножеством (ρ_+, ρ_-) . Заметим, что из включения $f^{-1}(U) \subset U$ следует, что компоненты U должны отображаться *на* компоненты U . Пусть (ξ_-, ξ_+) — компонента U , содержащая 0. Некоторый образ $(\xi_-, 0)$ содержит 0 и, следовательно, (ξ_-, ξ_+) (так как $f_-(0) = \rho_-$, то образы 0 являются граничными точками компонент U). Степень f , для которой образ $(\xi_-, 0)$ впервые содержит 0, является непрерывной функцией на $(\xi_-, 0)$. Так как f сохраняет ориентацию, то отсюда следует, что ξ_- отображается отображением f в этой степени в ξ_- . Поэтому ξ_- — периодическая точка f . Отсюда заключаем, что $\rho_{\pm}$ отображаются некоторой степенью f в периодические точки f^1).

Возвращаясь к отображению последования θ множества R , получаем, что образы вертикальных линий $x = \rho_{\pm}$ будут содержаться в конечном множестве вертикальных линий. В силу того что θ в вертикальном направлении является сжимающим, пересечение $W^u(p)$ с R состоит из траекторий θ , асимптотически стремящихся к периодическим траекториям отображения θ . Эти периодические траектории лежат на периодических орбитах γ_1 и γ_2 потока X . Поскольку θ равномерно гиперболично (вне линии разрыва), то эти периодические орбиты являются гиперболическими и имеют двумерные устойчивые и неустойчивые многообразия. Обращаясь к теореме Купки — Смейла (Смейл [1]), отметим, что существует типичное свойство векторных полей, заключающееся в том, что пересечение устойчивого многообразия гиперболического периодического движения и неустойчивого многообразия гиперболического состояния равновесия должно быть трансвер-

¹⁾ Приведенное рассуждение неверно. Ошибка в том, что из $f^{-1}(U) \subset U$ не следует, что f отображает компоненты *на* компоненты. — Прим. перев.

сальным. Здесь это не так. Таким образом, заключаем, что в открытом множестве векторных полей, которые мы описываем, такие векторные поля, для которых каждая дуга в S в конечном счете пересечет каждое R_i , образуют множество второй категории. Я не знаю, существует ли открытое множество векторных полей с таким свойством.

Доказательство теоремы 12.1. Предположим, что X выбрано так, что θ обладает следующим свойством: некоторый образ любой дуги из S в конце концов пересечет каждое R_i . Если $w \in S$, а U — прямоугольная окрестность w в R , то $\theta^k(U)$ пересекается с каждым R_i для достаточно большого k . В силу того что θ является сжимающим в вертикальном направлении, то $\theta^{-k}(U)$ для достаточно большого k растягивается в вертикальном направлении на все R . Отсюда следует, что $\theta^{-k}(U) \cap \theta^k(U) \neq \emptyset$ для достаточно большого k . Таким образом, $\theta^{2k}(U) \cap U \neq \emptyset$ и точка w неблуждающая. Отсюда следует, что S содержится в неблуждающем множестве отображения θ , а поскольку S пересекается с $W^s(p)$, то p тоже содержится в неблуждающем множестве поля X . Это доказывает теорему 12.1. ■

Неблуждающие множества векторных полей, рассмотренных в теореме 12.1, имеют двумерный аттрактор Λ , содержащий начало координат. Пересечение Λ с R содержит S . Мы хотим продолжить описание структуры Λ . Это можно сделать более полно, когда p имеет гомоклиническую точку с $W^u(p) \subset \subset W^s(p)$, т. е. когда ρ_+ и ρ_- некоторой степенью f отображаются в 0.

Для определенности опишем Λ в том случае, когда $f^2(\rho_{\pm}) = 0$. Позже мы укажем, что необходимо изменить, если ρ_+ и ρ_- отображаются в 0 более высокой степенью f . Итак, $R \cap \Lambda = \bar{S}$. Если $f^2(\rho_{\pm}) = 0$, то $\theta(R_1) \subset \overline{R_3 \cup R_4}$, $\theta(R_2) \subset R_1$, $\theta(R_3) \subset R_4$ и $\theta(R_4) \subset \overline{R_1 \cup R_2}$. Следовательно, если $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ —

последовательность с $a_i \in \{1, 2, 3, 4\}$, то $\bigcap_{k=0}^{\infty} \theta^k(R_{a_k}) \neq \emptyset$

тогда и только тогда, когда $\{a_k\} \in \Sigma$. Если $\{a_k\} \in \Sigma$, то существует отрезок, принадлежащий R_{a_0} , который лежит в S и, следовательно, в Λ . Это позволяет представить себе Λ следующим образом. Существует канторово множество дуг, соответствующих точкам Σ , каждая из которых лежит в некотором R_i . Их концы соединяются в точках $W^u(p)$ (см. рис. 12.3). Отметим, что точки $\Lambda \setminus W^u(p)$ имеют окрестности, гомеоморфные прямому произведению двумерного диска на канторово множество.

Если ρ_+ и ρ_- отображаются в 0 другими степенями f , то сконструируем подсдвиг конечного типа следующим образом. Рассечем образ $\theta(R)$ вертикальными линиями, проходящими через каждую точку θ -траекторий точек ρ_+ и ρ_- . Тогда $\theta(R)$ разделится на конечное число компонент, скажем $R_1, \dots, R_n$. Определим $(n \times n)$ -матрицу T следующим образом:

$$T_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \theta(R_j) \cap R_i \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \theta(R_j) \cap R_i = \emptyset. \end{cases}$$

Пусть Σ — (односторонний) подсдвиг конечного типа с матрицей переходов T . Теперь каждой последовательности из Σ соответствует в точности одна дуга, лежащая в аттракторе Λ . Как и выше, замыканием множества этих отрезков будет $\Lambda \cap R$, поскольку

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \theta^k(R_{a_k}) = \emptyset, \quad \text{если } \{a_k\} \notin \Sigma.$$

Наконец, заметим, что если θ не сохраняет вертикальные отрезки, то R нужно рассекать вдоль компонент $W^s(p) \cap R$, содержащих точки из $W^u(p)$.

Доказательство теоремы 12.2.

Будем доказывать теорему 12.2 в два этапа. На первом шаге сконструируем два потока X и $\tilde{X}$ общего рассматриваемого в этой работе вида, такие, что для потока X $W^u(p) \subset W^s(p)$, а для потока $\tilde{X}$ $W^u(p) \cap W^s(p) = \{p\}$. Докажем, что X и $\tilde{X}$ имеют негомеоморфные неблуждающие множества. На втором шаге покажем, что векторные поля каждого из этих двух классов всюду плотны в некотором открытом множестве в пространстве C^r -гладких векторных полей.

Мы описали выше аттрактор $\Lambda(X)$ векторного поля X , для которого $W^u(p) \subset W^s(p)$. В этом случае Λ линейно связно и $\Lambda \setminus W^u(p)$ локально гомеоморфно прямому произведению двумерного диска на канторово множество. Кроме того, $W^u(p)$ гомеоморфно букету двух окружностей — «восьмерке».

Рассмотрим теперь аттрактор $\Lambda(\tilde{X})$ векторного поля $\tilde{X}$, для которого $W^u(p) \cap W^s(p) = \{p\}$, а Λ — двумерное множество, содержащее p . Если бы $\Lambda(\tilde{X})$ было гомеоморфно $\Lambda(X)$, $\Lambda(\tilde{X})$ было бы линейно связным. Рассмотрим множество S точек $w \in \Lambda(\tilde{X})$, окрестность каждой из которых не

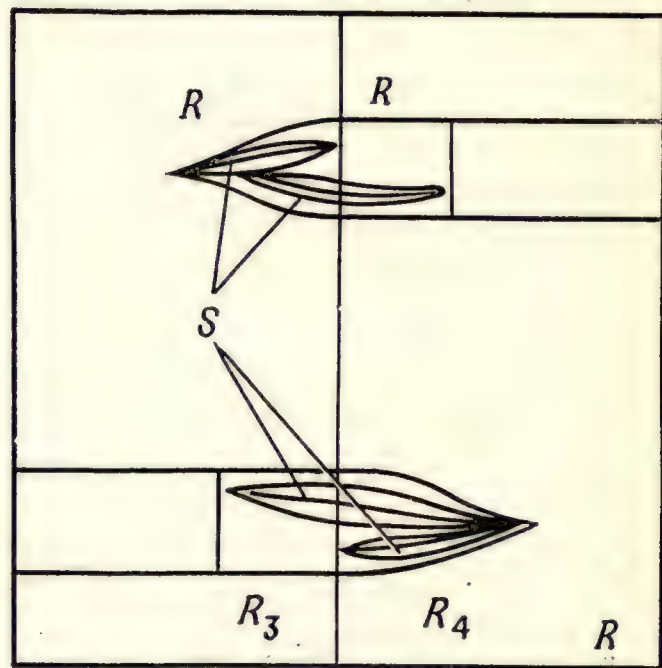


Рис. 12.3.

гомеоморфна прямому произведению двумерного диска на канторово множество. Из того, что не существует точек $\Lambda \cap R$ левее линии $x = \rho_-$ или правее линии $x = \rho_+$, легко вывести, что $W^u(p) \subset C$. Если $\Lambda(\tilde{X})$ гомеоморфно $\Lambda(\tilde{X})$, то C гомеоморфно букету двух окружностей. Так как $W^u(p) \not\subset W^s(p)$ для $\tilde{X}$ и $W^u(p) \subset C$, то в $C \setminus \{p\}$ должны существовать две точки, являющиеся ω -предельными множествами двух траекторий в $W^u(p) \setminus \{p\}$. Эти точки обязаны быть состояниями равновесия. Но состояний равновесия, отличных от p , в

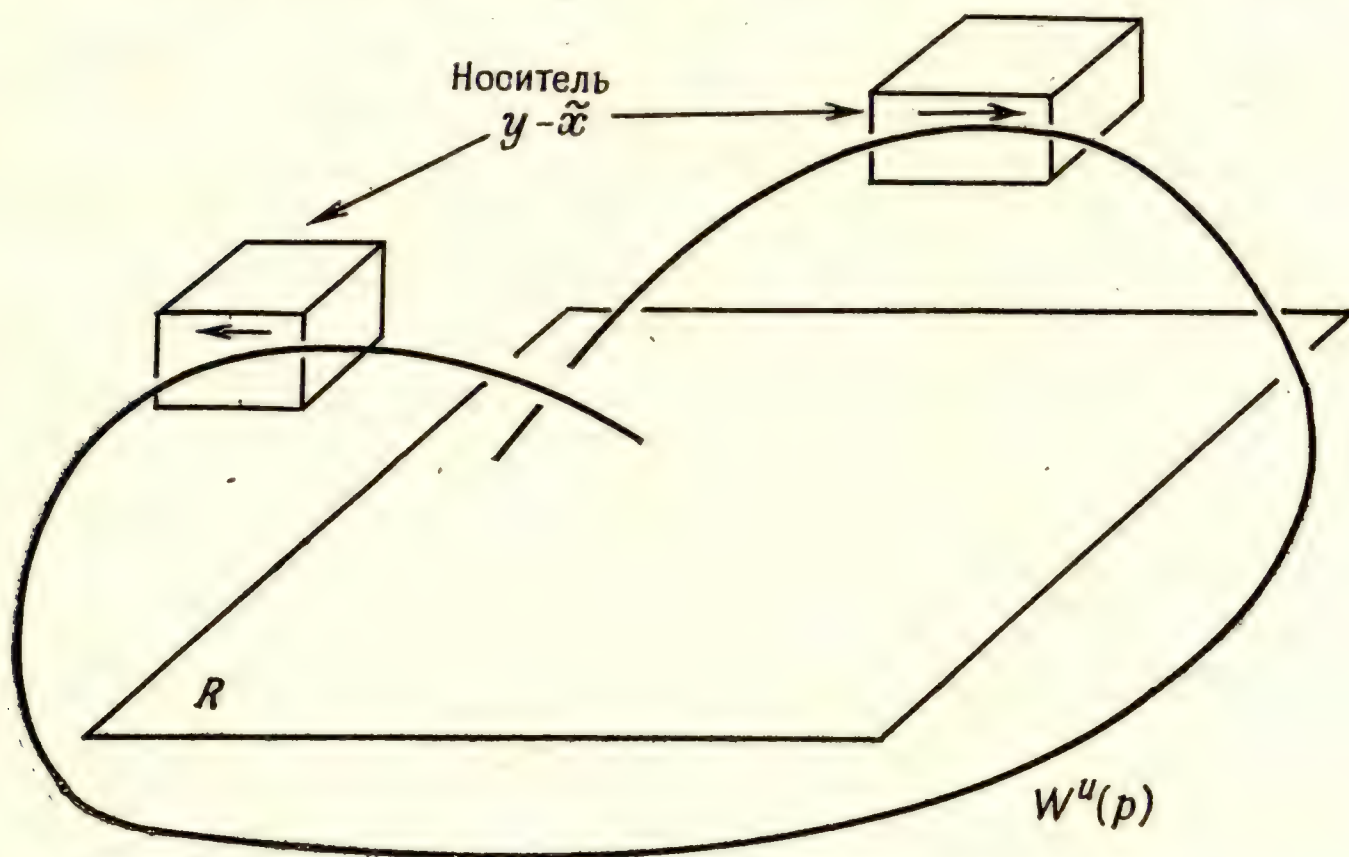


Рис. 12.4.

$\Lambda(\tilde{X})$ нет; отсюда заключаем, что C не гомеоморфно букету двух окружностей. Следовательно, $\Lambda(X)$ и $\Lambda(\tilde{X})$ не гомеоморфны. Этим завершается первый шаг доказательства.

Докажем теперь, что каждое из множеств векторных полей X и $\tilde{X}$ рассмотренного выше типа всюду плотно в некотором открытом множестве. Из теоремы Купки — Смейла следует, что векторные поля, подобные $\tilde{X}$, для которых $W^s(p) \cap W^u(p) = \{p\}$, образуют множество второй категории. Так как множество векторных полей, для которых Λ двумерно и $p \in \Lambda$, является множеством второй категории в открытом множестве, то в некотором открытом множестве всюду плотны векторные поля типа $\tilde{X}$.

Осталось доказать, что в открытом множестве векторных полей существует всюду плотное подмножество, для которого $W^u(p) \subset W^s(p)$. Посмотрим, что произойдет с многообразием $W^u(p)$ возмущения Y векторного поля $\tilde{X}$, если $\tilde{X}$ возмущать параллельно оси x , так чтобы ρ_- уменьшалось, а ρ_+ увеличивалось (см. рис. 12.4).

Будем рассматривать последовательные пересечения $W^u(p)$ с R для векторных полей Y и $\tilde{X}$. Функции f_+ и f_- сохраняют ориентацию. Следовательно, до тех пор, пока соответствующие друг другу последовательные пересечения для обоих векторных полей лежат по одну сторону от линии $x=0$, эффект возмущения проявляется в сдвиге следующих за ρ_- вдоль $W^u(p)$ пересечений влево и в сдвиге следующих за ρ_+ вдоль $W^u(p)$ пересечений вправо. Кроме того, так как отображение θ расширяет по направлению x , то расстояние между соответствующими точками пересечений должно экспоненциально расти¹⁾. Бесконечно большим это расстояние стать не может, поэтому после некоторого количества итераций соответствующие точки пересечения должны очутиться по разные стороны от линии $x=0$. Таким образом, для некоторого возмущения, промежуточного между Y и $\tilde{X}$, существуют точки пересечения $W^u(p)$ с R , лежащие на линии $x=0$ (в обоих направлениях вдоль $W^u(p)$). Это означает, что для этого промежуточного возмущения $W^u(p) \subset W^s(p)$. Отсюда следует, что в некотором открытом множестве в пространстве векторных полей всюду плотны векторные поля, для которых $W^u(p) \subset W^s(p)$, чем и заканчиваем доказательство теоремы 12.2. ■

По существующей в теории динамических систем традиции закончим главу проблемой. Описанные здесь векторные поля весьма патологичны с точки зрения топологической динамики. Кажется все же, что они сохраняют достаточно много гиперболичности, насколько это возможно без сохранения аксиомы A . Сейчас существует хорошо разработанная «статистическая механика» для аттракторов, удовлетворяющих аксиоме A (Боуэн и Рюэль [1]). Можно ли эту теорию обобщить таким образом, чтобы она была применима к векторным полям, описанным в этой работе?²⁾

¹⁾ Утверждение ошибочно. Для того чтобы расстояние росло, необходимо возмущение подобрать так, чтобы и ρ_+ , и ρ_- уменьшались. — Прим. перев.

²⁾ По этому поводу см. Бунимович и Синай [1]. — Прим. перев.

Дополнение I

ПОВЕДЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ («ОПАСНЫЕ» И «БЕЗОПАСНЫЕ» ГРАНИЦЫ)

Н. Н. Баутин, Л. П. Шильников

С рождением из состояния равновесия типа фокус (или стягиванием к нему) предельного цикла связан важный для приложений вопрос о поведении динамической системы при значениях параметров, близких к границе области устойчивости состояния равновесия (или периодического движения) и о различном характере границ области устойчивости («опасные» и «безопасные» границы). Как известно, при исследовании конкретных динамических систем и выборе значений параметров приходится считаться не только с требованием устойчивости режимов работы но и с рядом других требований. Так, например, может оказаться, что оптимальные условия работы устройства наилучшим образом достигаются выбором (в пространстве параметров) точек, лежащих вблизи границы области, дозволенной условием устойчивости. Другой важный случай связан с тем, что некоторые параметры системы могут вести себя «квазистационарно» (эволюционировать) и притом так, что система выходит на границу области устойчивости. Естественно возникает вопрос, как при этом будет вести себя система на границе области устойчивости.

Рассмотрим сначала один из возможных случаев, имеющий большое практическое значение. Пусть начало координат есть состояние равновесия динамической системы, определяемой n уравнениями первого порядка, и характеристическое уравнение соответствующей системы первого приближения имеет вид

$$\chi^n + p_1\chi^{n-1} + \dots + p_n = 0.$$

Границей области устойчивости состояния равновесия в пространстве коэффициентов p_i , на которой характеристическое уравнение имеет по крайней мере одну пару чисто мнимых корней, будет поверхность

$$R \equiv D_{n-1} = 0,$$

где D_{n-1} — предпоследний определитель в условиях Рауса — Гурвица. Будем считать коэффициенты p_i зависящими от некоторого параметра λ и предположим, что при $\lambda = \lambda_0$ выпол-

нено $R(\lambda_0) = 0$. Ляпунов показал, что для ответа на вопрос о поведении на границе области устойчивости недостаточно уравнений линейного приближения и необходим учет влияния нелинейных членов. Именно Ляпуновым были развиты специальные методы исследования, сводившие задачу исследования устойчивости состояния равновесия на границе области устойчивости к определению знаков или к необращению в нуль некоторых постоянных величин, для вычисления которых Ляпунов дал определенные рецепты и которые получили название ляпуновских величин.

С задачей о поведении динамической системы у границы области устойчивости равновесия типа фокус тесно связаны исследования Ляпунова по устойчивости движения, относящиеся к случаю, когда среди корней характеристического уравнения есть корни, лежащие на мнимой оси [17]. Оказалось, что поведение динамической системы вблизи границы области устойчивости определяется ее поведением на самой границе. Следующие утверждения, рассматриваемые в предположении, что $R(\lambda_0) = 0$, первая ляпуновская величина $L_1(\lambda_0)$ отлична от нуля, а λ изменяется на некотором достаточно малом интервале $\lambda_0 - \eta \leq \lambda \leq \lambda_0 + \eta$, характеризуют возможные типы границ области устойчивости [8, 11].

Теорема 1. Пусть $L_1(\lambda_0) < 0$, $(dR/d\lambda)_{\lambda=\lambda_0} < 0$, и пусть λ^* — фиксированное значение параметра $\lambda_0 - \eta \leq \lambda^* \leq \lambda_0 + \eta$, тогда можно указать такое ε_0 (не зависящее от λ^*), что для всякого сколь угодно малого положительного $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ можно найти такое положительное $\eta_0 < \eta$, что для любой траектории $x_s(t)$, начальные значения которой удовлетворяют неравенству $|x_s(t)| < \varepsilon_0$, для всех t , начиная с некоторого $t > t_0$, будет выполняться неравенство $|x_s(t)| < \varepsilon_1$, если только $|\lambda^* - \lambda| < \eta_0$.

Таким образом, при возрастании параметра состояние равновесия из устойчивого становится неустойчивым, однако изображающая точка остается в малой ε_1 -окрестности состояния равновесия. При обратном изменении параметра, когда состояние равновесия опять становится устойчивым, изображающая точка снова возвращается к состоянию равновесия. Система ведет себя обратимо.

Теорема 2. Пусть $L_1(\lambda_0) > 0$, $(dR/d\lambda)_{\lambda=\lambda_0} < 0$, и пусть λ^* — фиксированное значение параметра $\lambda_0 - \eta \leq \lambda^* \leq \lambda_0 + \eta$, тогда можно указать такое ε_0 (не зависящее от λ^*), что для всякого сколь угодно малого положительного $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ можно найти такое положительное $\eta_0 < \eta$, такие t_0 и t_1 ($t_1 > t_0$) и такие траектории $x_s(t, \lambda)$, что из неравенства $|\lambda^* - \lambda| < \eta_0$

для каждой из этих траекторий будут следовать неравенства $|x_s(t_0, \lambda^*)| < \varepsilon_1$, $|x_s(t_1, \lambda^*)| > \varepsilon_0$ (t_0 и t_1 могут быть различными для различных траекторий).

Таким образом, при возрастании параметра состояние равновесия при $\lambda = \lambda_0$ из устойчивого становится неустойчивым. Изображающая точка срывается с состояния равновесия и отбрасывается на достаточно далекое расстояние. При обратном изменении параметра изображающая точка не возвращается в состояние равновесия, когда оно опять становится устойчивым. Система ведет себя необратимо.

Следовательно, природа границ области устойчивости может быть двоякой.

«Безопасные» границы — это такие границы, достаточно малое нарушение которых влечет за собой лишь малые (сколь угодно малые при достаточно малых нарушениях) изменения состояния системы. Можно показать, что в этом случае координаты системы будут претерпевать лишь весьма малые периодические изменения, накладывающиеся на равновесное (теперь неустойчивое) положение системы.

«Опасные» границы — это такие границы, сколь угодно малое нарушение которых влечет за собой переход системы в новое состояние, которое не может быть приближено к исходному выбором нарушений границы достаточно малыми.

Описанные ситуации имеют простой физический смысл и соответствуют, например (в частном случае), мягкому и жесткому возникновению автоколебаний. Эти ситуации для системы двух уравнений впервые были описаны А. А. Андроновым в 1931 г. в докладе «Математические проблемы теории автоколебаний» на I Всесоюзной конференции по колебаниям [1].

Выяснение особенностей поведения динамической системы вблизи границ области устойчивости в связи с возникновением или исчезновением периодических решений, классификация основных типов границ и типов поведения, а также разыскание соответствующих критериев представляют и более общий интерес с точки зрения теории бифуркаций. Мы приведем здесь некоторые факты, относящиеся к этой проблеме.

1. Опасные и безопасные границы. Поведение траектории. Алгоритмические критерии

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = ax + by + P(x, y), \quad \dot{y} = cx + dy + Q(x, y), \quad (1)$$

где

$$P(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} Q_{ij} x^i y^j, \quad Q(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j$$

и коэффициенты можно считать зависящими от некоторого параметра λ (параметров λ_i).

В начале координат будет устойчивый фокус, если

$$q \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0, \quad p \equiv -(a + d) > 0, \quad p^2 - 4q < 0.$$

Следуя Ляпунову и Андронову [17, 2], строим в окрестности начала координат функцию

$$\psi(\rho_0, p) = \left(e^{-\frac{2\pi}{\omega} p} - 1 \right) \rho_0 + \alpha_2 \rho_0^2 + \alpha_3 \rho_0^3 + \dots \quad (2)$$

Теорема (Ляпунова). *Первый не равный нулю коэффициент в разложении функции $\psi(\rho_0, 0)$ непременно нечетного номера.*

Если $p = 0$, то первый не равный нулю коэффициент α_i называется ляпуновской величиной: $\alpha_3 \equiv L_1$ — первая ляпуновская величина; если $\alpha_3 = 0$, $\alpha_5 \neq 0$, то $\alpha_5 \equiv L_2$ — вторая ляпуновская величина, и т. д.

Рассмотрение функции (2) в зависимости от параметров позволяет сделать исчерпывающие заключения относительно характера траекторий в окрестности состояния равновесия $x = y = 0$ при различных значениях параметров. Отличные от нуля корни функции соответствуют предельным циклам. Вычисление ляпуновских величин в общем случае системы n уравнений с характеристическим уравнением, имеющим пару чисто мнимых корней и остальные корни с отрицательной действительной частью, с помощью процедуры, указанной Ляпуновым, приводится к вычислению тех же величин α_i для некоторой системы второго порядка вида (1), выводимой из предложенной системы n уравнений.

Первая ляпуновская величина, выраженная через коэффициенты системы (1), приведена в [4, 8, 11, 13]. Вторая ляпуновская величина вычислена в [21]. Для системы трех и четырех уравнений общего вида в [11] изложено развернутое приведение к каноническому виду и вычислена первая ляпуновская величина через коэффициенты преобразованной системы (в случае четырех уравнений отдельно для случая, когда вторая пара корней комплексная и когда она действительная). Для системы n уравнений в случае, когда разложения правых частей не содержат членов второго порядка, в [11] дано выражение первой ляпуновской величины в виде интеграла по кривым вспомогательной консервативной системы без приведения исходной системы к каноническому виду. Там же даны аналогичные выражения первой ляпуновской величины и для общего вида систем двух, трех и четырех уравнений.

Опишем применительно к системе (1) простейшие возможные случаи.

А. Пусть $p(\lambda_0) = 0$ и $L_1(\lambda_0) < 0$. При переходе через границу $p = 0$ от положительных значений к отрицательным появляется единственный устойчивый предельный цикл. При обратном изменении параметра устойчивый предельный цикл стягивается в точку. Переход через границу $p = 0$ соответствует возникновению области неустойчивости внутри устойчивого предельного цикла, которая, однако, остается сколь угодно малой при достаточно малом нарушении условия устойчивости и стягивается в точку при обратном изменении параметра. Практически система при малом нарушении условия устойчивости будет вести себя как устойчивая (граница области устойчивости — безопасная).

Б. Пусть $p(\lambda_0) = 0$ и $L_1(\lambda_0) > 0$. При переходе через границу $p = 0$ от положительных значений к отрицательным к состоянию равновесия стягивается единственный неустойчивый предельный цикл. При обратном изменении параметра из состояния равновесия появляется неустойчивый предельный цикл. Переход через границу $p = 0$ соответствует исчезновению области устойчивости внутри неустойчивого предельного цикла; изображающая точка при этом срывается с состояния равновесия и уходит за пределы рассматриваемой окрестности состояния равновесия (граница области устойчивости — опасная).

Особенности в поведении динамической системы вблизи тех точек границы $p = 0$, где безопасная часть границы переходит в опасную и где, следовательно, первый ляпуновский коэффициент $L_1(\lambda_0)$ обращается в нуль, определяются знаком второй ляпуновской величины $L_2(\lambda_0)$, для вычисления которой необходимо учесть в разложениях правых частей уравнения (1) члены до пятого порядка включительно. В возможностях, которые здесь возникают, можно ориентироваться, рассматривая функцию (2). Нетрудно показать [10], что если в ряду коэффициентов p , $\alpha_3 \equiv L_1(\lambda)$, $\alpha_5 \equiv L_2(\lambda)$ имеются одна или две перемены знака, то в малой окрестности начала координат будут существовать один или два корня функции $\psi(p_0, p)$ и соответственно один или два предельных цикла на фазовой плоскости вокруг начала координат.

В зависимости от знаков первой и второй ляпуновских величин и знака действительной части корней характеристического уравнения в окрестности начала координат могут существовать один или два предельных цикла при всех возможных сочетаниях устойчивости и неустойчивости. Знак второй ляпуновской величины определяет при этом характер устойчивости внешнего предельного цикла и поэтому играет здесь

роль, совершенно подобную роли знака первой ляпуновской величины, увеличивая или уменьшая опасность для изображающей точки быть выброшенной случайным толчком из малой окрестности состояния равновесия.

В общем случае системы n уравнений с характеристическим уравнением, имеющим одну пару чисто мнимых корней и остальные корни с отрицательной действительной частью, все сказанное о поведении траекторий системы (1) будет

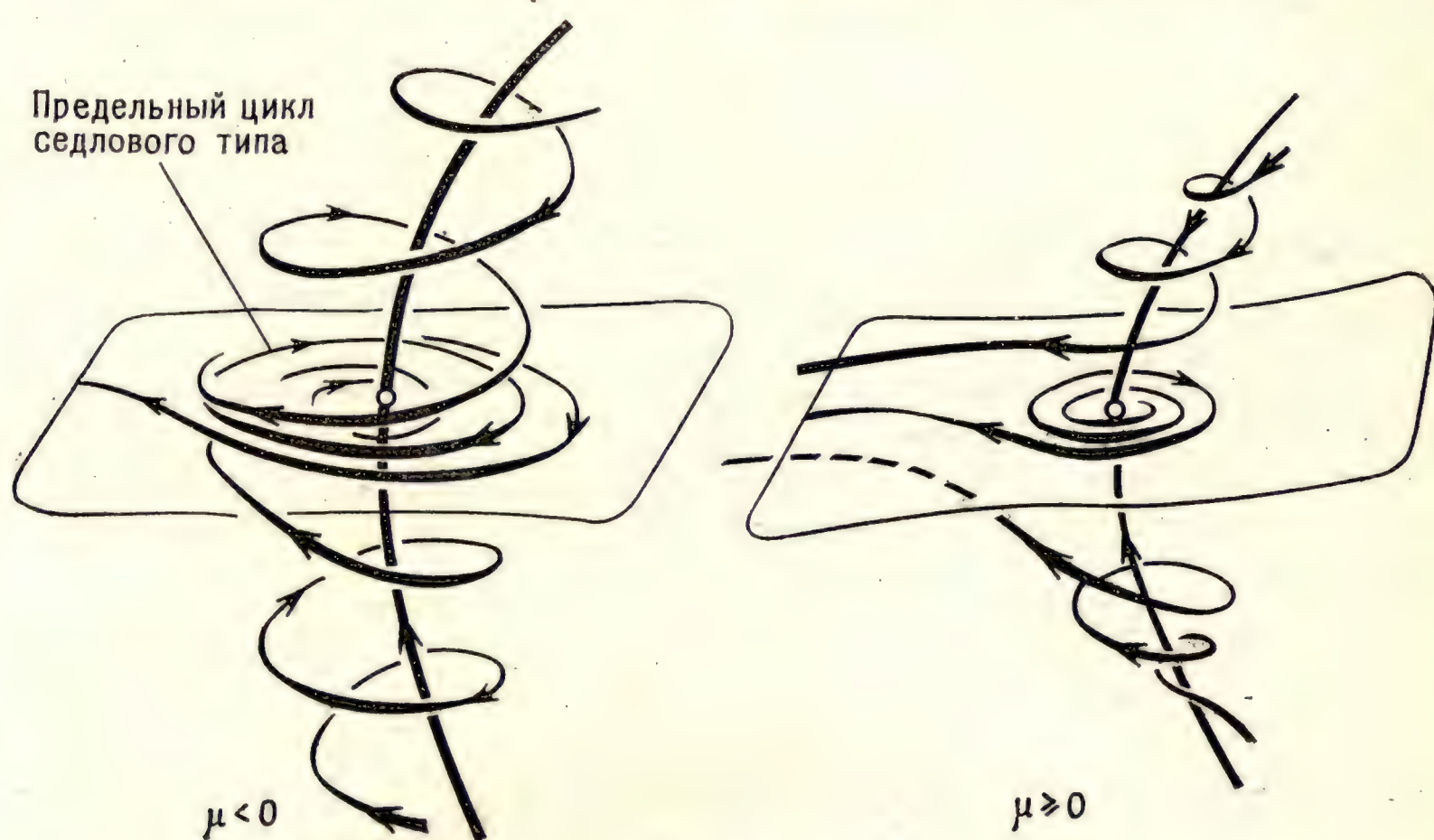


Рис. 1.

справедливо по отношению к некоторому двумерному многообразию в фазовом пространстве системы, заполненному траекториями и содержащему состояние равновесия и предельные циклы (если последние существуют). Для остальных траекторий это многообразие будет элементом притяжения. Изложенное иллюстрирует (применительно к системе трех уравнений) рис. 1. В случае $L_1(\lambda_0) < 0$ при изменении знака ρ неустойчивый предельный цикл, расположенный на двумерном многообразии, стягивается к состоянию равновесия. При этом исчезает пространственная область устойчивости, заполненная траекториями, идущими к состоянию равновесия (область стягивается к паре сепаратрис, идущих в состояние равновесия).

Рассмотрим поведение динамической системы в малой окрестности точки на границе области устойчивости, в которой первая ляпуновская величина обращается в нуль. Рис. 2а, б дают разбиения плоскости параметров (параметрами могут быть, например, сами величины ρ и L_1) для слу-

чаев $L_2 > 0$ и $L_2 < 0$ в точке смыкания опасной и безопасной границ. Жирной линией отмечена безопасная часть границы $p = 0$, тонкой — опасная. Пунктиром отмечена бифуркационная кривая двойных циклов. Ее точкам соответствуют двойные циклы (полуустойчивые), возникшие из сгущения траекторий. При смещении параметров с кривой двойных циклов двойной предельный цикл либо исчезает, либо разделяется на два (устойчивый и неустойчивый). Если $L_2 > 0$, то при обходе точки $p = 0$, $L_1 = 0$, начиная с области $p > 0$,

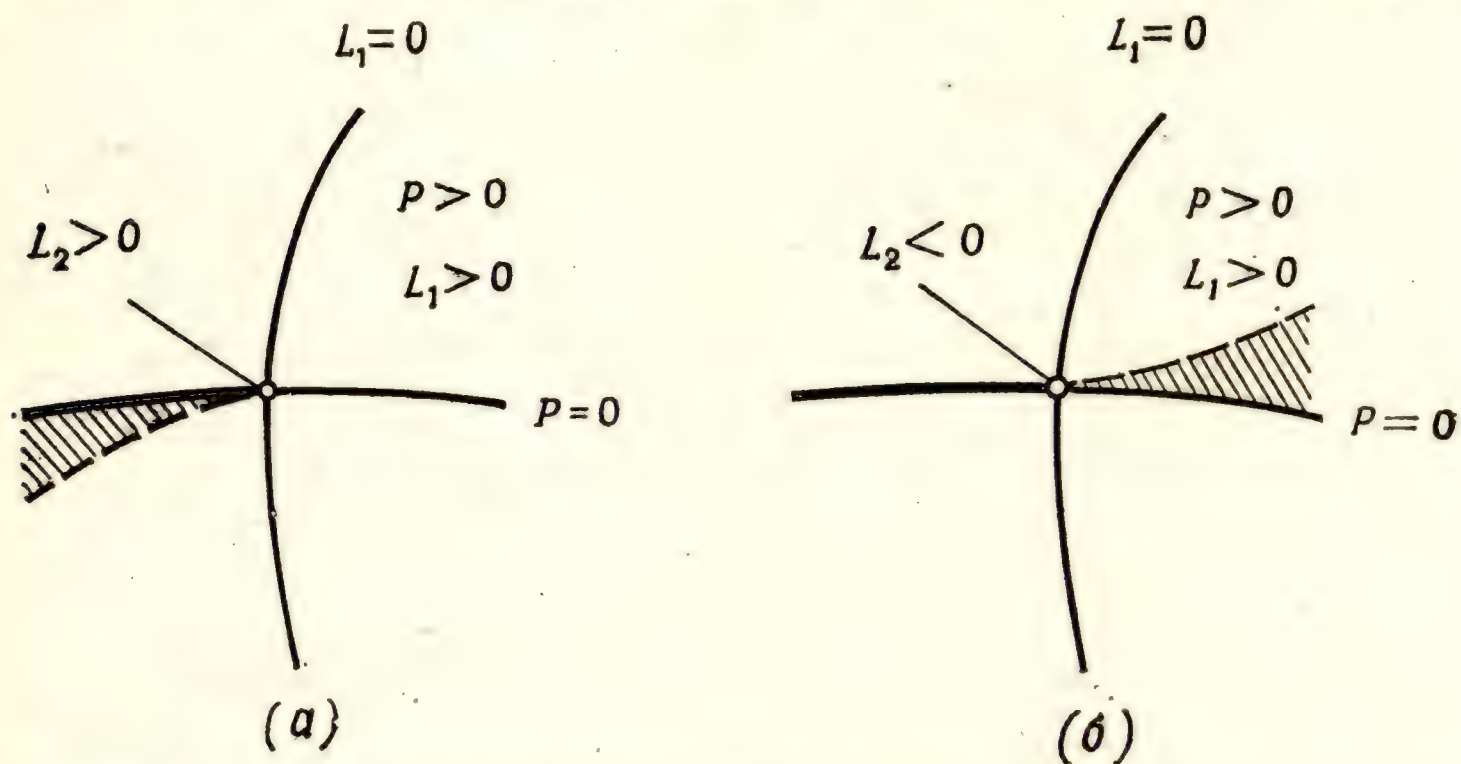


Рис. 2. Разбиение плоскости параметров в окрестности точки, где опасная часть границы переходит в безопасную.

$L_1 < 0$ в направлении против часовой стрелки, последовательно осуществляются бифуркации: рождение устойчивого предельного цикла из состояния равновесия, слияние неустойчивого предельного цикла с устойчивым, исчезновение двойного цикла, рождение неустойчивого цикла. Если $L_2 < 0$, то бифуркации осуществляются в таком порядке: рождение устойчивого, рождение неустойчивого, слияние устойчивого с неустойчивым и исчезновение двойного цикла. Штриховкой покрыта область существования двух циклов. Оценка расположения бифуркационной кривой двух циклов в зависимости от значения L_2 дана в [21]. Асимптотическое представление кривой двойных циклов (в обозначениях разд. 1) дается формулой

$$\sqrt{q} L_1^2 + 8\pi L_2 p = 0 \quad (L_1 L_2 < 0).$$

Более сложные ситуации возникают, если первая не обращающаяся в нуль на границе $p = 0$ ляпуновская величина будет L_k , где $k > 2$. В этом случае при малых изменениях параметров λ_i в окрестности состояния равновесия в начале

координат может появиться более двух предельных циклов. Ситуации здесь будут похожими на уже рассмотренные при $L_1 \neq 0$ или $L_2 \neq 0$ на границе $\rho = 0$ и будут зависеть от знака первой отличной от нуля ляпуновской величины и от того, сколько будет циклов (четное или нечетное число). Сложность, возникающая в этом случае, связана в первую очередь с тем, что технические трудности вычисления последовательных ляпуновских величин с ростом их номера быстро возрастают. Эту трудность можно обойти, используя ЭВМ для алгебраического вычисления ляпуновских величин.

С. Д. Щуко [29, 30, 31] разработала алгоритм, позволяющий последовательно вычислять на ЭВМ ляпуновские величины (каждую следующую в предположении равенства нулю всех предыдущих). В качестве исходной для вычисления ляпуновских величин рассматривается каноническая система уравнений

$$\dot{x} = -y + \sum_{m=2}^n P_m(x, y), \quad \dot{y} = x + \sum_{m=2}^n Q_m(x, y), \quad (3)$$

где P_m и Q_m — однородные полиномы степени m , взятые из разложений правых частей системы (1) после приведения ее к каноническому виду, наибольшие степени которых, n , согласуются с порядковым номером вычисляемой ляпуновской величины.

Для вычислений удобны методы, позволяющие осуществлять внутренний контроль вычислений в силу симметрии получающихся выражений. Это реализуется при переходе к комплексным переменным [14].

Полагая $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, получаем

$$\frac{d\bar{z}}{dz} = - \frac{\bar{z} + Z(z, \bar{z})}{z + \bar{Z}(z, \bar{z})}, \quad (4)$$

где

$$Z(z, \bar{z}) = \sum_{m=2}^n \sum_{k=0}^m a_{km} z^k \bar{z}^{m-k},$$

$$\bar{Z}(z, \bar{z}) = \sum_{m=2}^n \sum_{k=0}^m \bar{a}_{km} \bar{z}^k z^{m-k}.$$

Наличие центра в начале координат равносильно существованию голоморфного интеграла

$$\Phi(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \Phi_{k, m-k} z^k \bar{z}^{m-k} \quad (5)$$

уравнения

$$L(\Phi) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{d\bar{z}}{dt}. \quad (6)$$

Функции $\Phi(z, \bar{z})$ сопоставляется последовательность $(m+1)$ -мерных комплексных векторов Φ_m с компонентами, являющимися коэффициентами однородных полиномов степени m из (5):

$$\Phi_m = \{\Phi_{0, m}; \Phi_{1, m-1}; \dots; \Phi_{m-1, 1}; \Phi_{m, 0}\}.$$

Для того чтобы в начале координат был центр системы (3), необходимо и достаточно [18], чтобы векторное уравнение (6) имело решение $\Phi = \{\Phi_m\}$, удовлетворяющее условиям

$$\Phi_{0, 0} = \Phi_{0, 1} = \Phi_{1, 0} = \Phi_{0, 2} = \Phi_{2, 0} = 0; \quad \Phi_{k, k} = 0, \quad k \geq 2;$$

$$\Phi_{1, 1} = 1; \quad \Phi_{k, m-k} = \bar{\Phi}_{m-k, k}.$$

Векторы Φ_m находятся по рекуррентной формуле

$$\Phi_m = -C_{m, m}^{-1} \left\{ \sum_{l=2}^{m-1} C_{m, l} \Phi_l \right\}, \quad m > 2. \quad (7)$$

Здесь $C_{m, l} = \{c_{rs}^{(m, l)}\}$ — матрица из $m+1$ строк и $l+1$ столбцов, причем

$$c_{rs}^{(m, l)} = (l-s) a_{r-s, m-l+1} + s \bar{a}_{m-l-r+s, m-l+1},$$

где r — номер строки, s — номер столбца, $C_{m, m}^{-1} = \{c_{rs}^{-1}\}$ — квадратная диагональная $(m+1)$ -матрица с элементами вида

$$c_{rs}^{-1} = \begin{cases} -\frac{i\delta_{rs}}{m-2s} & \text{при } m \neq 2s \\ 0 & \text{при } m = 2s \end{cases}; \quad \delta_{rs} \text{ — символ Кронекера.}$$

Ляпуновские величины имеют тогда вид

$$L_k \equiv \alpha_{2k+1} = i \sum_{l=2}^{2k-1} T_{2k, l} \Phi_l,$$

где $T_{2k, l}$ — средняя строка матрицы $C_{2k, l}$. Поскольку все элементы матриц, входящих в (7), содержат в качестве множителя i , вектор Φ_m не будет иметь мнимого множителя.

При реализации алгоритма на ЭВМ нужно учитывать необходимость проведения тождественных алгебраических преобразований над полиномами, коэффициенты которых являются обыкновенными дробями, и недопустимость приближенного представления дробей как в записи исходной информации, так и на всех промежуточных этапах. Поэтому для реализации алгоритма строится арифметика обыкновенных дробей, сохраняющая целочисленность числителя и знаменателя и обеспечивающая возможность выполнения в целых

числах операций умножения, сложения и сокращения обыкновенных дробей без использования арифметических операций, реализованных в системе команд ЭВМ, а также перевод числителя из двоичной системы в десятичную [31].

Как видно из (7), для построения вектора Φ_m необходимо хранить в оперативной памяти машины предыдущие векторы, что предъявляет определенные требования к объему памяти машины.

Разработанный алгоритм был применен С. Д. Щуко для вычисления ляпуновских величин некоторых систем вида (3).

а) Для системы

$$\dot{x} = -y + P_2(x, y), \quad \dot{y} = x + Q_2(x, y), \quad (8)$$

приведенной к виду (4), где

$$Z(z, \bar{z}) = \alpha \bar{z}^2 + \beta z \bar{z} + \gamma z^2,$$

получены три последовательные ляпуновские величины

$$\alpha_3 = \bar{\alpha} \bar{\beta} - \alpha \beta;$$

$$\alpha_5 = \frac{2}{3} (\bar{\alpha}^2 \bar{\beta} \bar{\gamma} - \alpha^2 \bar{\beta} \gamma) + \frac{2}{3} (\bar{\beta}^3 \gamma - \beta^3 \bar{\gamma}) + \bar{\alpha} \beta^2 \bar{\gamma} - \alpha \bar{\beta}^2 \gamma;$$

$$\begin{aligned} \alpha_7 = & 8 (\alpha^2 \bar{\beta} \bar{\beta}^2 \gamma - \bar{\alpha}^2 \bar{\beta} \beta^2 \bar{\gamma}) + \frac{5}{4} (\bar{\alpha} \beta^2 \bar{\gamma}^2 \gamma - \alpha \bar{\beta}^2 \gamma^2 \bar{\gamma}) + \\ & + \frac{5}{8} (\bar{\beta}^3 \gamma^2 \bar{\gamma} - \beta^3 \bar{\gamma}^2 \gamma) + \frac{53}{4} (\alpha \beta \bar{\beta}^3 \gamma - \bar{\alpha} \bar{\beta} \beta^3 \bar{\gamma}) + \frac{69}{8} (\bar{\beta} \beta^4 \bar{\gamma} - \beta \bar{\beta}^4 \gamma). \end{aligned}$$

б) Для системы

$$\dot{x} = -y + P_3(x, y), \quad \dot{y} = x + Q_3(x, y), \quad (9)$$

приведенной к виду (4), где

$$Z(z, \bar{z}) = \alpha \bar{z}^3 + \beta \bar{z}^2 z + \gamma z^2 \bar{z} + \delta z^3,$$

получено шесть последовательных ляпуновских величин

$$\alpha_3 = k_3 (\beta - \bar{\beta}), \quad \alpha_5 = k_5 (\alpha \gamma - \bar{\alpha} \bar{\gamma}),$$

$$\alpha_7 = k_7 \left[(\alpha^2 \delta - \bar{\alpha}^2 \bar{\delta}) + \frac{8}{3} (\alpha \bar{\gamma} \delta - \bar{\alpha} \gamma \bar{\delta}) + (\gamma^2 \delta - \bar{\gamma}^2 \bar{\delta}) \right],$$

$$\alpha_9 = k_9 \left[(\alpha \bar{\gamma} \delta - \bar{\alpha} \gamma \bar{\delta}) + \frac{1}{3} (\gamma^2 \bar{\delta} - \bar{\gamma}^2 \delta) \right] \bar{\beta},$$

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = & k_{11} \left[(\alpha \bar{\gamma} \delta - \bar{\alpha} \gamma \bar{\delta}) \left(\frac{207}{4} \bar{\alpha} \bar{\gamma} + \delta \bar{\delta} \right) + \right. \\ & \left. + (\gamma^2 \bar{\delta} - \bar{\gamma}^2 \delta) \left(\frac{1}{3} \delta \bar{\delta} - 134 \bar{\alpha} \bar{\gamma} + \frac{605}{12} \gamma \bar{\gamma} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\alpha_{13} \equiv 0, \quad k_j = \text{const} > 0.$$

В случаях а) и б) обращение в нуль найденных ляпуновских величин дает необходимые и достаточные условия центра для систем (8) и (9), полученные впервые соответственно Каптейном [15] и К. Е. Малкиным [18].

У систем (8) и (9) при изменении коэффициентов (в том числе и линейных членов) из состояния равновесия (0, 0) не может появиться более трех (для системы (8)) или более пяти (для системы (9)) предельных циклов [10, 22].

в) Для системы

$$\dot{x} = -y + P_5(x, y), \quad \dot{y} = x + Q_5(x, y),$$

приведенной к виду (4), где

$$Z(z, \bar{z}) = \alpha \bar{z}^5 + \beta \bar{z}^4 z + \gamma \bar{z}^3 z^2 + \delta \bar{z}^2 z^3 + \varepsilon \bar{z} z^4 + \zeta z^5,$$

получены первые три ляпуновские величины

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= k_3 (\gamma - \bar{\gamma}), \quad \alpha_5 = k_5 [(\alpha \varepsilon - \bar{\alpha} \bar{\varepsilon}) + (\beta \delta + \bar{\beta} \bar{\delta})], \\ \alpha_7 &= k_7 \left[(\alpha \beta \zeta - \bar{\alpha} \bar{\beta} \bar{\zeta}) + \frac{9}{2} (\alpha \delta^2 - \bar{\alpha} \bar{\delta}^2) + \frac{3}{2} (\bar{\alpha} \beta \bar{\delta} - \alpha \bar{\beta} \delta) + \right. \\ &\quad + \frac{9}{2} (\alpha \bar{\delta} \zeta - \bar{\alpha} \delta \bar{\zeta}) + \frac{9}{2} (\beta \bar{\delta} \varepsilon - \bar{\beta} \delta \bar{\varepsilon}) + 3 (\beta \bar{\varepsilon} \zeta - \bar{\beta} \varepsilon \bar{\zeta}) + \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} (\delta^2 \bar{\varepsilon} - \bar{\delta}^2 \varepsilon) + \frac{5}{2} (\delta \varepsilon \bar{\zeta} - \bar{\delta} \bar{\varepsilon} \zeta) \right], \quad k_j = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

г) В общем случае системы

$$\dot{x} = -y + P(x, y), \quad \dot{y} = x + Q(x, y),$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — функции, аналитические в окрестности начала координат, разложения которых начинаются с членов порядка не меньше двух, для вычисления α_3 в разложениях правых частей нужно удерживать члены до третьего порядка включительно, а для вычисления α_5 — до пятого включительно. После приведения (10) к виду (4) получаем

$$\begin{aligned} Z(z, \bar{z}) &= \alpha \bar{z}^2 + \beta \bar{z} z + \gamma z^2 + \delta \bar{z}^3 + \varepsilon \bar{z}^2 z + \varphi \bar{z} z^2 + \psi z^3 + \\ &\quad + \kappa \bar{z}^4 + \lambda \bar{z}^3 z + \mu \bar{z}^2 z^2 + \nu \bar{z} z^3 + \pi z^4 + \rho \bar{z}^5 + \sigma \bar{z}^4 z + \\ &\quad + \tau \bar{z}^3 z^2 + \theta \bar{z}^2 z^3 + \zeta \bar{z} z^4 + \chi z^5. \end{aligned}$$

Первые две ляпуновские величины будут

$$\begin{aligned} \alpha_3 = & -\alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta} + \varepsilon - \bar{\varepsilon}, \\ \alpha_5 = & -\frac{2}{3}(\alpha^2\bar{\beta}\gamma - \bar{\alpha}^2\beta\bar{\gamma}) + (\bar{\alpha}\beta^2\bar{\gamma} - \alpha\bar{\beta}^2\gamma) + \frac{2}{3}(\bar{\beta}^3\gamma - \beta^3\bar{\gamma}) + \\ & + (\alpha\bar{\beta}\bar{\delta} - \bar{\alpha}\beta\delta) + \frac{2}{3}(\alpha\gamma\delta - \bar{\alpha}\bar{\gamma}\bar{\delta}) + 2(\beta^2\delta - \bar{\beta}^2\bar{\delta}) + \\ & + \frac{5}{3}(\bar{\beta}\gamma\delta - \beta\bar{\gamma}\bar{\delta}) + (\bar{\varepsilon} - \varepsilon)\bar{\alpha}\bar{\beta} + \frac{4}{3}(\bar{\varepsilon} - \varepsilon)\gamma\bar{\gamma} + \\ & + (\alpha\beta\varphi - \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\varphi}) + \frac{2}{3}(\alpha\gamma\bar{\varphi} - \bar{\alpha}\bar{\gamma}\varphi) + (\beta\bar{\gamma}\varphi - \bar{\beta}\gamma\bar{\varphi}) + \\ & + \frac{2}{3}(\alpha\bar{\gamma}\psi - \bar{\alpha}\gamma\bar{\psi}) + \frac{1}{3}(\beta\gamma\bar{\psi} - \bar{\beta}\bar{\gamma}\psi) + (\bar{\delta}\bar{\varphi} - \delta\varphi) + \\ & + (\varepsilon - \bar{\varepsilon})\varepsilon - \frac{4}{3}(\gamma\kappa - \bar{\gamma}\bar{\kappa}) + (\bar{\alpha}\lambda + \alpha\bar{\lambda}) + \\ & + 2(\bar{\beta}\bar{\lambda} - \beta\lambda) + (\beta\bar{\mu} - \bar{\beta}\mu) + \frac{1}{3}(\gamma\bar{v} - \bar{\gamma}v) + (\tau - \bar{\tau}). \end{aligned}$$

2. Основные типы границ областей устойчивости состояний равновесия и периодических движений

Рассмотрим n -мерную гладкую динамическую систему, задаваемую уравнениями

$$\dot{x} = X(x, \lambda)$$

и непрерывно зависящую от параметров $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$. Предположим, что система при $\lambda = \lambda_0$ имеет сток Γ_{λ_0} , который есть либо грубое устойчивое состояние равновесия, либо грубое устойчивое периодическое движение. Тогда, как известно, при всех достаточно малых $\lambda - \lambda_0$ система также будет иметь сток Γ_λ , близкий к Γ_{λ_0} . Введем понятие стока Γ рассматриваемой системы и его области устойчивости. Предварительно заметим, однако, что на эту систему, зависящую от λ , нужно смотреть как на k -параметрическое семейство систем X_λ .

Системы X_{λ_1} и X_{λ_2} будем называть Γ -эквивалентными, если в пространстве параметров существует простая дуга Λ , соединяющая системы X_{λ_1} и X_{λ_2} и такая, что система X_λ при $\lambda \in \Lambda$ имеет грубый сток Γ_λ , непрерывно зависящий от λ . Множество Γ -эквивалентных систем в пространстве параметров будем обозначать через D_Γ и называть областью устойчивости стока Γ рассматриваемой системы или областью грубости устойчивого движения Γ .

Современное состояние теории устойчивости и теории бифуркаций позволяет в принципе решить задачу, связанную с выделением основных типов границ области D_Γ , т. е. гипер-

поверхностей S^{k-1} размерности $k - 1$. Для изучения переходов через эти граничные поверхности удобно ограничиться рассмотрением однопараметрических семейств $X_{\lambda(\mu)} = X(\mu)$, где $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$ и выбирается так, что при $\mu < 0$ будет $X(\mu) \in D_\Gamma$, $X(0) \in S^{k-1}$, а при $\mu > 0$ будет $X(\mu) \notin \bar{D}_\Gamma$. Сток Γ при $\mu < 0$ будем тогда обозначать через $\Gamma(\mu)$, а топологический предел $\Gamma(\mu)$ при $\mu \rightarrow 0$ через Γ^* . Множество Γ^* есть состояние равновесия, если $\Gamma(\mu)$ — состояние равновесия. В случае же, когда $\Gamma(\mu)$ есть периодическое движение, Γ^* может быть и более сложным множеством. Так, Γ^* в ряде случаев есть контур, составленный из траекторий, одной из которых является состояние равновесия¹⁾.

Критерии безопасных границ. 1. Пусть $\Gamma(\mu)$ — состояние равновесия и Γ^* на границе имеет только одну пару чисто мнимых корней. Как известно, в этом случае система $X(\mu)$ в некоторых подходящих переменных может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \rho(\mu)x - \omega(\mu)y + [L(\mu)x - a(\mu)y](x^2 + y^2) + \dots \\ &\quad \dots + f(x, y, z)z, \\ \dot{y} &= \omega(\mu)x + \rho(\mu)y + [a(\mu)x + L(\mu)y](x^2 + y^2) + \dots \\ &\quad \dots + g(x, y, z)z, \\ \dot{z} &= [A(\mu) + h(x, y, z)]z,\end{aligned}$$

где $\omega(0) \neq 0$, $\rho(0) = 0$ и $\rho(\mu) \cdot \mu > 0$ при $\mu \neq 0$, а матрица $A(\mu)$ устойчивая. Граница S_1^{k-1} , соответствующая этому случаю, будет безопасной, если $L(0) < 0$. При возрастании μ от нуля из устойчивого негрубого фокуса Γ^* рождается устойчивое периодическое движение, которое и будет установившимся режимом системы (рис. 3).

2. Пусть $\Gamma(\mu)$ — периодическое движение и при выходе на границу области устойчивости один из мультипликаторов становится равным (-1) . Соответствующее отображение последования T на площадке, трансверсальной к периодическому движению, можно записать в виде

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \rho(\mu)x + a_2(\mu)x^2 + a_3(\mu)x^3 + \dots + f(x, y, \mu)y, \\ \bar{y} &= [A(\mu) + g(x, y, \mu)]y,\end{aligned}$$

где $\rho(0) = -1$, $|\rho(\mu)| < 1$ при $\mu < 0$ и $|\rho(\mu)| > 1$ при $\mu > 0$, а собственные числа $A(\mu)$ лежат внутри единичной окружности. Граница S_2^{k-1} , соответствующая этому случаю, будет безопасной, если ляпуновская величина $L(0) = -2a_3(0) -$

¹⁾ Невозможность других бифуркационных пленок коразмерности один, соответствующих другим топологическим пределам $\Gamma(\mu)$, в настоящее время полностью еще не доказана.

— $2a_2(0)^2$, отрицательна. Из вида отображения T следует, что инвариантное многообразие, соответствующее $y=0$, есть лист

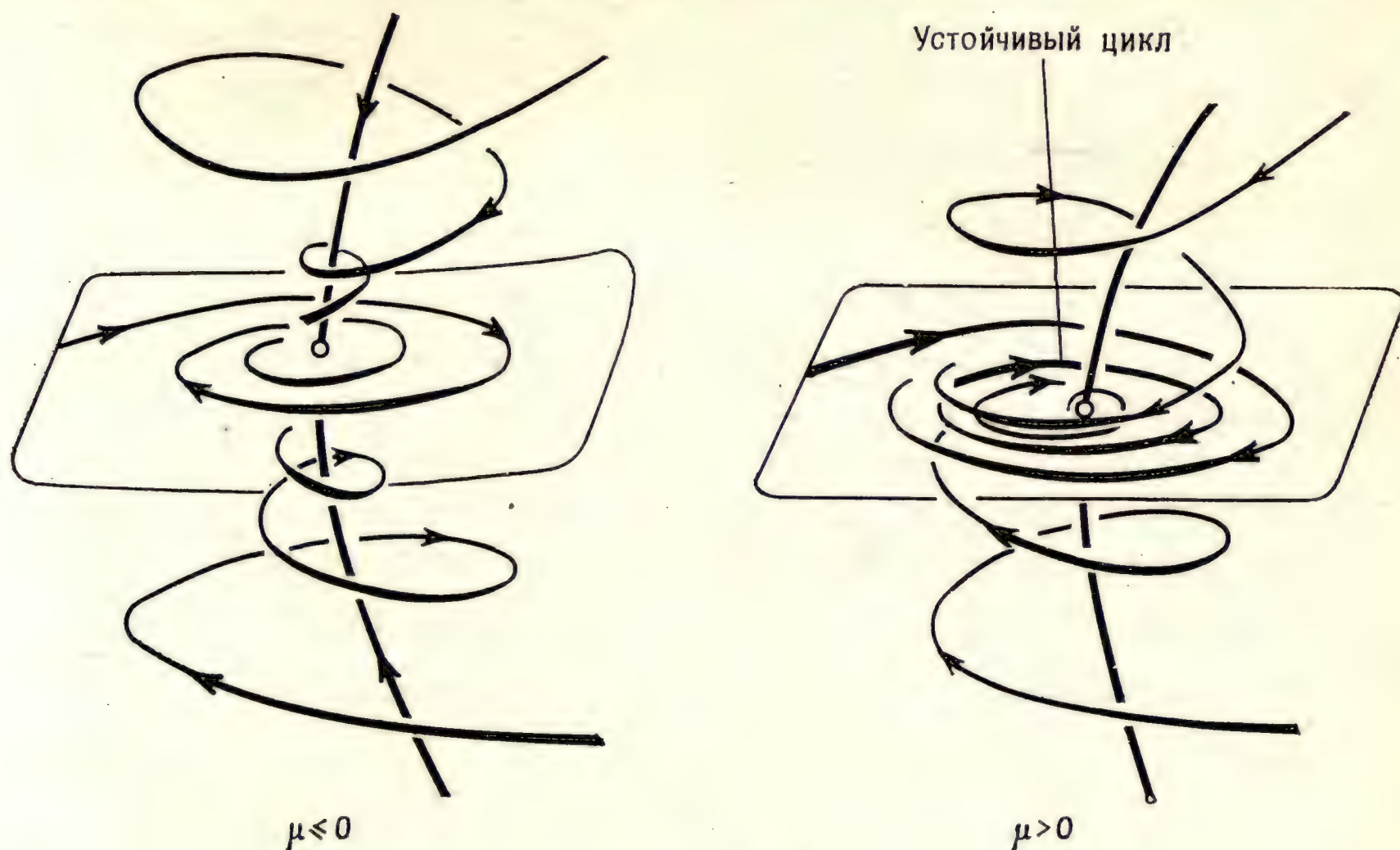


Рис. 3.

Мёбиуса со средней линией, являющейся нашим периодическим движением. Поэтому при $\mu > 0$ от него будет ответвляться

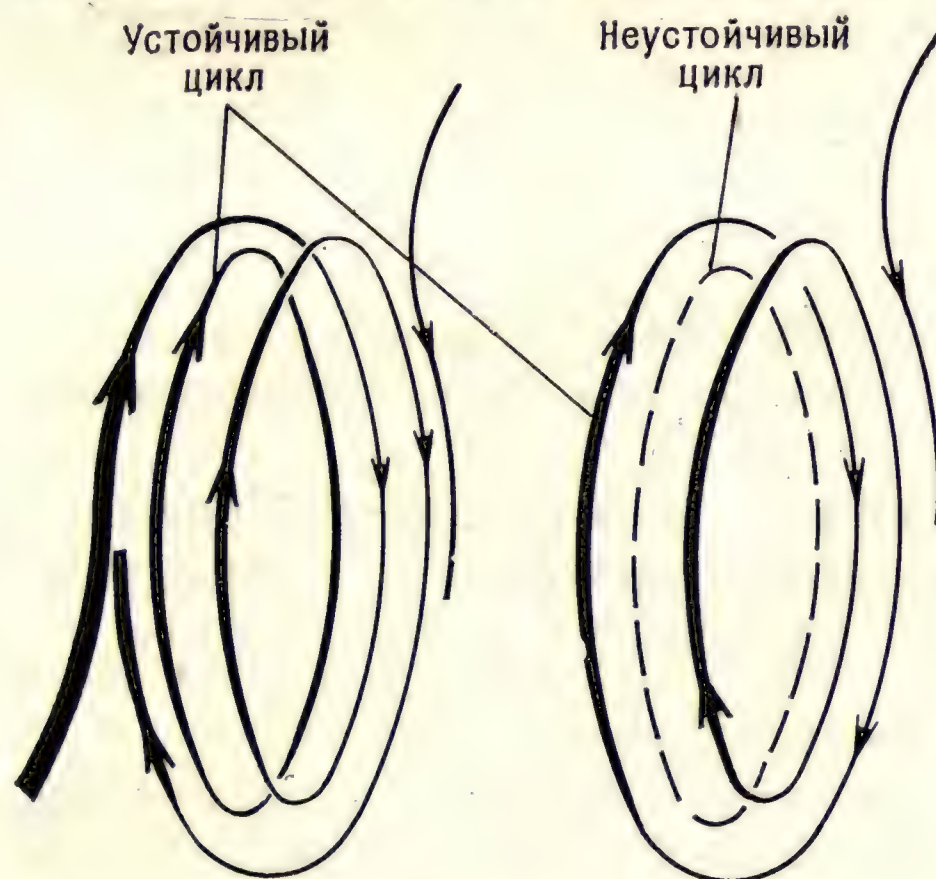


Рис. 4.

устойчивое периодическое движение с периодом, близким к удвоенному периоду Γ^* [20], на которое и будет «наматываться» изображающая точка (рис. 4).

3. Пусть $\Gamma(\mu)$ — периодическое движение и при выходе системы на границу два мультипликатора становятся равными $e^{i\varphi(0)}$, где $\varphi(0) \neq 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$. Здесь отображение последования T можно записать в виде

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \rho(\mu)[x \cos \varphi(\mu) - y \sin \varphi(\mu)] + \\ &\quad + [g(\mu)x - b(\mu)y](x^2 + y^2) + \dots + f(\mu)z, \\ \bar{y} &= \rho(\mu)[x \sin \varphi(\mu) + y \cos \varphi(\mu)] + \\ &\quad + [b(\mu)x + g(\mu)y](x^2 + y^2) + \dots + h(\mu)z, \\ \bar{z} &= [A(\mu) + h(x, y, z; \mu)]z,\end{aligned}$$

где $\rho(\mu) < 1$ при $\mu < 0$, $\rho(0) = 1$ и $\rho(\mu) > 1$ при $\mu > 0$. В этом случае граница S_3^{k-1} безопасная, если $g(0) < 0$. Переход через S_3^{k-1} приводит к рождению из периодического

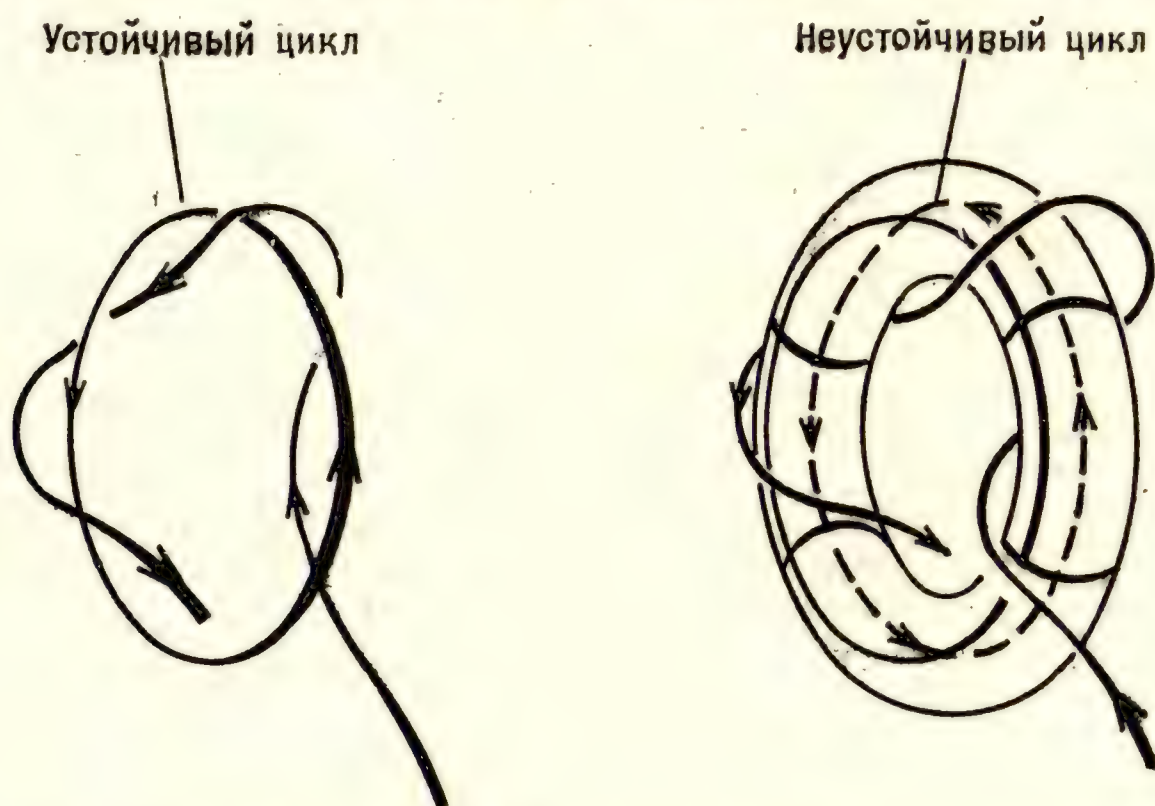


Рис. 5. Рождение устойчивого инвариантного тора.

движения устойчивого двумерного инвариантного тора (см. настоящую книгу). По образному выражению А. А. Андропова, поставившего эту задачу, «с цикла слезает шкура». Таким образом, в этом случае имеет место мягкий переход от автоколебаний к «режиму биений» (рис. 5).

4. Этот случай характерен тем, что пределом $\Gamma(\mu)$ при $\mu \rightarrow 0$ является контур Γ^* , составленный из простейшего негрубого состояния равновесия типа седло-узел (см. случай 6) и сепаратрисы седло-узла, возвращающейся в него. То, что граница S_4^{k-1} (а она выделяется еще дополнительным условием, что Γ^* — гладкий контур) является безопасной, есть простое следствие устойчивости Γ^* . При $\mu > 0$ установившимся

ся режимом системы будет устойчивое состояние равновесия, возникающее при разделении седло-узла (рис. 6).

Критерии опасных границ. 5. В этом случае топологическим пределом периодического движения $\Gamma(\mu)$ является кон-

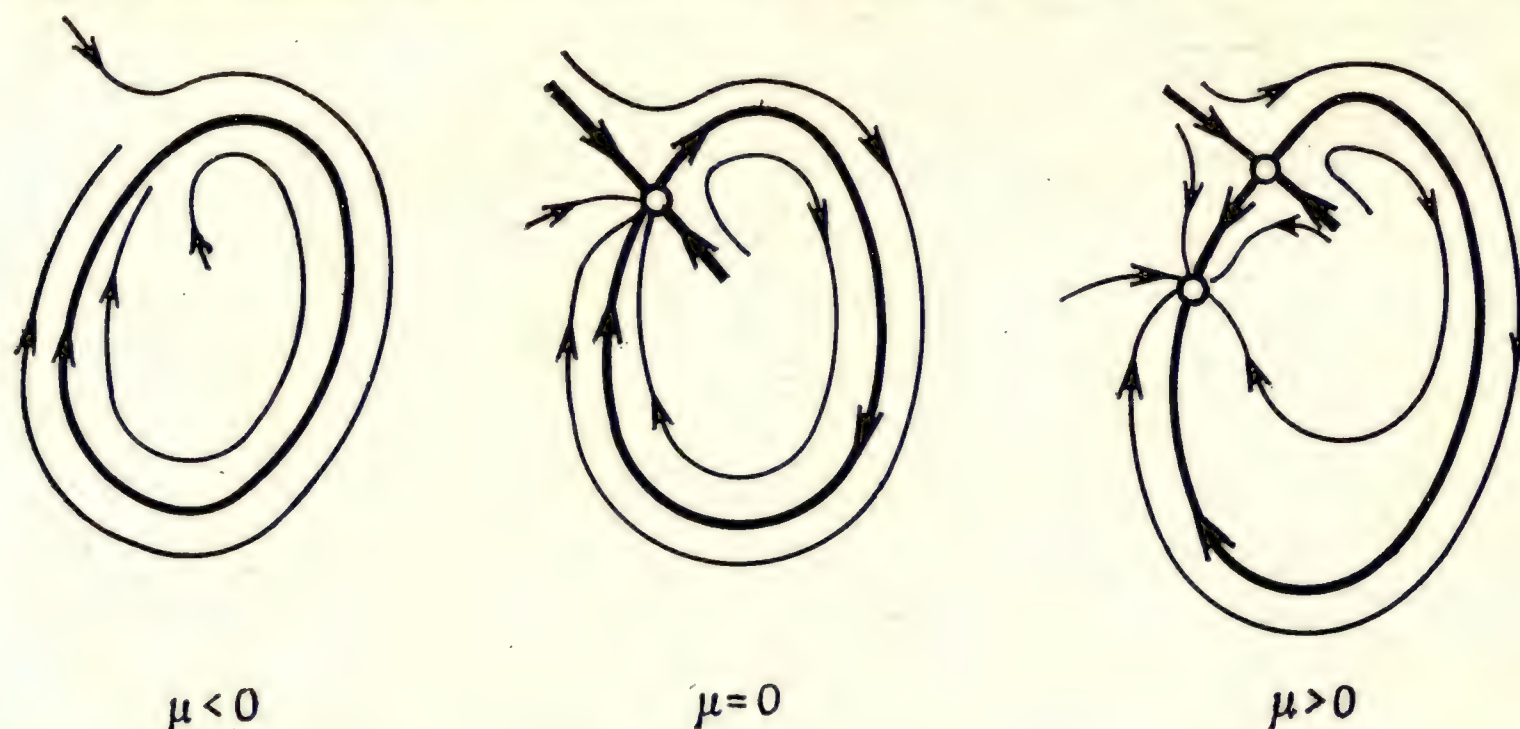


Рис. 6. Исчезновение устойчивого предельного цикла с возникновением устойчивого узла.

тур Γ^* , составленный из седла и траектории, двоякоасимптотической к нему. Общий случай границы, которую обозначим через S_5^{k-1} , выделяется следующими условиями [4, 8, 9, 10]:

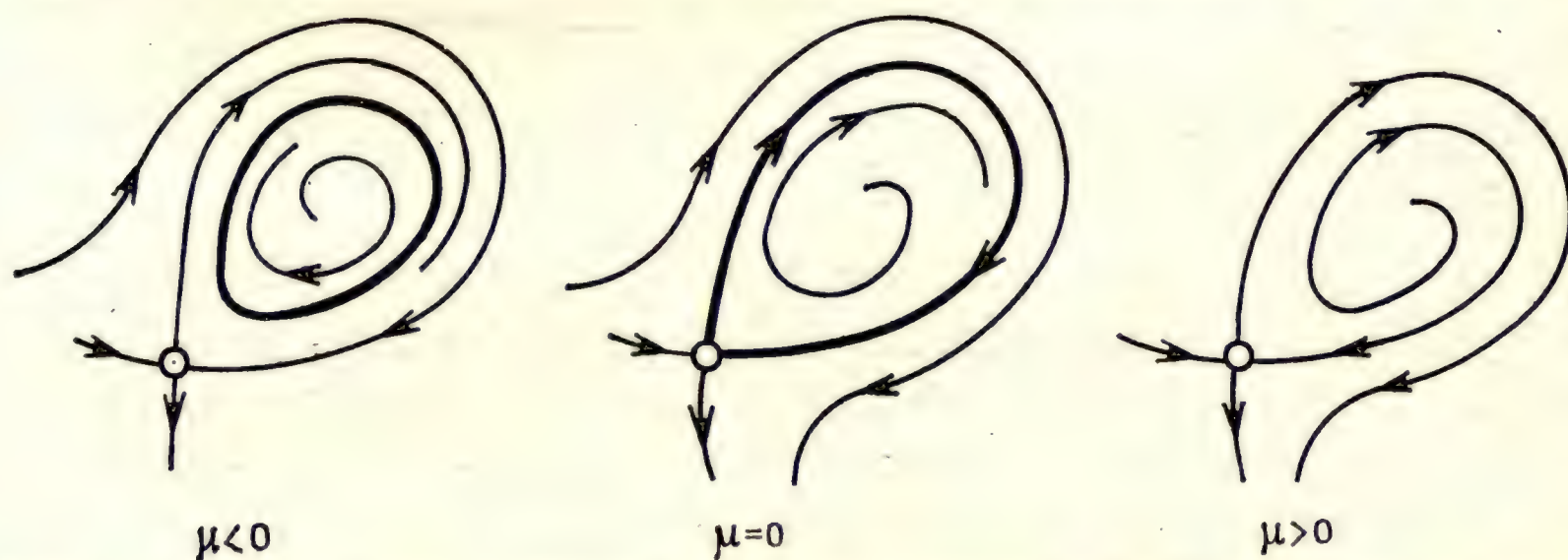


Рис. 7. Исчезновение предельного цикла через образование петли сепаратрисы седла.

корни $\rho_1, \dots, \rho_n$ характеристического уравнения в седле таковы, что $\operatorname{Re} \rho_i < 0$ ($i = 1, \dots, n-1$), $\rho_n > 0$, и все седловые величины $\sigma_i = \rho_i + \rho_n < 0$ ($i = 1, \dots, n-1$). Таким образом, одна из траекторий, выходящих из седла, будет принадлежать Γ^* . Контур Γ^* неустойчив, так как другая траектория, выходящая из седла, покидает любую малую окрестность Γ^* (рис. 7).

6. Пусть у состояния равновесия $\Gamma(\mu)$ один корень характеристического уравнения при $\mu \rightarrow 0$ обращается в нуль. Тогда при достаточно малом μ система в окрестности Γ^* может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= R(x, \mu) + f(x, y, \mu)y, \\ \dot{y} &= [A(\mu) + g(x, y, \mu)]y,\end{aligned}$$

где $R(0, 0) = R_x(0, 0) = 0$. Общий случай здесь выделяется условием $l_2 = R_{xx}(0, 0) \neq 0$. Поскольку мы предположим, что

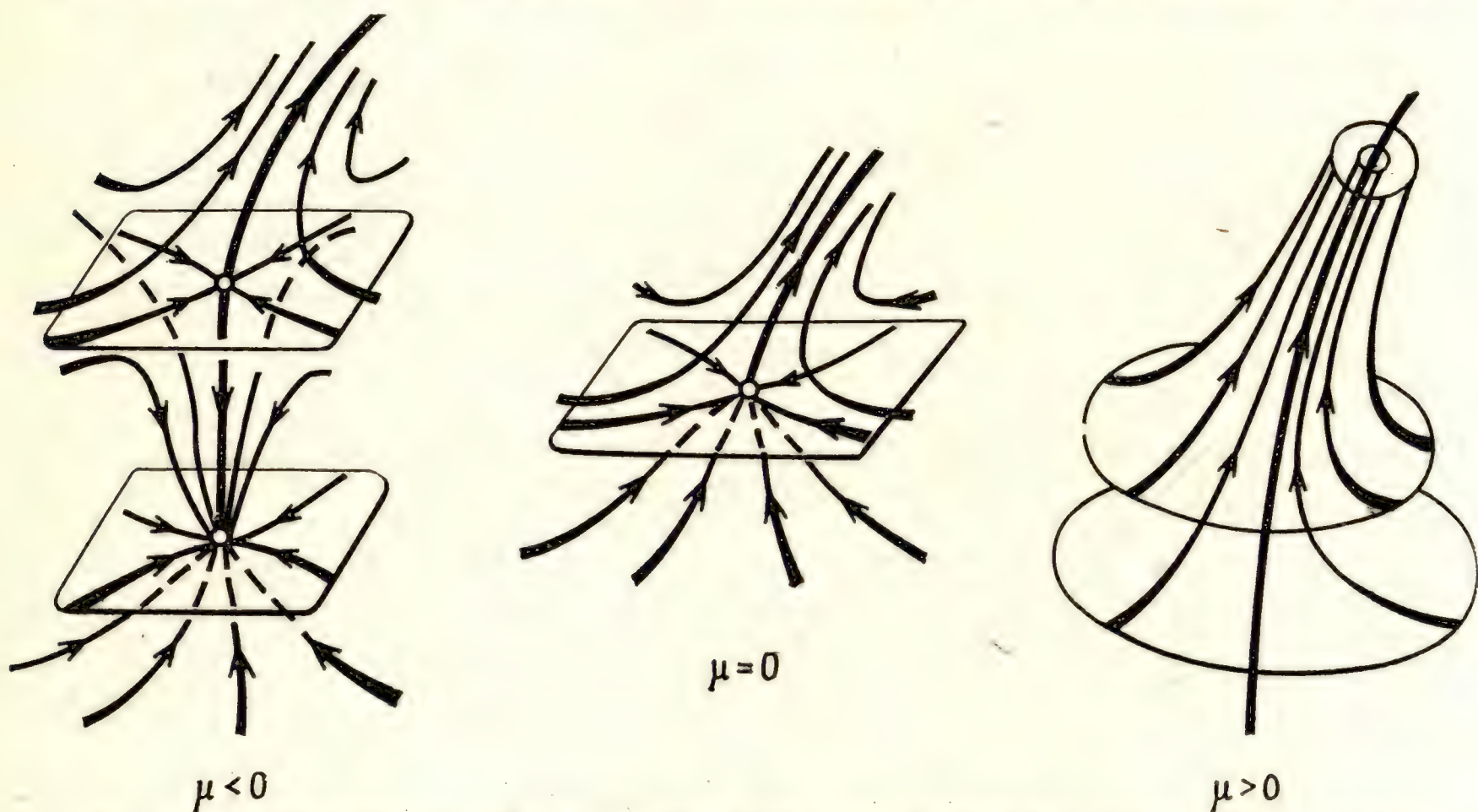


Рис. 8. Исчезновение устойчивого узла при слиянии с состоянием равновесия седлового типа.

выход на границу происходит со стороны отрицательных μ , то $l_2 > 0$. Соответствующая этому случаю граница S_6^{k-1} будет опасной: при стремлении μ к нулю к $\Gamma(\mu)$ подтягивается другое состояние равновесия седлового типа; при $\mu = 0$ они сольются, образовав сложное неустойчивое состояние равновесия Γ^* типа седло-узел. При $\mu > 0$ ($R(x, \mu) > 0$) состояние равновесия исчезает и все траектории покинут окрестность Γ^* [3, 19] (рис. 8).

7. То же, что и в случае 1, но $L(0) > 0$. Здесь при $\mu \rightarrow 0$ в Γ^* влипают периодическое движение седлового типа. Это и обуславливает опасный тип границы S_7^{k-1} , поскольку исчезновение периодического движения приводит к появлению у Γ^* двумерного неустойчивого многообразия W^u (рис. 1).

8. То же, что и в случае 2, но $L(0) > 0$. Неустойчивость в этом случае обусловлена влипанием неустойчивого периодического движения с периодом, близким к удвоенному пе-

риоду $\Gamma(\mu)$. При $\mu \geq 0$ возникает неустойчивое периодическое движение, имеющее неустойчивое многообразие W^u — лист Мёбиуса.

9. То же, что и в случае 3, но $g(0) > 0$. Неустойчивость Γ^* здесь связана с влипанием в него неустойчивого двумерного тора. При $\mu \geq 0$ периодическое движение уже будет иметь неустойчивое многообразие W^u , размерность которого равна трем.

10. Пусть у периодического движения $\Gamma(\mu)$ при $\mu \rightarrow 0$ один мультипликатор $\rho(\mu)$ становится равным 1. Соответствующее отображение последования на секущей здесь может быть записано в виде

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + R(x, \mu) + f(x, y, \mu)y, \\ \bar{y} &= [A(\mu) + g(x, y, \mu)]y.\end{aligned}$$

Граница области устойчивости здесь будет $(k-1)$ -мерна, если $l_2 = R_{xx}(0, 0) \neq 0$. При сделанных выше предположениях о вхождении параметра μ , из $l_2 \neq 0$ следует, что $l_2 > 0$. Опасный характер S_{10}^{k-1} в этом случае обусловлен тем, что $\Gamma(\mu)$ сливается при $\mu \rightarrow 0$ с периодическим движением седлового типа. Γ^* есть периодическое движение типа седло-узел, неустойчивое многообразие W^u которого является гомеоморфным образом цилиндра $S^1 \times R^+$, где R^+ — полупрямая.

Таким образом, в границу области устойчивости состояния равновесия могут входить поверхности трех типов: S_1^{k-1} , S_6^{k-1} и S_7^{k-1} . В границу же области устойчивости периодического движения — девяти типов S_5^{k-1} , S_8^{k-1} , S_9^{k-1} , S_{10}^{k-1} — опасные и S_2^{k-1} , S_3^{k-1} , S_4^{k-1} , $\tilde{S}_1^{k-1}$, $\tilde{S}_2^{k-1}$ — безопасные ($\tilde{S}_1^{k-1}$ и $\tilde{S}_2^{k-1}$ соответствуют влипанию периодического движения в сложный фокус и в периодическое движение половинного периода).

Другие точки границ $D\Gamma$ связаны с более высоким вырождением и здесь не рассматриваются. С частью из них можно познакомиться по работам [4, 5, 23, 28]. Отметим только, что бифуркационные явления в таких случаях весьма сложны и еще недостаточно изучены.

3. Динамически определенные и неопределенные опасные границы

Пусть изображающая точка, описывающая состояние системы $X(\mu)$, при $\mu < 0$ находится или в стоке Γ , или в его «бесконечно малой» окрестности, другими словами, Γ является установившимся режимом системы. При переходе через опасную границу положение изображающей точки будет не-

определено, поскольку Γ^* либо исчезает, либо становится неустойчивым. Поэтому естественно высказать следующую аксиому.

Аксиома неопределенности. При переходе через опасную границу: 1) изображающая точка покидает окрестность $U(\Gamma^*)$; 2) выход ее может происходить по любой траектории, покидающей $U(\Gamma^*)$; 3) новым установившимся режимом может быть только аттрактор, т. е. притягивающее предельное множество.

Дальнейшее рассмотрение связано с ответом на следующий вопрос: куда при переходе через опасную границу «перескакивает» изображающая точка [27]?

Для случая двумерных автоколебательных систем, близких к линейным консервативным, эта задача была решена А. А. Андроновым еще в 30-х годах в связи с изучением явлений мягкого и жесткого режимов возбуждения колебаний. Характерной особенностью конкретных систем, рассмотренных как в работах А. А. Андропова, так и в публикациях других авторов, явилось следующее обстоятельство: после прохождения опасной границы новый установившийся режим системы указывался однозначно. Однако в общем случае это может быть не так. Свое рассмотрение мы ограничим случаем, когда $X(\mu)$ при $\mu \leq 0$ имеет только конечное число периодических движений и состояний равновесия, каждое из которых, кроме Γ^* на границе, является грубым, а их устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально (за исключением случая негрубого контура Γ^* на границе S_5^{k-1}).

Опасную границу S_α^{k-1} назовем динамически определенной, если для любой системы $X \in S_\alpha^{k-1}$ все траектории, выходящие из $U(\Gamma^*)$, за исключением тех, которые лежат в устойчивых многообразиях седел и седловых периодических движений, идут к одному стоку. Если по крайней мере две траектории, выходящие из $U(\Gamma^*)$, имеют разные стоки, то назовем границу динамически неопределенной.

Рассмотрим случай 5. В силу наших предположений траектория, выходящая из седла и не принадлежащая контуру Γ^* , будет стремиться к некоторому стоку $\Sigma(0)$. Опасная граница S_5^{k-1} является динамически определенной; при малых $\mu \geq 0$ установившимся режимом системы будет сток $\Sigma(\mu)$.

В случае 6 при $\mu = 0$ возникает сложное состояние равновесия Γ^* типа седло-узел, из которого выходит только одна траектория $\beta(t)$. Относительно поведения $\beta(t)$ здесь возможны два подслучая: 1) $\beta(t)$ имеет своим предельным элементом новый сток $\Sigma(0)$, 2) $\beta(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к Γ^* . Гра-

ницы, соответствующие этим подслучаям, будем обозначать через $S_{6_1}^{k-1}$ и $S_{6_2}^{k-1}$. Опасная граница $S_{6_i}^{k-1}$ является динамически определенной. При переходах через $S_{6_1}^{k-1}$ установившимся режимом системы будет сток $\Sigma(\mu)$; при переходах через $S_{6_2}^{k-1}$ — устойчивое периодическое движение, рождающееся из контура Γ^* [3, 4, 32].

Как мы уже отмечали, в случаях 7—10 при $\mu = 0$ Γ^* будет иметь неустойчивое многообразие W^u . Множество предельных

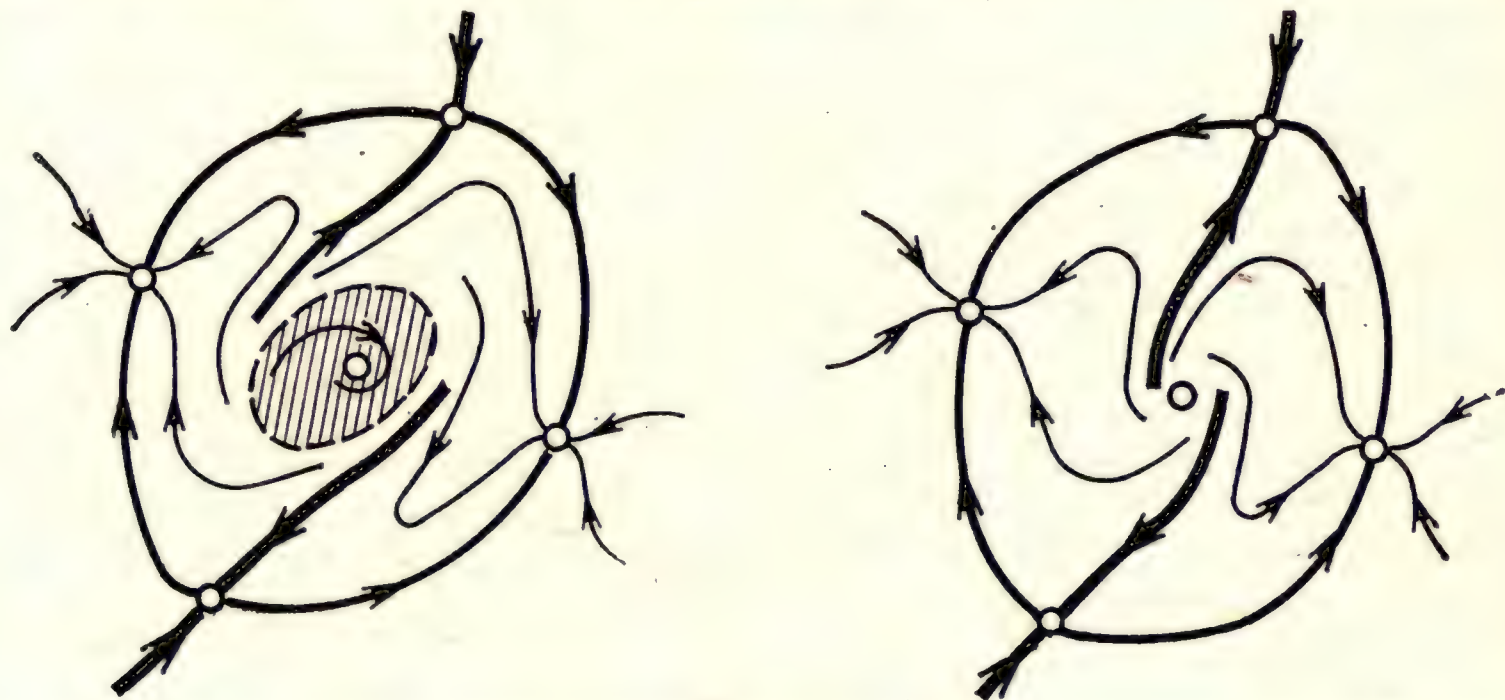


Рис. 9. Динамическая неопределенность при исчезновении области устойчивости состояния равновесия.

точек траекторий из $W^u \setminus \Gamma^*$ будем обозначать через ∂W^u . Предположим, что в случае 10 $\Gamma^* \not\subset \partial W^u$. Границу S_{10}^{k-1} обозначим тогда через $S_{10_1}^{k-1}$. Граница S_i^{k-1} ($i = 7, 8, 9, 10_1$) будет динамически определенной, если в ∂W^u содержится только один сток $\Sigma(0)$. Заметим, что, хотя новый установившийся режим определен однозначно, переходный процесс может носить квазислучайный характер (см. [6]).

Если же в ∂W^u содержится несколько стоков $\Sigma_1(0), \dots, \Sigma_n(0)$, то граница S_i^{k-1} ($i = 7, 8, 9, 10_1$) будет динамически неопределенной. Выбор стока при переходе через такую опасную границу носит случайный характер (рис. 9).

Рассмотрим случай 10 в предположении, что $\Gamma^* \subset \partial W^u$. Сразу же заметим, что тогда W^u не может быть самопредельным, ибо в противном случае мы имели бы негрубую гомоклиническую структуру и, следовательно, счетное множество периодических движений [16]. Здесь мы ограничимся только тем случаем, когда $\partial W^u = \Gamma^*$ и когда $\bar{W}^u$ есть тор¹⁾. При этом возможны два подслучая: тор $\bar{W}^u$ может быть глад-

¹⁾ $\bar{W}^u$ может быть также и бутылкой Клейна.

ким и негладким (рис. 10). В первом подслучае изображающая точка будет наматываться на инвариантный тор, бифурцирующий из $\bar{W}^u$ при исчезновении Γ^* [7]. Во втором — ее предельное множество будет лежать в малой окрестности

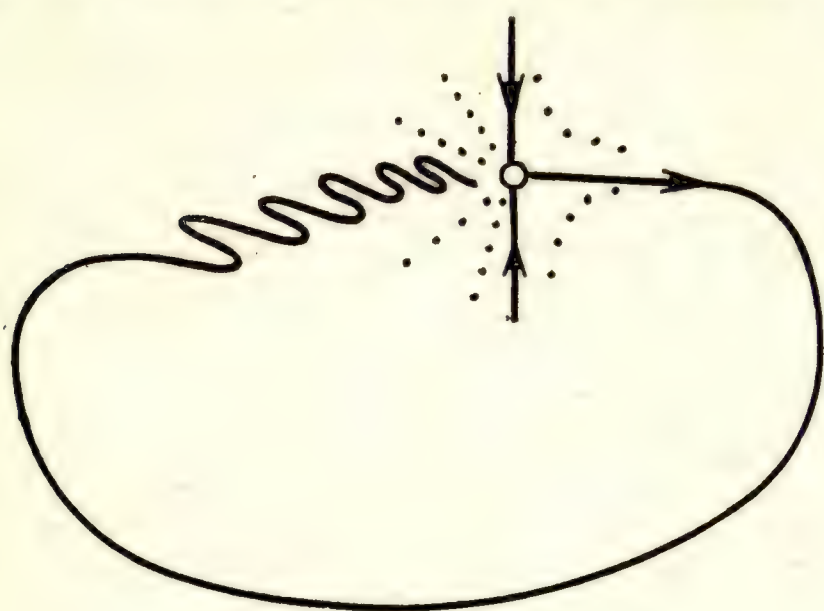


Рис. 10. Пересечение негладкого тора секущей.

$\bar{W}^u$ и, как правило, будет содержать счетное множество седловых периодических движений, гомоклинических траекторий, континуум траекторий, устойчивых по Пуассону, а также устойчивые периодические движения с малыми областями притяжения [7]. Поскольку в обоих случаях устойчивые периодические движения имеют малые области устойчивости

по параметру μ и предельные множества на любом интервале $(0, \mu)$ претерпевают континуум бифуркаций, то новый сток

Предельные циклы охватывающие цилиндр

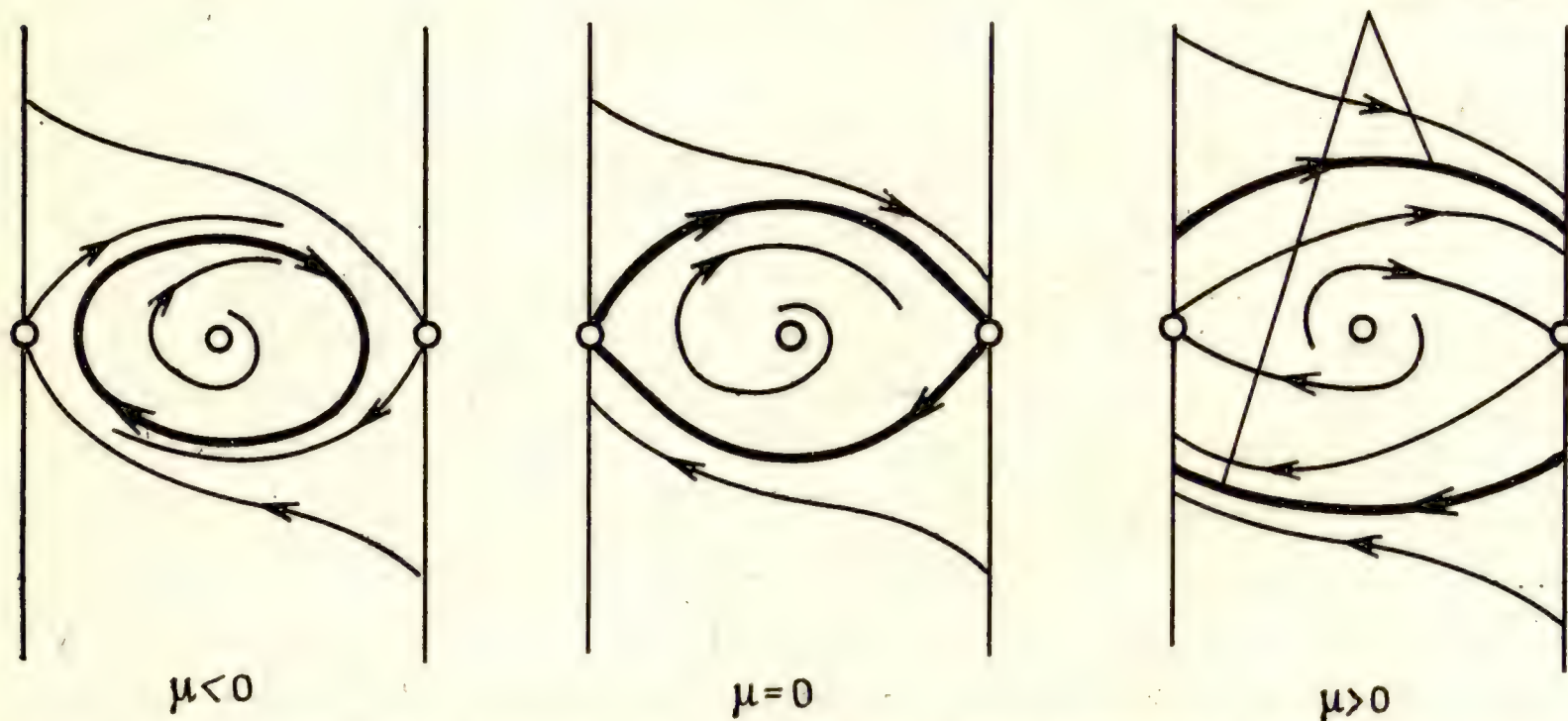


Рис. 11. Развертка фазового цилиндра. Динамическая неопределенность при разрушении петли сепаратрисы на цилиндре.

нельзя указать однозначно. Тем не менее с практической точки зрения можно считать, что при малых μ в первом подслучае новым установившимся режимом будет «режим биений», а во втором — «режим квазислучайных биений».

Все безопасные границы, перечисленные выше, являются динамически определенными, поскольку при $\mu > 0$ в окрестности Γ^* возникает только один сток. Однако если система

допускает группу симметрии, ее новые безопасные границы могут быть уже динамически неопределенными. Так, безопасная граница $r = 1$ в модели Лоренца является динамически неопределенной, поскольку при потере устойчивости от состояния равновесия 0 рождается два устойчивых стока. Более сложные примеры дают уравнения маятникового типа

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, \lambda) = 0,$$

где $f(x, \dot{x}, \lambda)$ — периодическая по x и $f(x, \dot{x}, \lambda) = -f(-x, -\dot{x}, \lambda)$, в которых переход через границу области устойчивости лимитационных автоколебаний приводит к появлению двух симметричных предельных циклов, соответствующих противоположным вращениям маятника. Здесь Γ^* будет контуром, составленным из седла и его сепаратрис, охватывающих цилиндр [12] (рис. 11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А. Всесоюзная конференция по колебаниям. — М. — Л.: ГТТИ, 1933, стр. 32; Собрание трудов, 1956.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959; 1-е изд. 1937.
3. Андронов А. А., Леонтович Е. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра. — Ученые записки ГГУ, вып. 6, 1939, 3—24.
4. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1967.
5. Арнольд В. И. Лекции о бифуркациях и версальных семействах. — УМН, вып. 5, 1972, 167.
6. Афраймович В. С., Шильников Л. П. Об особых множествах систем Морса — Смейла. — Тр. Моск. матем. о-ва, т. 28, 1973, 181—214.
7. Афраймович В. С., Шильников Л. П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узла. — ДАН СССР, т. 219, № 6, 1974, 1281—1284.
8. Баутин Н. Н. О поведении динамических систем при малых нарушениях условий Раута — Гурвица. — Диссертация, Горький, 1941.
9. Баутин Н. Н. О рождении предельного цикла из состояния равновесия типа фокус. — ЖЭТФ, т. 8, вып. 6, 1938.
10. Баутин Н. Н. О числе предельных циклов, рождающихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокуса или центра. — ДАН СССР, т. 24, № 7, 1939; Матем. сб., новая серия, т. 30, вып. 1, 1952, 181—196.
11. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. — М. — Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1949.
12. Баутин Н. Н. Качественное исследование одного уравнения теории фазовой автоподстройки частоты. — ПММ, т. 34, вып. 5, 1970, 850—860.
13. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976.
14. Dulac H., Determination et integration d'une certaine classe d'equations differentielles ayant pour singulier un centre, Bull. Sc. Math. (2), 32, 1968, 230—252.
15. Kapteyn W. Over de middelpunten de integraalkrommer van differentiaal-vergelijkingen van de eerste orde endeneersten graad, Koninkl. Neder-

- land. Akad., 19, 1911, 1446—1457; 20, 1912, 1354—1365; 21, 1912, 27—33.
16. Лукьянов В. И., Шильников Л. П. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами. — ДАН СССР, т. 243, № 1, 1978, 26—29.
 17. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М. — Л., 1935, Собр. соч., 1956.
 18. Малкин К. М. Некоторые условия центра. Ученые записки Рязанского ГПИ, т. 35, 1963, 151—161.
 19. Минц Р. М. Характер некоторых типов сложных состояний равновесия в n -мерном пространстве. — ДАН СССР, т. 147, № 1, 1962, 31—33.
 20. Неймар Ю. И. О некоторых случаях зависимости периодических движений от параметров. — ДАН СССР, т. 129, № 4, 1959, 736.
 21. Серебрякова Н. Н. О поведении динамических систем с одной степенью свободы вблизи тех точек границы области устойчивости, где безопасная граница переходит в опасную. — Изв. АН СССР, ОТН Механика и машиностроение, № 2, 1959.
 22. Сибирский К. С. О числе предельных циклов, рождающихся из особой точки типа фокуса или центра. — ДАН СССР, т. 161, № 2, 1965.
 23. Thom R. Structural stability and morphogenesis. — Benjamin, New York, 1975.
 24. Шильников Л. П. Теория бифуркаций динамических систем с гомоклиническими кривыми Пуанкаре. — Труды VII Международной конференции по нелинейным колебаниям, т. 1, 1977, Берлин.
 25. Шильников Л. П. О рождении периодического движения из траектории двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло. — Матем. сб., 77 (119), № 3, 1968, 461—472.
 26. Шильников Л. П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус. — Матем. сб., 81(123), № 1, 1970, 92—102.
 27. Шильников Л. П. Теория бифуркаций динамических систем и опасные границы. — ДАН СССР, т. 224 № 5, 1975, 1046—1049.
 28. Шноль Э. Э., Хазин Л. Г. Об устойчивости стационарных решений общих систем дифференциальных уравнений вблизи критических случаев. — Препринт ИПМ АН СССР, № 91, 1979.
 29. Шуко С. Д. Вычисление ляпуновских величин с помощью ЭВЦМ. — Труды Горьковского инст. инж. водн. трансп., вып. 94, 1968, 97—109.
 30. Шуко С. Д. К проблеме различения центра и фокуса. — ДАН СССР, т. 203, № 5, 1972.
 31. Шуко С. Д. Реализация на ЭВМ алгоритма различения центра и фокуса. — Труды Горьковского инст. инж. водн. трансп., вып. 111, часть 2, 1973.
 32. Шильников Л. П. О некоторых случаях рождения периодического движения из особых траекторий. — Матем. сб., 61 (104), 1963, 443—466.

Дополнение II

ТЕОРИЯ БИФУРКАЦИЙ И МОДЕЛЬ ЛОРЕНЦА

Л. П. Шильников

В последнее время широкое внимание специалистов различных направлений привлечено к системе уравнений

$$\dot{x} = -\sigma(x - y), \dot{y} = -xz + rx - y, \dot{z} = xy - bz, \quad (1)$$

получившей название модели Лоренца. Система (1) была выведена [29, 21] из уравнений Навье — Стокса в задаче о тепловой конвекции, поэтому параметры r , σ , b имеют вполне определенный гидродинамический смысл: r — число Рэлея, σ — число Прандтля, а b характеризует размеры системы. В этой системе Лоренцем [21] с помощью ЭВМ при $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ было обнаружено сложное хаотическое поведение траекторий, которое указывало на возможность существования принципиально новых установившихся режимов — стохастических колебаний, отличных от автоколебаний и биений. А такого рода движения представляют повышенный интерес в связи с объяснением явления турбулентности.

Конечно, имеются и другие динамические модели, в которых отмечалось сложное поведение траекторий¹⁾. Однако они не вызывали столь большого обсуждения либо по причине своей узкой направленности, либо из-за того, что сложные эффекты обнаруживались в нефизической области параметров, либо обнаруживалась чрезмерная чувствительность притягивающего множества к сдвигам параметров, сопровождающимся появлением и исчезновением устойчивых периодических движений²⁾. Одну из таких систем мы все же упомянем — это часы. Как известно, часы — вполне «динамичная» система, работающая либо в режиме автоколебаний (часы Галилея — Гюйгенса), либо в режиме синхронизации. Здесь среди многих моделей современных часов, предложенных Н. Н. Баутиным, одна из них [8] (после дополнительного учета самоиндукции) заслуживает особого внимания: как

¹⁾ Так к (1) сводятся некоторые модели лазеров [31, 6], а также модель дискового динамо [28].

²⁾ Возникающие в таких системах математические вопросы отчасти отражены в работах [4, 5, 7, 10, 11, 13—15, 19, 20, 22, 23, 34, 35, 37—39].

следует из ее анализа, проведенного Л. А. Комразом [18], при значениях параметров из некоторой области часы будут иметь «стохастический ход» (правда, неизвестно, имеют ли такие часы какие-либо преимущества перед обычными).

Поскольку математическим образом стохастических колебаний не могут быть устойчивые периодические и квазипериодические движения, то естественно возникает вопрос: что же может им быть? Надо сказать, что специалистам по качественной теории дифференциальных уравнений хорошо известны примеры притягивающих грубых предельных множеств: Y -подмногообразие [2], соленоиды Смейла — Вильямса [30, 32], соленоиды Плыкина [24] и т. д. С легкой руки Рюэля и Такенса [26] множества, устойчивость которых сочетается с неустойчивостью каждой индивидуальной траектории, получили название «странных» аттракторов. Однако возможность появления грубых странных аттракторов в простых модельных системах остается пока проблематичной. Поэтому естественно возникают вопросы: может ли быть в модели Лоренца странный аттрактор? И если да, то как он возникает и какова его структура?

Ответы на поставленные вопросы были даны в [6]. Ниже кратко приводятся полученные здесь результаты.

Картину эволюции структуры разбиения фазового пространства на траектории системы (1) будем описывать при изменении r от 10 до 28, положив $\sigma = 10$, $b = 8/3$ ¹⁾. Ее удобно представить состоящей из следующих этапов:

1. При $r \in [10, r_1]$, где $r_1 = 13.92$, система имеет три состояния равновесия $O(0, 0, 0)$, O_1 и O_2 , из которых O является седлом, имеющим двумерное устойчивое инвариантное многообразие W^s и две выходящие траектории Γ_1 и Γ_2 , которые будем называть сепаратрисами. Одна из них, для определенности Γ_1 , стремится к устойчивому состоянию равновесия O_1 , а другая Γ_2 — к O_2 (рис. 1, а).

2. При $r = r_1$ каждая из сепаратрис Γ_1 и Γ_2 становится двоякоасимптотической к седлу O (рис. 1, б)²⁾. При переходе r через r_1 из каждой петли сепаратрисы рождается по седловому периодическому движению L_1 и L_2 . Более того, вместе с рождением L_1 и L_2 появляется инвариантное предельное множество Ω_1 , траектории которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с множеством бесконечных в обе

¹⁾ В [6] был рассмотрен и другой путь: $r = 28$, $b = \frac{8}{3}$, $1 \leq \sigma \leq 10$.

²⁾ Система (1) инвариантна относительно замены $(-x, -y, z) \rightarrow (x, y, z)$.

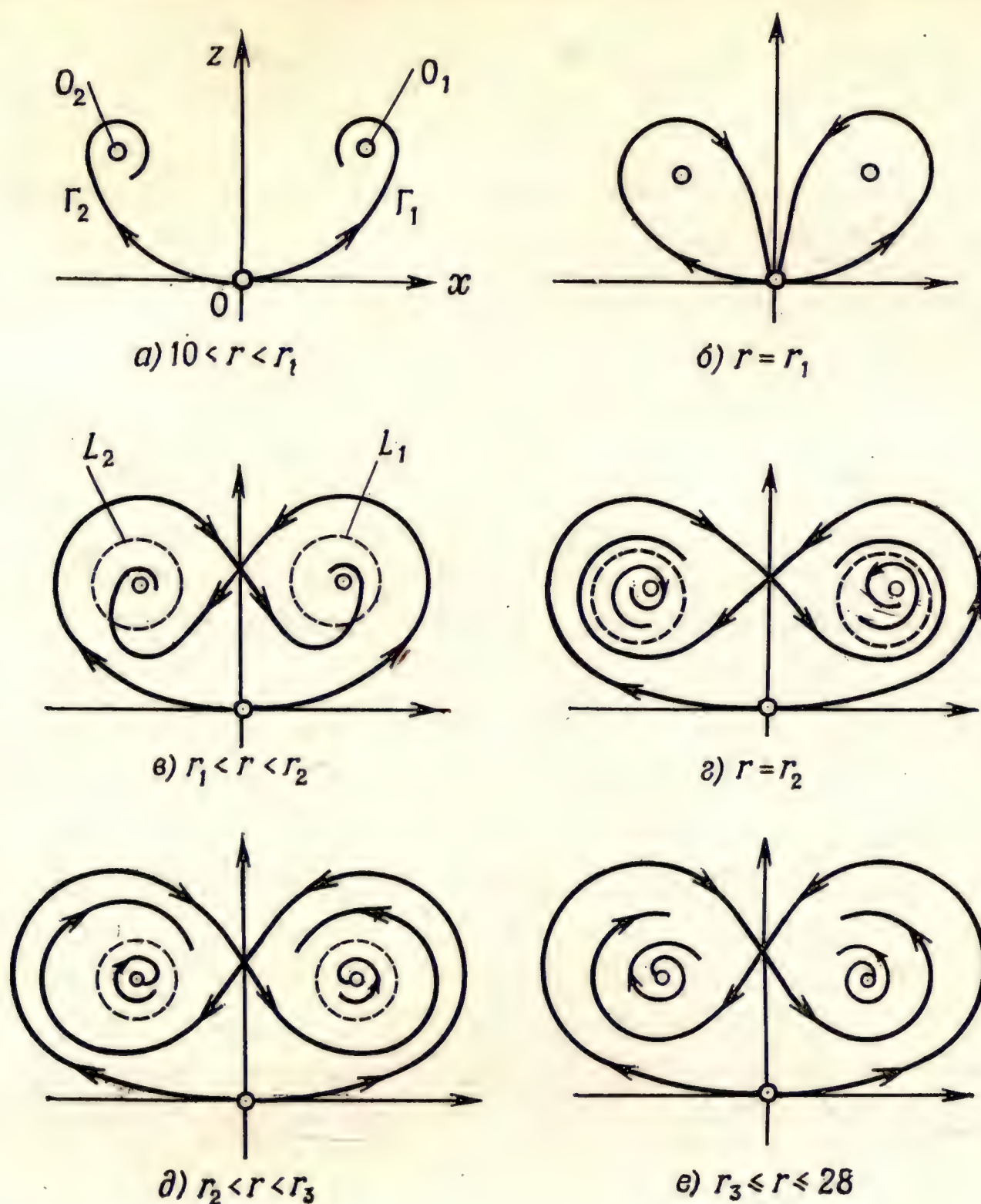


Рис. 1.

стороны последовательностей из двух символов, при этом периодическим последовательностям соответствуют периодические движения седлового типа. Однако это множество не является притягивающим, и, следовательно, устойчивыми предельными множествами остаются O_1 и O_2 . Такая ситуация будет иметь место для $r \in (r_1, r_2)$, где $r_2 \simeq 24.06$, только теперь Γ_1 будет стремиться к O_2 , а Γ_2 — к O_1 (рис. 1, в).

3. Момент $r = r_2$ является бифуркационным. Он характерен тем, что если раньше Γ_1 и Γ_2 шли в устойчивые фокусы O_2 и O_1 , то при $r = r_2$ Γ_1 и Γ_2 будут стремиться к седловым периодическим движениям L_2 и L_1 соответственно (рис. 1, г). Это приводит к тому, что на месте Ω_1 возникает уже двумерное предельное множество Ω'_2 .

4. При $r \in (r_2, 28]$ система будет иметь устойчивое предельное множество Ω_2 , обладающее свойствами:

1) Ω_2 является негрубым: это связано, в частности, с тем, что седло O принадлежит Ω_2 вместе со своими сепаратрисами Γ_1 и Γ_2 ¹⁾.

2) Периодические движения всюду плотны в Ω_2 и являются грубыми, седлового типа.

3) В Ω_2 имеет место экспоненциальное разбегание траекторий, столь характерное для систем с перемешиванием и непрерывным спектром²⁾.

4) Исчезновение периодических движений при изменении r возможно только путем влипания их в петли сепаратрис седла O .

5) В интервале (r_2, r_3) , где $r_3 \simeq 24.74$, в фазовом пространстве будут существовать три устойчивых аттрактора: Ω_2 , который будем называть аттрактором Лоренца, и состояния равновесия O_1 и O_2 (рис. 1d). Границей области притяжения аттрактора Лоренца являются устойчивые многообразия периодических движений L_1 и L_2 .

6) При $r \rightarrow r_3$ периодические движения L_1 и L_2 стягиваются к состояниям равновесия O_1 и O_2 , которые при $r = r_3$ теряют устойчивость, что приводит к жесткому режиму возникновения стохастичности.

7) При $r \in (r_3, 28]$ единственным устойчивым предельным множеством является аттрактор Лоренца (рис. 1, e).

Поскольку $r = r_2$ является границей интервала устойчивости Ω_2 , то при $r \leq r_2$ изображающая точка покидает окрестность Ω_2 . Новым установившимся режимом будет либо O_1 , либо O_2 . Таким образом, получаем, что $r = r_2$ является точкой динамически неопределенной опасной границы [9] области устойчивости аттрактора Лоренца.

Отметим, что эта последовательность бифуркаций с теми же численными значениями бифуркационных параметров была указана также Йорком и Капланом [16].

На рис. 2 приведен ряд бифуркационных кривых системы (1) в прямоугольнике: $0 \leq r \leq 100$, $0 \leq \sigma \leq 100$ при $b = 8/3$ ³⁾. На нем отсутствует кривая l_0 : $r = 1$, переход через которую соответствует появлению из O двух устойчивых состояний равновесия O_1 и O_2 . Кривые l_1 , l_4 , l_5 соответствуют существованию у системы (1) петель сепаратрис седла O . Качественный вид петли $\bar{\Gamma}_1$ в проекции на плоскость xz в слу-

¹⁾ На то, что в (1) аттрактор может быть негиперболическим, обратил внимание Рюэль [27].

²⁾ Метрические свойства аттрактора Лоренца изучались Л. А. Бунимовичем и Я. Г. Синаем [12].

³⁾ Кривые l_1 и l_2 авторами [6] были указаны на школе по нелинейным задачам гидродинамической устойчивости в Колумбакино (1978 г.).

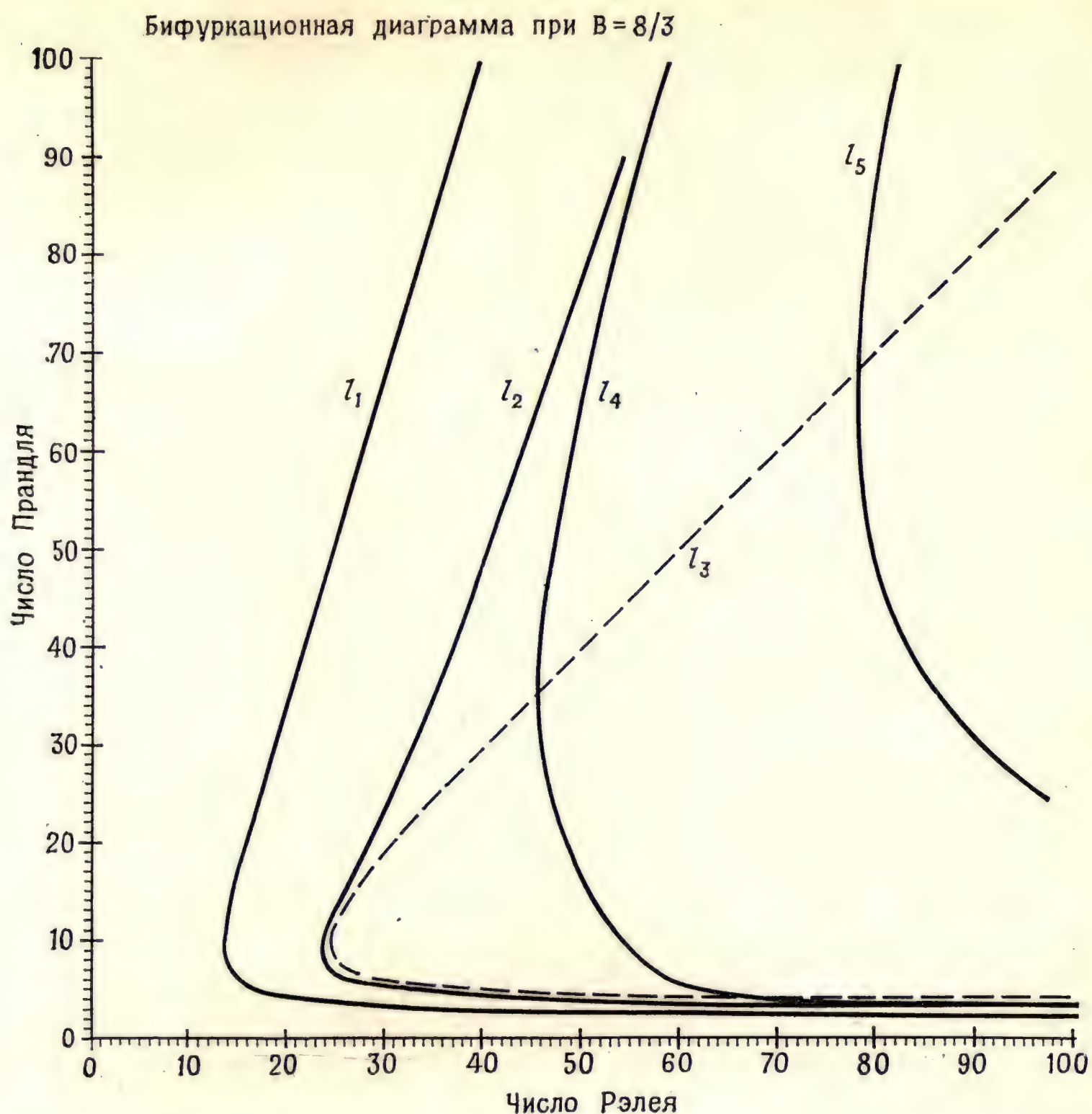


Рис. 2.

чае l_1 изображен на рис. 1, б, в случае l_4 — на рис. 3, а, а в случае l_5 — на рис. 3, б. Из нее при переходе через l_i , $i=1, 4, 5$ будет рождаться периодическое движение седлового типа, инвариантные многообразия которого будут цилиндрами в случае l_1 и l_5 и листами Мёбиуса в случае l_4 . Кривая l_2 соответствует тому моменту, когда Γ_1 и Γ_2 ложатся на устойчивые многообразия родившихся периодических движений (рис. 1, г). При переходе через l_2 и возникает аттрактор Лоренца ¹⁾. Кривая l_3 хорошо известна: $r = \sigma(\sigma + b + 3)(\sigma - b - 1)^{-1}$. На ней O_1 и O_2 теряют устойчивость. В последнее время Н. В. Рощиным [25] доказано, что l_3 — опасная граница области устойчивости. Отметим, что l_3 не может пересекать кривые l_1 и l_2 ; кривую же l_4 она пересекает по двум точкам.

¹⁾ Правда, нужно еще проверить условие 6, накладываемое на разрывное отображение (см. третий параграф).

Помимо указанных кривых имеются и другие кривые, соответствующие петлям сепаратрис, но с более сложным поведением Γ_i . Как следует из теоретического рассмотрения, в некоторой области, примыкающей к l_2 , они образуют счетное

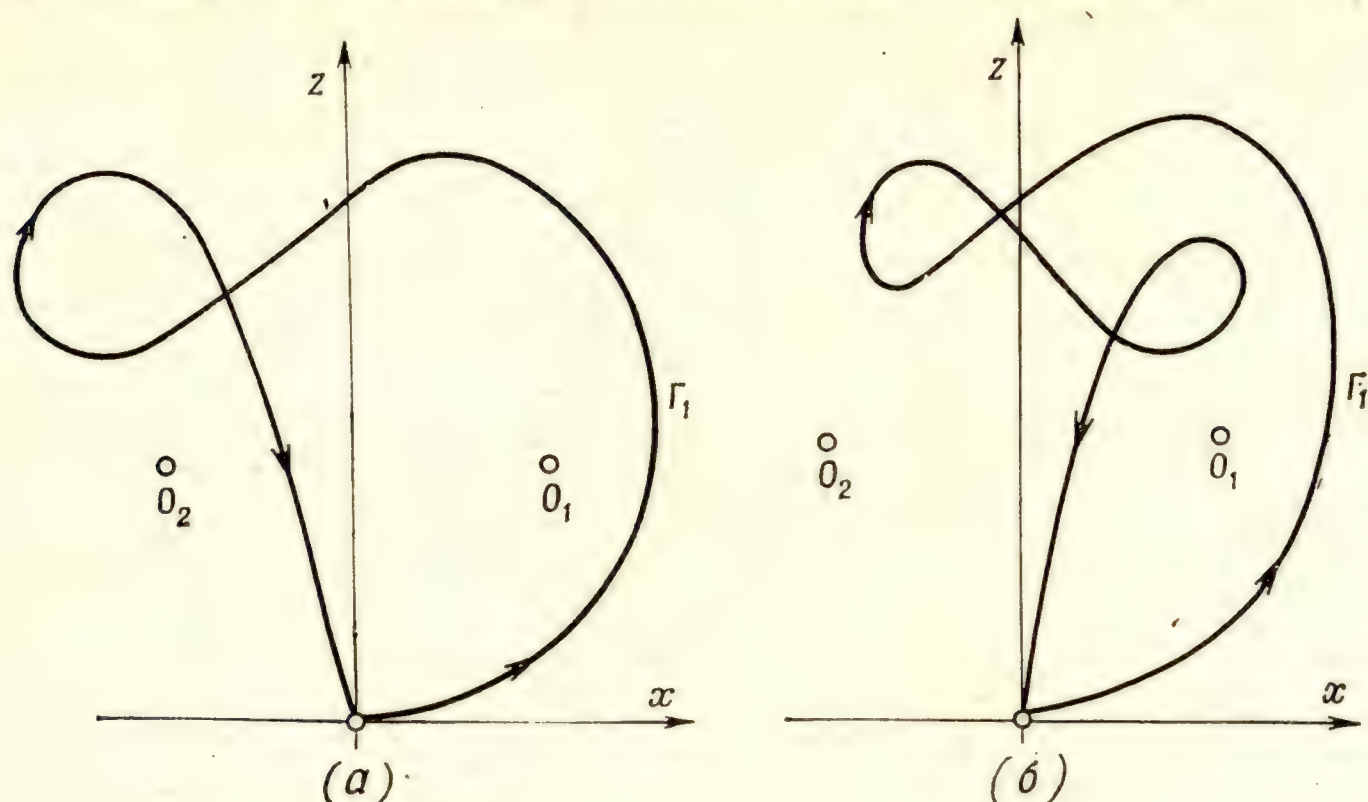


Рис. 3.

всюду плотное множество. Некоторые из таких кривых, в частности l_1 , были просчитаны группой В. И. Юдовича. Кроме того, ими была обнаружена бифуркационная точка Q_{10} (30, 4;

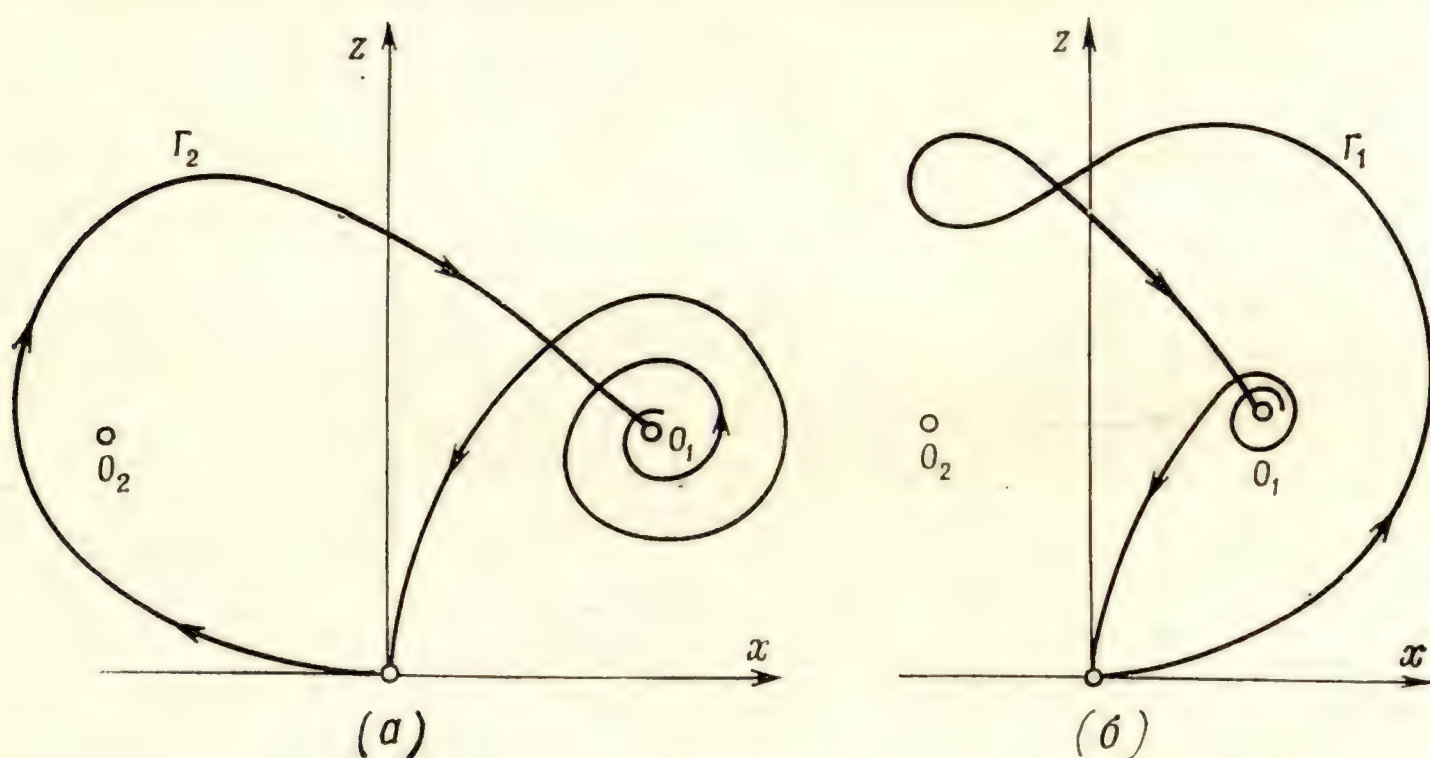


Рис. 4.

10, 2) (множество коразмерности два), соответствующая контуру из седел O и O_1 (O_2) и траекторий, их соединяющих, одной из которых является Γ_2 (Γ_1) (рис. 4, а). Имеется еще одна бифуркационная точка Q_{20} (85; 11, 9), соответствующая контуру из седел O и O_1 (O_2) и траекторий, их соединяющих,

одной из которых является Γ_1 (Γ_2) (рис. 4, б), также найденная с помощью численного эксперимента. Подобные бифуркации теоретически рассматривались в работе В. В. Быкова [11], из которой, в частности, следует, что существует еще счетное множество бифуркационных точек Q_{ij} $i = 1, 2$; $j = 1, 2, \dots$, соответствующих негрубым сепаратрисным контурам такого же типа, но с более сложным поведением Γ_1 и Γ_2 , и что к этим точкам примыкают бифуркационные кривые l_{ij} , соответствующие петлям сепаратрис седел O_1 и O_2 . А это приводит к важному выводу о существовании устойчивых периодических движений (см. ниже).

Несколько слов о схеме доказательства свойств аттрактора Лоренца Ω_2 . Указывается однопараметрическое семейство систем X_μ , имеющих состояние равновесия типа седло O , одномерные сепаратрисы которого при $\mu = 0$ возвращаются в него. Предполагается, что системы имеют секущую площадку, на которой определено отображение последования $T(\mu)$. Из-за наличия седла $T(\mu)$ будет разрывным. Но именно это свойство $T(\mu)$ и позволяет сравнительно просто сформулировать условия, при которых будет существовать странный аттрактор. Теперь возникает вопрос: можно ли проверить условия для модели Лоренца? Что касается отображения Пуанкаре T_1 для системы (1), то оно есть, поскольку имеется подходящая «секущая» $z = r - 1$. Однако об аналитических свойствах T_1 , которые как раз и нужны, практически ничего нельзя сказать. Поэтому нами (В. С. Афраймовичем, В. В. Быковым, Л. П. Шильниковым — авторами [6]) проверка теоретических условий для модели Лоренца проводилась с помощью ЭВМ.

Ниже излагается ряд фактов и утверждений, связанных с изучением динамических систем X_μ типа модели Лоренца и разрывных отображений порождаемых ими. Предварительно описываются бифуркации петель сепаратрис седла.

1. О бифуркациях в окрестности траектории, двоякоасимптотической к седлу

Рассмотрим однопараметрическое семейство X_μ трехмерных гладких динамических систем

$$\dot{x} = X(x, \mu), \quad (2)$$

непрерывно зависящих от параметра μ . Предположим, что системы (2) при $0 \leq \mu \leq 1$ имеют состояние равновесия $O(0, 0, 0)$ типа седло. Пусть $\lambda_1(\mu)$, $\lambda_2(\mu)$, $\lambda_3(\mu)$ — корни характеристического уравнения в O и $\operatorname{Re} \lambda_i(0) < 0$, $i = 1, 2$, а $\lambda_3(0) > 0$. Устойчивое двумерное многообразие седла O бу-

дем обозначать через $W^s(\mu)$. Предположим, что одна из двух траекторий, выходящих из O , которую обозначим через $\Gamma_1(\mu)$ (вторую обозначим через $\Gamma_2(\mu)$), при $\mu = 0$ возвращается в седло. Ниже $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_2(\mu)$ мы будем называть сепаратрисами. Будем предполагать, что седловая величина

$$\sigma(0) = \max_{i=1,2} \operatorname{Re} \lambda_i(0) + \lambda_3(0) \neq 0.$$

Дальнейшее рассмотрение сводится к трем следующим основным случаям:

I) Пусть $\sigma(0) < 0$. Тогда, как известно [33], из петли $\overline{\Gamma_1(0)} = \Gamma_1(0) \cup O$ может родиться только одно периодическое

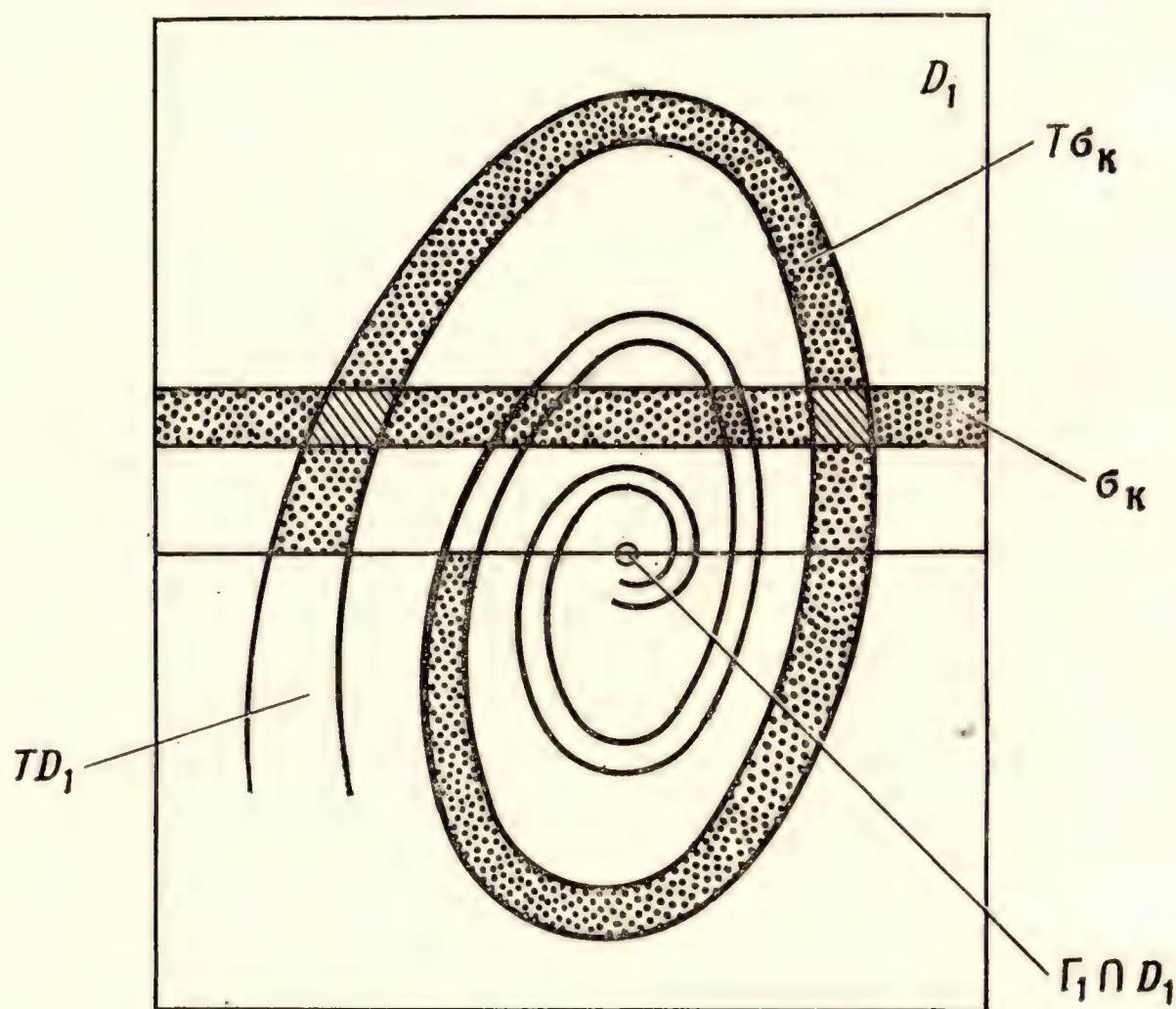


Рис. 5.

движение $L_1(\mu)$. При этом $\Gamma_1(\mu)$ при $t \rightarrow +\infty$ будет наматываться на $L_1(\mu)$.

II) Пусть $\lambda_1(0)$ и $\lambda_2(0)$ — комплексно-сопряженные и $\sigma(0) > 0$. Здесь, как следует из [34, 37], в любой окрестности $\overline{\Gamma_1(0)}$ будет существовать нетривиальное гиперболическое множество, содержащее счетное множество периодических движений. Однако это множество не исчерпывает всего множества траекторий, целиком лежащих в окрестности $\overline{\Gamma_1(0)}$. Это следует из того, что отображение последования $T(\mu)$ при $\mu = 0$ на секущей D , трансверсальной к $\overline{\Gamma_1(0)}$ имеет счетное множество подков Смейла $T: \sigma_k \rightarrow \sigma_k$ (см. рис. 5, где через

D_1 обозначена область определения $T(\mu)$ с необязательно грубыми переходами с одной подковы на другую. При μ же не равном нулю подков остается только конечное число. Имеющие здесь место бифуркационные явления будут зависеть от новой седловой величины $\sigma_1(0) = 2 \operatorname{Re} \lambda_1(0) + \lambda_3(0)$. Будем предполагать, что $\sigma_1(0) \neq 0$. Тогда можно доказать следующее: 1. При $\sigma_1(0) < 0$ X_μ при μ из счетного множества интервалов будет иметь устойчивое периодическое движение, смена устойчивости которого сопровождается бифуркацией, связанной с рождением периодического движения удвоенного периода. 2. При $\sigma_1(0) > 0$ будет существовать счетное множество интервалов, для значений μ из которых система X_μ будет иметь вполне неустойчивое периодическое движение (устойчивое при $t \rightarrow -\infty$).

Как уже отмечалось выше, на плоскости параметров r, σ модели Лоренца при $b = 8/3$ имеется счетное множество кривых l_{ij} , точкам которых соответствуют петли сепаратрис O_1 и O_2 . Поскольку в седле $O_1(O_2)$ два корня $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_2^{(1)}$, комплексно-сопряженные с $\operatorname{Re} \lambda_i^{(1)} > 0$, а третий $-\lambda_3^{(1)} < 0$, то $O_1(O_2)$ имеет двумерное неустойчивое многообразие $W_1^u(W_2^u)$ и две траектории Γ_{11} и Γ_{12} (Γ_{21} и Γ_{22}), входящие в него. Пусть $\bar{\Gamma}_{11}$ ($\bar{\Gamma}_{21}$) — петля седла $O_1(O_2)$, соответствующая l_{ij} . Так как сумма корней равна дивергенции поля в O_1 , а она равна $-b - \sigma - 1$, то получаем, что $2 \operatorname{Re} \lambda_1^{(1)} + \lambda_1^{(1)} < 0$ и $\operatorname{Re} \lambda_1^{(1)} + \lambda_3^{(1)} < 0$. Таким образом, с точностью замены времени t на $-t$, мы находимся в условиях применимости второго случая. А это означает, что модель Лоренца при r и σ из счетного множества областей имеет устойчивые периодические движения¹⁾.

III) Пусть $\lambda_1(0) < \lambda_2(0)$ и $\sigma(0) > 0$. Как известно, в рассматриваемом случае все траектории, принадлежащие $W^s(0)$, за исключением двух, будут входить в O , касаясь ведущего направления. Поскольку без ограничения общности можно считать, что система (2) при малых μ имеет вид

$$\dot{x}_i = \lambda_i(\mu) x_i + F_i(x_1, x_2, x_3, \mu), \quad i = 1, 2, 3,$$

то ведущим направлением будет ось x_2 . Две же исключительные траектории, входящие в O , касаются оси x_1 . Вместе с O они образуют неведущее многообразие, которое обозначим через $W_0^s(0)$. Оно разделяет $W^s(0)$ на две области, $W_+^s(0)$ и $W_-^s(0)$. Будем предполагать, что $\Gamma_1(0) \in W_+^s(0)$. Пусть U —

¹⁾ Можно также показать, что к каждой точке Q_{ij} примыкает бифуркационная кривая, соответствующая контуру из $O_1, \Gamma_{21}, O_2, \Gamma_{11}$.

некоторая достаточно малая окрестность $\overline{\Gamma_1(0)}$ и $\mathfrak{M}_1$ — связанная компонента пересечения $W_+^s(0)$ с U , содержащая $\Gamma_1(0)$. Как следует из [36], в общем случае $\mathfrak{M}_1$ есть двумерная непрерывная поверхность, гомеоморфная либо цилиндру, либо листу Мёбиуса. В 1-м случае $\overline{\Gamma_1(0)}$ будем называть ориентируемой петлей, а во втором — неориентируемой.

Теорема 1 [36]. *При сделанных предположениях из $\overline{\Gamma_1(0)}$ может родиться только одно периодическое движение $L_1(\mu)$ и притом седлового типа. В случае ориентируемой петли $\overline{\Gamma_1(0)}$ условие рождения состоит в том, чтобы*

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \Gamma_1(\mu) \supset \Gamma_2(0),$$

в случае неориентируемой — ¹⁾

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \Gamma_1(\mu) = \Gamma_1(0).$$

В первом случае инвариантные многообразия $L_1(\mu)$ будут цилиндрами, а во втором — листами Мёбиуса.

Доказательство теоремы основано на исследовании отображения последования $T_1(\mu)$, построенного на некоторой секущей пластинке D в плоскости $x_2 = d$ по траекториям, близким к $\Gamma_1(\mu)$. В некоторых локальных переменных на D это отображение может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_1^{**}(\mu) + y^{\alpha(\mu)} \varphi_1(x, y, \mu), \\ \bar{y} &= y_1^{**}(\mu) + y^{\alpha(\mu)} \psi_1(x, y, \mu), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\alpha(\mu) = |\lambda_2(\mu)| \lambda_3^{-1}(\mu)$, $P_1(x_1^{**}(\mu), y_1^{**}(\mu))$ точка 1-го пересечения Γ_1 с D , причем $y_1^{**}(0) = 0$; $y = 0$ есть уравнение пересечения $W^s(\mu)$ с плоскостью $x_2 = d$, а функции φ_1 и ψ_1 определены, непрерывны и дифференцируемы по x и $y > 0$ в D_1 при $\mu \geq 0$. При $y \rightarrow 0$ φ_1 и ψ_1 допускают доопределение по непрерывности величиной, зависящей только от μ . Предел ψ_1 при $y \rightarrow 0$ будем обозначать через $A_1(\mu)$. Кроме того, имеют место оценки

$$K_1 < \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cdot y^{1-\beta_1(\mu)} \right| < K_2, \quad K_3 < \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot y^{1-\beta_2(\mu)} \right| < K_4,$$

где $K_1, \dots, K_4$ — константы, а $\beta_1(\mu)$ и $\beta_2(\mu)$ — некоторые положительные функции, не превосходящие 1. На языке ото-

¹⁾ Здесь через $\lim$ обозначен топологический предел.

бражений условие $A_1(0) > 0$ означает, что петля $\overline{\Gamma_1(0)}$ ориентируемая, $A_2(0) < 0$ — что она неориентируема.

Пусть $W_1^s(\mu)$ и $W_1^u(\mu)$ устойчивое и неустойчивое многообразия периодического движения $L_1(\mu)$. В силу того что $L_1(\mu)$ отражается от $\overline{\Gamma_1(0)}$, можно показать, что $W_1^s(\mu)$ при $\mu \rightarrow 0$ имеет топологическим пределом множество, содержащее $W_+^s(0)$, а расстояние между $W_1^s(\mu)$ и $W^s(\mu)$ в D имеет порядок $|y_1^{**}(\mu)|^{1/\alpha(\mu)}$. Относительно $W_1^u(\mu)$ можно сказать следующее. $W_1^u(\mu)$ трансверсально пересекает $W^s(\mu)$ и в его границу входит $\Gamma_1(\mu)$.

Как мы уже отмечали, модель Лоренца допускает группу симметрии. Поэтому существование одной петли означает существование другой, причем обе сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 будут входить в O , касаясь друг друга. Из сказанного нетрудно извлечь, что устойчивые и неустойчивые многообразия родившихся периодических движений трансверсально пересекаются. А это означает, что при переходах через l_i , $i = 1, 4, 5$ будет возникать гомоклинический контур, а следовательно, нетривиальное гиперболическое множество [35]. Однако это множество, вообще говоря, уже всего появившегося предельного множества.

2. О рождении гиперболического множества $\Omega_1(\mu)$

Предположим, что при $\mu = 0$ обе сепаратрисы $\Gamma_1(0)$ и $\Gamma_2(0)$ возвращаются в седло и выполнены условия случая III. Предположим, что $\Gamma_1(0)$ и $\Gamma_2(0)$ входят в седло O , касаясь друг друга. Очевидно, в этом случае секущую площадку D можно выбрать так, чтобы и $\Gamma_1(0)$ и $\Gamma_2(0)$ пересекали ее. Обозначим точки пересечения $\Gamma_i(\mu)$ с D через $P_i(x_i^{**}(\mu), y_i^{**}(\mu))$. Аналогично $T_1(\mu)$, при $y < 0$ на $D_2 \subset D$ можно построить отображение $T_2(\mu)$, которое запишется в виде

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x_2^{**}(\mu) + (-y)^{\alpha(\mu)} \varphi_2(x, y, \mu), \\ \bar{y} &= y_2^{**}(\mu) - (-y)^{\alpha(\mu)} \psi_2(x, y, \mu),\end{aligned}\tag{4}$$

где φ_2 и ψ_2 удовлетворяют условиям, аналогичным φ_1 и ψ_1 . Предел ψ_2 при $y \rightarrow 0$ обозначим через $A_2(\mu)$.

Имеют место три основных случая:

Случай А (ориентируемый) — $A_1(0) > 0$, $A_2(0) > 0$.

Случай В (полуориентируемый) — $A_1(0) > 0$, $A_2(0) < 0$.

Случай С (неориентируемый) — $A_1(0) < 0$, $A_2(0) < 0$.

Для определенности будем предполагать, что из $\overline{\Gamma_1(0)}$ и $\overline{\Gamma_2(0)}$ при $\mu > 0$ рождаются периодические движения, т. е. $A_1(0) \cdot y_1^{**}(\mu) < 0$ и $A_2(0) \cdot y_2^{**}(\mu) > 0$.

Теорема 2. Пусть $y_1^{**}(\mu)$ и $y_2^{**}(\mu)$ имеют одинаковый порядок при $\mu \rightarrow 0$. Тогда при достаточно малых μ множество $\Omega_1(\mu)$ всех траекторий целиком лежащих в некоторой окрестности $\overline{\Gamma_1(0) \cup \Gamma_2(0)}$, исключая O , будет гомеоморфно надстройке над схемой Бернулли из двух символов¹⁾.

Надо сказать, что теорема 2 сформулирована при весьма ограниченном предположении, которое, однако, для модели Лоренца выполняется. Ниже мы приведем более сильную теорему, а здесь только заметим, что изучение рассматриваемой бифуркации требует рассмотрения двухпараметрического семейства систем, поскольку системы типа X_0 образуют бифуркационное множество коразмерности два.

3. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца

Дальнейшее рассмотрение связано с исследованием предельных множеств X_μ при не малых μ . Прежде всего будем предполагать $\lambda_1(\mu) < \lambda_2(\mu)$, $\sigma(\mu) = \max_{i=1,2} \lambda_i(\mu) + \lambda_3(\mu) > 0$. Кро-

ме того, предположим, что существует площадка без контакта D , такая, что:

(1) на D можно ввести евклидовы координаты (x, y) так, что

$$D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 2\},$$

(2) уравнение $y = 0$ описывает компоненту связности S пересечения $W^s(\mu) \cap D$, такую, что все ω -полутраектории, начинающиеся на S , не имеют больше точек пересечения с D при $t \rightarrow +\infty$;

(3) по траекториям системы определены отображения $T_1(\mu): D_1 \rightarrow D$ и $T_2(\mu): D_2 \rightarrow D$, где $D_1 = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, 0 < y \leq 1\}$, $D_2 = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, -1 \leq y < 0\}$, причем $T_i(\mu)$ записывается в виде

$$\bar{x} = f_i(x, y, \mu), \quad \bar{y} = g_i(x, y, \mu),$$

где f_i, g_i — гладкие функции по x и y и непрерывные по μ .

(4) f_i и g_i допускают доопределение по непрерывности на S ,

¹⁾ О надстройках над топологическими марковскими цепями см. [1, 3].

причем

$$\lim_{y \rightarrow 0} f_i(x, y, \mu) = x_i^{**}(\mu), \quad \lim_{y \rightarrow 0} g_i(x, y, \mu) = y_i^{**}(\mu),$$

$$T_1(\mu) D_1 \cap D \subset \Pi_1 = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1, |y| \leq 2 \right\}, \quad (5)$$

$$T_2(\mu) D_2 \cap D \subset \Pi_2 = \left\{ (x, y) \mid -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, |y| \leq 2 \right\}.$$

Из поведения траектории вблизи $W^s(\mu)$ вытекает, что в малой окрестности S для $T_1(\mu)$ имеет место представление вида (3), а для $T_2(\mu)$ — представление вида (4). Ясно, что точка $P_i(x_i^{**}(\mu), y_i^{**}(\mu))$ есть первая точка пересечения $\Gamma_i(\mu)$ с D .

Введем отображение $T(\mu)$, определенное на $D_1 \cup D_2$:

$$\bar{x} = f(x, y, \mu), \quad \bar{y} = g(x, y, \mu),$$

где $f = f_i$, $g = g_i$, если $(x, y) \in D_i$. Наложим на $T(\mu)$ следующие ограничения¹⁾:

$$\begin{aligned} \text{а) } \|f_x\| < 1, \quad \text{б) } \|g_y^{-1}\| < 1, \\ \text{в) } 1 - \|f_x\| \|g_y^{-1}\| &> 2 \sqrt{\|g_y^{-1}\| \cdot \|g_x\| \cdot \|g_y^{-1} \cdot f_y\|}, \\ \text{г) } \|g_y^{-1} \cdot f_y\| \cdot \|g_x\| &< (1 - \|f_x\|)(1 - \|g_y^{-1}\|). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь и ниже $\|\cdot\| = \sup |\cdot|$, $(x, y) \in D_1 \cup D_2$.

Все наложенные на $T(\mu)$ условия являются естественным обобщением условий на отображения $T_1(\mu)$ и $T_2(\mu)$, которые рассматривались выше при малых μ . В частности заметим, что поскольку ψ_1 и ψ_2 представимы в виде $\psi_i = A_i(\mu) + \dots$, где многоточие означает члены, стремящиеся к нулю при $y \rightarrow 0$, из условия (6) следует, что $A_i(\mu)$ не меняют знака. Поэтому понятие ориентируемого, полуориентируемого и неориентируемого случая можно распространить на любую систему X_μ . Для простоты удобно считать, что $A_i(\mu)$ не обращаются в нуль. При этом получаем, что для существования периодических движений $L_1(\mu)$ и $L_2(\mu)$ в случае А требуется, чтобы $P_1 \in D_2$, $P_2 \in D_1$, в случае В — $P_1 \in D_2$, $P_2 \in D_2$, а в случае С — $P_1 \in D_1$, $P_2 \in D_2$. Неподвижную точку — точку пересечения $L_i(\mu)$ с D — будем обозначать через $M_i(x_i^*(\mu), y_i^*(\mu))$. В случае С существует также еще одно периодическое движение $L_3(\mu)$, причем такое, что $L_3(\mu) \cap D = M_3(x_3^*(\mu), y_3^*(\mu)) \cup M_4(x_4^*(\mu), y_4^*(\mu))$, где $M_3 \in D_1$, $M_4 \in D_2$. Ясно, что все эти периодические движения имеют седловой тип. Из наложенных

¹⁾ Эти ограничения аналогичны условиям принципа кольца, использованного нами в задаче разрушения инвариантного тора [4, 5].

условий вытекает, что уравнения пересечений связных компонент устойчивых многообразий $W_i^s(\mu)$ периодических движений $L_i(\mu)$, $i = 1, 2$, с D , содержащих неподвижные точки M_i , представимы в виде $y = y_i(x, \mu)$, $|x| \leq 1$. Будем считать, что $W_1^s(\mu)$ в случае В есть вложенный цилиндр. В случае С уравнение связной компоненты $D \cap W_3^s(\mu)$, содержащей точку M_j , также будет записываться в виде

$$y = y_j(x, \mu), |x| \leq 1, j = 3, 4.$$

Определим следующие функции $R_1(\mu)$ и $R_2(\mu)$:

$$\text{в случае А } R_1(\mu) = y_2^{**}(\mu) - y_1(x_2^{**}(\mu), \mu),$$

$$R_2(\mu) = -(y_1^{**}(\mu) - y_2(x_2^{**}(\mu), \mu));$$

$$\text{в случае В } R_1(\mu) = y_2^{**}(\mu) - y_1(x_2^{**}(\mu), \mu),$$

$$R_2(\mu) = v^{**}(\mu) - y_1(u^{**}(\mu), \mu),$$

где $u_i^{**}(\mu)$, $v_i^{**}(\mu)$ есть координаты TP_i , $i = 1, 2$; в случае С $R_1(\mu) = y_2^{**}(\mu) - y_3(x_2^{**}(\mu), \mu)$, $R_2(\mu) = -(y_1^{**}(\mu) - y_4(x_1^{**}(\mu), \mu))$.

Обозначим через $\Sigma(\mu)$ замыкание множества всех точек траекторий отображения $T(\mu)$, целиком лежащих в D .

Теорема 3. Пусть $R_1(\mu) > 0$, $R_2(\mu) > 0$. Тогда $T(\mu)$ на $\Sigma(\mu)$ сопряжено со схемой Бернулли из двух символов.

Рассмотрим теперь случаи, когда нарушены условия теоремы.

1). Пусть $R_1(\mu) > 0$, $R_2(\mu) \leq 0$, ($R_1 \leq 0$, $R_2 > 0$). Здесь (при некоторых дополнительных условиях в случаях А и В) будет существовать нульмерное нетривиальное неустойчивое предельное множество $\Sigma(\mu)$. Но в отличие от вышеприведенного оно может быть негрубым для нульмерного множества значений μ , причем для континуума значений μ $\Sigma(\mu)$ не будет описываться конечной топологической марковской цепью.

2). $R_1(\mu) < 0$, $R_2(\mu) = 0$ ($R_1 = 0$, $R_2 \leq 0$). Здесь $\Sigma(\mu)$ уже будет одномерным. Однако оно неустойчиво.

3). $R_1(\mu) < 0$, $R_2(\mu) < 0$. В этом случае $\Sigma(\mu)$ также будет одномерным. При этом, если из $\Sigma(\mu)$ выбросить $M_1 \cup M_2$ в случае А, M_1 в случае В, и $M_3 \cup M_4$ в случае С, то оставшееся множество $\tilde{\Sigma}(\mu)$ будет притягивающим. С прикладной точки зрения $\tilde{\Sigma}(\mu)$ вполне можно считать странным аттрактором, поскольку в нем нет устойчивых периодических точек и они не возникают при шевелении μ . Однако $\tilde{\Sigma}(\mu)$ может не быть неблуждающим множеством. В том случае, когда оно являет-

ся неблуждающим, $\tilde{\Sigma}(\mu)$ будем называть аттрактором Лоренца.

Дальнейшее рассмотрение мы ограничим случаем А, да и то симметричным, хотя результаты будут аналогичными и в общем случае.

Предположим, что

$$f_2(x, y, \mu) = -f_1(-x, -y, \mu), \quad g_2(x, y, \mu) = -g_1(-x, -y, \mu)$$

Очевидно, в этом случае $R_1(\mu) = R_2(\mu) = R(\mu)$. Пусть $R(\mu) > 0$ при $\mu \in (0, \mu_0)$, $R(\mu_0) = 0$, $R(\mu) < 0$ при $\mu \in (\mu_0, 1]$.

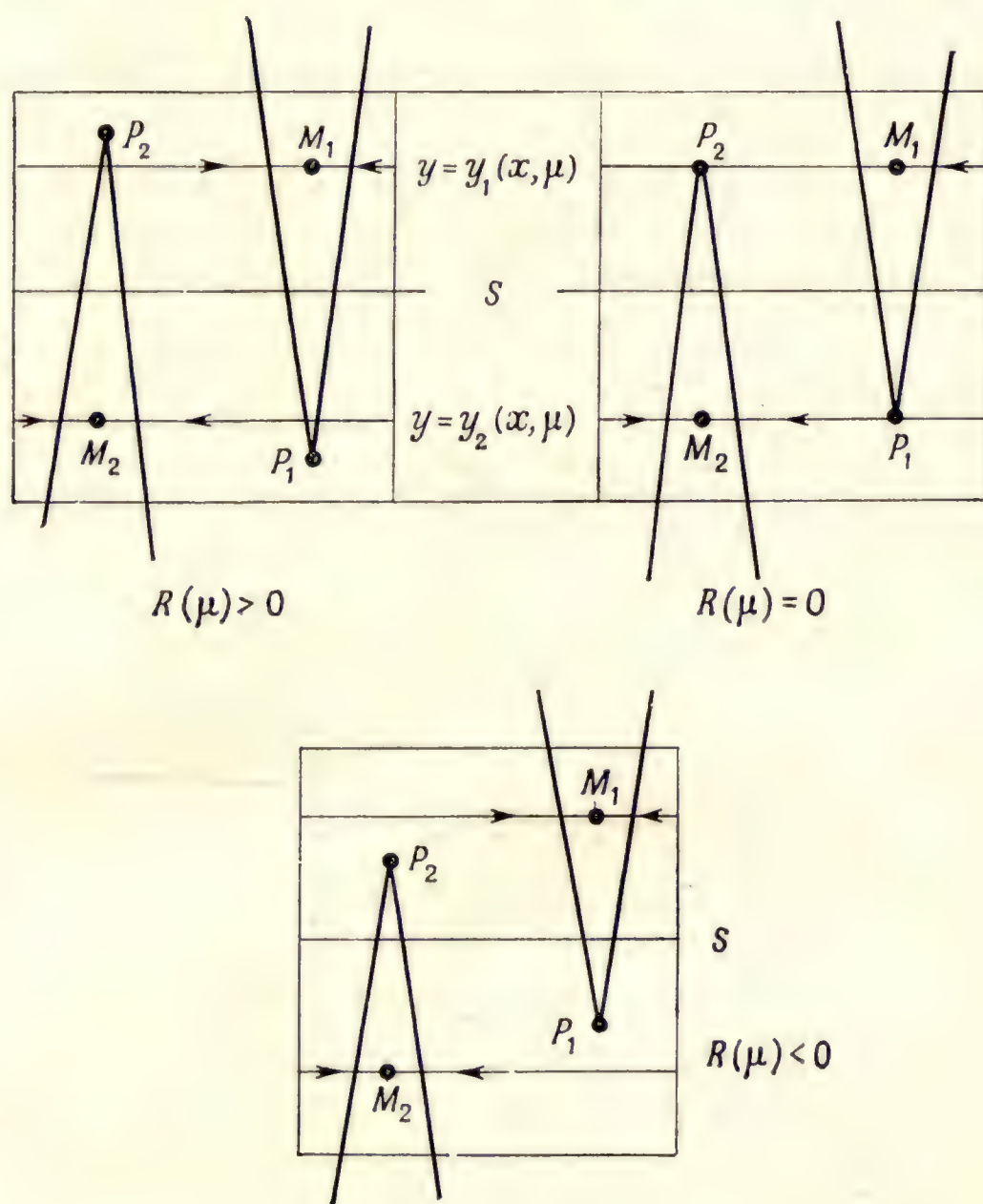


Рис. 6.

Значение $\mu = \mu_0$ бифуркационное, в этот момент $\Gamma_1(\mu_0)$ ложится на $W_2^s(\mu_0)$, а $\Gamma_2(\mu_0)$ на $W_1^s(\mu_0)$ (рис. 6)¹⁾.

Теорема 3. $\Sigma(\mu_0)$ одномерно, является неблуждающим множеством, в нем всюду плотны грубые периодические точки, состоит из двух компонент связности, во всех точках не принадлежащих $y = y_i(x, \mu)$, $i = 1, 2$, $\Sigma(\mu_0)$ локально устрое-

¹⁾ Бифуркации контуров, подобных контуру из $L_2(\mu_0)$, $\Gamma_1(\mu_0)$, O и траектории, соединяющей $L_2(\mu_0)$ с O , рассматривались в [39].

но как прямое произведение канторовского множества на отрезок.

Поскольку не все точки неустойчивых многообразий $W_i^u(\mu_0)$, принадлежат $\Sigma(\mu_0)$, то оно неустойчиво. Пусть $\bar{D}$ есть область, заключенная между кривыми $y = y_2(x, \mu)$ и $y = y_1(x, \mu)$. Очевидно, в силу условия $R(\mu) < 0$ при $\mu > \mu_0$, $T(\mu)(\bar{D} \setminus S) \subset \bar{D}$. Замыкание множества всех неблуждающих точек $T(\mu)$ на $\bar{D} \setminus S$ и будет $\tilde{\Sigma}(\mu)$. Пусть $N(\mu)$ таково, что при $k = N(\mu)$, $T^k(\mu)P_2 \in D_1$, а при $k = 0, 1, 2, \dots, N(\mu) - 1$ $T^k(\mu)P_2 \notin D_1$.

Введем в рассмотрение следующую величину:

$$q(\mu) = \frac{1}{2\|g_y^{-1}\|} \cdot (1 + \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| + \sqrt{(1 - \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|)^2 - 4\|g_y^{-1}\| \cdot \|g_x\| \|g_y^{-1}\| \cdot f_y}).$$

Из условия (6), наложенного на $T(\mu)$, можно извлечь, что $q(\mu) > q_0 > 1$.

Теорема 4. При выполнении условия¹⁾

$$q(\mu)^{N(\mu)} > 2$$

1) $\tilde{\Sigma}(\mu)$ есть аттрактор Лоренца; 2) $\tilde{\Sigma}(\mu)$ состоит из двух компонент связности, окрестность которого расслоена непрерывным устойчивым слоением на липшицируемые слои, по которым точки притягиваются к нему; 3) $\tilde{\Sigma}(\mu)$ — негрубое²⁾; 4) в $\tilde{\Sigma}(\mu)$ всюду плотны грубые периодические точки; 5) существует последовательность $T(\mu)$ -инвариантных нульмерных множеств $\Delta_k(\mu)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, таких, что $T(\mu)|_{\Delta_k(\mu)}$ сопряжено конечной транзитивной топологической марковской цепи, причем $\Delta_{k+1}(\mu) \subset \Delta_k(\mu)$ и $\Delta_k(\mu) \rightarrow \tilde{\Sigma}(\mu)$ при $k \rightarrow +\infty$; 6) в общем случае $T(\mu)$ на $\tilde{\Sigma}(\mu)$ для счетного всюду плотного множества значений μ допускает конечное марковское разбиение и не допускает для континуума значений μ ³⁾.

Из того, что $q(\mu)^{N(\mu)} \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \mu_0$, следует, что существует такое $\mu_1 \leq 1$, что при $\mu_0 < \mu \leq \mu_1$ (а не $\mu_0 < \mu \leq 1$, как было неверно выписано в нашей работе [6]) система X_μ будет иметь аттрактор Лоренца. Аттрактор Лоренца содержит O , $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_2(\mu)$, причем заметим, что периодические дви-

¹⁾ Для сравнения заметим, что в несимметричном случае аналогичное условие записывается в виде $q^{N_1+N_2} > q^{N_1} + q^{N_2}$.

²⁾ Эскиз доказательства негрубости в одном весьма частном случае отображения T был предложен Гукенхеймером [17].

³⁾ О марковских разбиениях см. [1].

жения при изменении μ могут исчезать только путем влипания в петли сепаратрис седла O .

В случае, когда $T(\mu)$ допускает конечное марковское разбиение, а оно имеет место, когда $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_2(\mu)$ стремятся либо к O , либо к периодическим движениям, $\tilde{\Sigma}(\mu)$ устроено весьма просто: в малой окрестности любой точки, не содержащей $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap D$, оно гомеоморфно прямому произведению канторовского множества на отрезок. В окрестности же точки $P(\mu)$, принадлежащей $\Gamma_i(\mu)$, связная компонента $\tilde{\Sigma}(\mu)$, содержащая $P(\mu)$ устроена, как букет бесконечного множества лучей, поскольку $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_2(\mu)$ являются границами неустойчивых многообразий точек $\tilde{\Sigma}(\mu)$. Свойство (2) говорит о том, что изучение $T(\mu)$ можно свести к кусочно-монотонному отображению отрезка на прямой. При этом следует заметить, что на каждом куске непрерывности (а их два) отображение, вообще говоря, будет лишь непрерывным.

В общем случае $\tilde{\Sigma}(\mu)$ также будет пределом нульмерных множеств $\Delta_k(\mu)$, но на них $T(\mu)$ уже не обязательно будет сопряжено транзитивной марковской цепи. Здесь в $\tilde{\Sigma}(\mu)$, кроме одномерного негрубого неблуждающего множества $\tilde{\Sigma}_1(\mu)$, может также входить конечное число грубых нульмерных множеств, как тривиальных (периодические орбиты), так и нетривиальных (описываемые ТМЦ). Тем не менее $\tilde{\Sigma}_1(\mu)$, за исключением, быть может, конечного множества значений μ , будет «странным» аттрактором.

4. Заключение

Из приведенного видно, что многие методы и приемы теории бифуркаций нашли свое применение при изучении модели Лоренца. При ее рассмотрении мы встретились с самыми различными, но ранее известными типами бифуркаций: это бифуркации состояний равновесия и периодических движений, бифуркации сепаратрисных контуров как с одним и двумя седлами, так и с седлом и периодическим движением и т. д. Однако и модель Лоренца в свою очередь поставила перед теорией бифуркаций ряд принципиально новых вопросов, на некоторые из которых мы ответили, а некоторые еще ждут своего решения. И здесь хочется особо подчеркнуть следующий факт, выявившийся в результате исследования модели Лоренца, но далеко выходящий за рамки данного конкретного случая: «странные» аттракторы могут возникать из неустойчивых предельных множеств. Естественно, что этот практически важный вывод не может не поколебать в какой-то мере укоренившееся представление, что переход от простых

движений к сложным должен сопровождаться некоторой серией «мягких» бифуркаций.

Автор считает необходимым отметить, что результаты, связанные с исследованием модели Лоренца, были получены совместно с В. С. Афраймовичем и В. В. Быковым. В основу изложения были положены наряду с [6] работа [40], содержащая развернутое изложение большинства затронутых здесь вопросов, а также результаты новых численных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В. М. Символическая динамика. Одиннадцатая математическая школа, Киев (1976).
2. Аносов Д. В. Геодезические потоки на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны. Труды матем. института им. В. А. Стеклова. АН СССР, 90 (1967).
3. Афраймович В. С., Шильников Л. П. Об особых множествах систем Морса — Смейла. Труды Московского матем. об-ва, т. 28 (1973), 181—214.
4. Афраймович В. С., Шильников Л. П. О малых периодических возмущениях автономных систем, ДАН СССР, т. 24, № 4 (1974), 739—742.
5. Афраймович В. С., Шильников Л. П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел. ДАН СССР, т. 219, № 6 (1974), 1281—1285.
6. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца, ДАН СССР, т. 234, № 2 (1977), 336—339.
7. Афраймович В. С., Шильников Л. П. Принцип кольца и задача о взаимодействии двух автоколебательных систем, ПММ, т. 41 (1977), 618—627.
8. Баутин Н. Н. Динамическая модель электромеханических часов с ходом Гиппа, Известия АН СССР (ОТН), № 11 (1957), 116—121.
9. Баутин Н. Н., Шильников Л. П. Поведение динамических систем вблизи границы области устойчивости состояний равновесия и периодических движений (опасные и безопасные границы). Дополнение I наст. книга.
10. Беляков Л. А. Об одном случае рождения периодического движения с двумя гомоклиническими кривыми. Матем. заметки 15, № 4, 571—580 (1974).
11. Быков В. В. О структуре окрестности сепаратрисного контура с седло-фокусом. Межвузовский сб. Методы качественной теории диф. уравнений, Горький (1978), 3—32.
12. Бунимович Л. А., Синай Я. Г. Стохастичность аттрактора в модели Лоренца, Нелинейные волны, М., Наука, 1979, 212—226.
13. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к негрубой гомоклинической кривой. I. Матем. сб. т. 88 (130), № 8, (1972), 475—492, II, 90 (132), № 1 (1973), 139—156.
14. Гаврилов Н. К. О трехмерных динамических системах, имеющих негрубый гомоклинический контур, Матем. заметки 14, № 5 (1973), 687—696.
15. Гаврилов Н. К. О n -мерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой, ДАН СССР, 212, № 1 (1973), 276—279.
16. Kaplan J., Jorke J. Preturbulent behaviour in the Lorenz equations (preprint).

17. Guckenheimer J., Astrange, strange attractor, J. Marsden, M. MacCrascen, The Hopf bifurcation and its Applications, Springer-Verlag, New York (1976) 368—381. [См. гл. 12 наст. книги.]
18. Комраз Л. А. Динамические модели маятникового регулятора Гиппа, ПММ, т. 35, № 1 (1971), 147—162.
19. Леонтович-Андропова Е. А., Шильников Л. П. Современное состояние теории бифуркаций динамических систем. Труды 5-й международной конференции по нелинейным колебаниям, т. II (1970), Киев, 282—290.
20. Лукьянов В. И., Шильников Л. П. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами. ДАН СССР, т. 243, № 1 (1978), 26—29.
21. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow, Journ. of the Atmospheric Sciences, v. 20, (1963), 130—141.
22. Морозов А. Д., Шильников Л. П. К математической теории синхронизации колебаний, ДАН СССР, 223, № 6 (1975), 543—547.
23. Newhouse S. Diffeomorphisms with infinitely sinks, Topology, 12, (1974), 9—18.
24. Плыкин Р. В. Источники и строки A -диффеоморфизмов поверхностей, Матем. сб. 94, № 2 (1974), 243—264.
25. Рощин Н. В. Опасные границы устойчивости в модели Лоренца. Прикладная математика и механика, № 5 (1978), 950—952.
26. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence, Comm. Math. Phys., 20 (1971), 167—192.
27. Ruelle D. The Lorenz attractor and the problem of turbulence, Lecture Notes in Math., 565 (1976), 146—158.
28. Robbins K. A. A new approach to subcritical instability and turbulent transitions in a simple dynamo, Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc., v. 82, Part 2 (1977), 309—325.
29. Saltzman B. Finite Amplitude free convection as a initial value problem, I, Journ. of the Atmospheric Sciences, v 19 (1962), 329—341.
30. Smale S. Differentiable dynamical systems, Bull. Amer. math. Soc. 66 (1967) (русский перевод, УМН, 25 в. 1 (1970), 113—185.)
31. Haken H. Analogy between higher instabilities in fluid and lasers, Phys. letters, v. 53A, N 1 (1975), 77—79.
32. Williams R. F. Classification of one dimensional attractors, Proc. Symp. in Pure math., v. 14, Global analysis, Amer. Math. Soc., Providence (1970), 361—393.
33. Шильников Л. П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий. Матем. сб. 61 (104), (1963), 443—466.
34. Шильников Л. П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений, ДАН СССР, т. 160, № 3 (1965), 558—561.
35. Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре — Биркгофа. — Матем. сб. 74 (116), (1967), 378—397.
36. Шильников Л. П. О рождении периодического движения из траектории двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло. Матем. сб. т. 77 (119), № 3 (1968), 461—472.
37. Шильников Л. П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус. — Матем. сб. 81 (123), № 1 (1970), 92—103.
38. Шильников Л. П. Теория бифуркаций динамических систем и опасные границы, ДАН СССР, т. 224, № 5 (1975), 1046—1051.
39. Шильников Л. П. Теория бифуркаций динамических систем с гомоклиническими кривыми Пуанкаре, VII Internationale Konferenz über nichtlineare Schwingungen, Band 1, 2, Berlin (1977), 279—293.
40. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца. — Труды Московского матем. общества (т. 44 в печати).

Дополнение III

КОММЕНТАРИИ К ТЕОРЕМЕ ХОПФА

Е. А. Леонтович

Формулировка теоремы о рождении цикла, данная Хопфом, так же как и аналогичная, но более простая и ясная, полученная Марсденом и Мак-кракеном для $\mathbb{R}^2$ в гл. 3 (теорема 3.1), — абсолютно корректны, однако условие $\operatorname{Re} \lambda'(0) \neq 0$, положенное Хопфом в основу его метода, является сильным ограничением при рассмотрении общей задачи о рождении предельных циклов из фокуса или центра и преграждает путь к получению многих важных результатов. При условии, наложенном Хопфом, невозможно рождение предельного цикла из центра, а из фокуса любой сложности может появиться только один предельный цикл. Эти особенности не связаны с существом задачи и являются следствием самого метода.

В настоящем дополнении мы сделаем ряд замечаний к теореме о рождении цикла.

Напомним, что в теореме 3.1 на оси x введена функция последования $\bar{x} = P(x, \mu)$, затем функция $V(x, \mu) = P(x, \mu)$ — x и, наконец, функция

$$\tilde{V}(x, \mu) = \frac{V(x, \mu)}{x} \text{ при } x \neq 0 \text{ и } \tilde{V}(0, \mu) = V'_x|_{x=0}$$

Функция $\tilde{V}(x, \mu)$ в окрестности $x = 0$ имеет вид

$$\tilde{V}(x, \mu) = \exp[2\pi \operatorname{Re} \lambda(\mu) / \operatorname{Im} \lambda(\mu)] - 1 + x\Phi(x),$$

и при этом очевидно, что $\tilde{V}(0, 0) = 0$.

Так как в силу предположения Хопфа (1.2)

$$\tilde{V}'_\mu|_{x=0, \mu=0} = 2\pi \operatorname{Re} \lambda'(0) / \operatorname{Im} \lambda(0) \neq 0,$$

то для функции $\tilde{V}(x, \mu)$ при $x = \mu = 0$ выполняются условия теоремы о неявных функциях, и из уравнения $\tilde{V}(x, \mu) = 0$ при всех достаточно малых x находится единственная функция $\mu = \mu(x)$.

Значения $x, \mu(x)$ соответствуют, очевидно, замкнутой траектории. Однако необходимо подчеркнуть, что в частных случаях таким единственным решением уравнения $\tilde{V}(x, \mu) = 0$ может оказаться $\mu = 0$. Это будет, очевидно, означать, что у рассматриваемой системы дифференциальных уравнений

при $\mu = 0$ все траектории, пересекающие ось x при достаточно малых x , будут замкнуты, т. е. особая точка $O(0, 0)$ системы X_0 есть центр. При этом для всех $\mu \neq 0$ у системы X_μ в окрестности $O(0, 0)$ не будет никаких замкнутых траекторий, так что в этом случае (и когда $\operatorname{Re} \lambda'(0) \neq 0$) при прохождении μ через нуль фокус будет менять устойчивость без рождения предельного цикла из особой точки. Простейший пример дает линейная система

$$\dot{x} = \mu x - \beta y, \quad \dot{y} = \beta x + \mu y \quad (\beta \neq 0).$$

Такая же ситуация имеет место для рассмотренного авторами книги уравнения Ван-дер-Поля. Там при изменении μ предельный цикл рождается не из фокуса, а из одной из кривых консервативной системы, соответствующей $\mu = 0$ (из окружности $x^2 + y^2 = 4$).

В методе Хопфа для рождения замкнутой траектории при смене устойчивости фокуса необходимо, чтобы при $\mu = 0$ особая точка имела характер фокуса. Если система X_μ (в $\mathbb{R}^2$) является аналитической, то для этого необходимо, чтобы при $\mu = 0$ особая точка была сложным фокусом, т. е. чтобы хотя бы одна из «ляпуновских величин» (см. дополнение I и главу 3В настоящей книги) была отлична от нуля. При условии, наложенном Хопфом, из фокуса любой сложности может появиться только одна замкнутая траектория (предельный цикл). Однако это может быть вовсе не так при использовании других методов. Например, в главах 3А и 3С рассматриваются некоторые частные случаи рождения двух замкнутых траекторий из сложного фокуса.

Между тем задача о рождении замкнутых траекторий из состояния равновесия с чисто мнимыми характеристическими корнями может быть поставлена более широко. Мы вкратце изложим здесь эту постановку и полученные при этом результаты (в случае $\mathbb{R}^2$).

Пусть аналитическая система

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2(x_1, x_2) \quad (A)$$

имеет в начале координат $O(0, 0)$ особую точку с чисто мнимыми характеристическими корнями $\pm \beta i$, $\beta \neq 0$. Пусть, как и в гл. 3,

$$\bar{x} = P(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

— функция последования этой системы, построенная на оси x_1 .

Так как система (A) по предположению аналитическая, то нетрудно видеть (например, из проведенного в гл. 3 построения функции $P(x)$), что функция последования также анали-

тическая функция. В силу предположения о том, что характеристические корни чисто мнимые, в функции последования $\alpha_1 = 1$. Кроме того, как доказал А. М. Ляпунов, если $\alpha_1 = 1$, то $\alpha_2 = 0$, и вообще, если $\alpha_{2n-1} = 0$, то $\alpha_{2n} = 0$, так что первый не равный нулю коэффициент α_m всегда нечетного номера¹⁾. Этот первый не равный нулю коэффициент α_{2n+1} и есть n -я ляпуновская величина, обозначаемая обычно L_n .

Рассматривая функцию последования, нетрудно убедиться в том, что если существует отличная от нуля ляпуновская величина

$$L_n \equiv \alpha_{2n+1} (\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{2n} = 0),$$

то особая точка $O(0, 0)$ имеет характер фокуса. Она называется «сложным фокусом кратности n ». Если по построению функции последования величина $\bar{x}$ соответствует значению t , большему чем значение t для величины x , то сложный фокус будет устойчивым, когда $L_n < 0$. Если при любом n будет $L_n = 0$, то точка $O(0, 0)$ — центр.

Пусть $\bar{G}$ — замкнутая область плоскости, содержащая единственную особую точку системы (A) — точку $O(0, 0)$. Рассмотрим наряду с системой (A) «измененную систему».

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1^*(x_1, x_2) = X_1(x_1, x_2) + \xi(x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2^*(x_1, x_2) = X_2(x_1, x_2) + \eta(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (A^*)$$

Мы будем говорить, что система (A^*) δ -близка к системе (A) в области $\bar{G}$ до ранга m , или что «добавки» $\xi(x_1, x_2)$, $\eta(x_1, x_2)$ ε -близки к нулю в области $\bar{G}$ до ранга m , если выполняются неравенства

$$|\xi(x_1, x_2)| < \varepsilon, |\eta(x_1, x_2)| < \varepsilon, \left| \frac{\partial^k \xi(x_1, x_2)}{\partial^i x_1 \partial^{k-i} x_2} \right| < \varepsilon, \left| \frac{\partial^k \eta(x_1, x_2)}{\partial^i x_1 \partial^{k-i} x_2} \right| < \varepsilon, \\ k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, k.$$

Мы всегда будем предполагать δ столь малым, чтобы у любой системы (A^*) , так же как и у системы (A) , в области $\bar{G}$ существовала единственная особая точка (это, очевидно,

¹⁾ В главе 3В настоящей книги этот факт устанавливается при рассмотрении системы, зависящей от параметра, и используется предположение, что решение $\mu(x)$ уравнения $\bar{V}(x, \mu) = 0$ удовлетворяет определенным условиям. Доказательство А. М. Ляпунова проводится непосредственно для данной фиксированной системы в $\mathbb{R}^n$, где n любое, в предположении только, что, кроме пары чисто мнимых корней, все остальные корни имеют отрицательные действительные части.

всегда возможно, так как характеристические корни точки $O(0, 0)$ системы (A) не равны нулю).

В случае, когда у системы (A) n -я ляпуновская величина $L_n \neq 0$, мы будем полагать $m = 2n + 1$ (в остальном $\xi(x_1, x_2)$ и $\eta(x_1, x_2)$ — какие угодно δ -близкие к нулю до ранга $2n + 1$ аналитические функции).

Случай, когда наряду с системой (A) дана система, зависящая от параметров

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, x_2; \mu_1, \dots, \mu_n),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = X_2(x_1, x_2; \mu_1, \dots, \mu_n),$$

такая, что

$$X_1(x_1, x_2; 0, \dots, 0) = X_1(x_1, x_2), \quad X_2(x_1, x_2; 0, \dots, 0) = X_2(x_1, x_2),$$

можно рассматривать как частный случай некоторого множества измененных систем, в которых

$$\xi(x_1, x_2) = X_1(x_1, x_2; \mu_1, \dots, \mu_n) - X_1(x_1, x_2),$$

$$\eta(x_1, x_2) = X_2(x_1, x_2; \mu_1, \dots, \mu_n) - X_2(x_1, x_2).$$

При стремлении μ_i к нулю мы приближаемся в функциональном пространстве «добавок» к «точке» (X_1, X_2) этого пространства по некоторому подмногообразию, в случае одного параметра — по некоторому пути.

Функцию последования для измененной системы будем обозначать через $\bar{x} = P(x)$ и соответственно $P^*(x)$ — x через $V^*(x)$.

Имеет место следующая теорема А. А. Андронова и Е. А. Леонтович [1].

Теорема. Если точка $O(0, 0)$ — сложный фокус кратности n системы (A) , то:

(а) существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$, такие, что всякая измененная система (A^*) , δ_0 -близкая к (A) до ранга $2n + 1$, имеет в ε_0 -окрестности точки $O(0, 0)$ не более n замкнутых траекторий (предельных циклов).

(б) для любых $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\varepsilon > 0$, $\delta < \delta_0$, $\delta > 0$ можно указать такую измененную систему (A^*) , δ -близкую к (A) до ранга $2n + 1$, у которой в ε -окрестности точки $O(0, 0)$ существует n замкнутых траекторий (предельных циклов).

С очевидными ограничениями аналогичная теорема справедлива и для систем класса C^k .

Отметим, что величины ε_0 и δ_0 «отделяют» замкнутые траектории, появляющиеся из особой точки $O(0,0)$, от замкнутых траекторий другого происхождения.

Доказательство этой теоремы несложно. Утверждение (а) опирается, во-первых, на тот факт (который устанавливается без труда, а геометрически очевиден), что каждой замкнутой траектории, лежащей в ε_0 -окрестности $O(0,0)$, соответствует два корня функции $V^*(x)$ — один положительный и один отрицательный, и, во-вторых, на то, что когда $L_n \neq 0$, уравнение $V^*(x) = 0$ может иметь не более $2n + 1$ корней, один из которых соответствует особой точке.

Для доказательства утверждения (б) необходимо сначала получить выражения для фокусных величин. Переходя в системе (А) к полярным координатам $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ (как в гл. 3) и учитывая, что $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$ при достаточно малых ρ ($\rho < \rho^*$), мы можем вместо системы (А) написать, исключая t , одно уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\theta} = R(\rho, \theta) &= R_1(\theta)\rho + R_2(\theta)\rho^2 + \dots = \\ &= \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \rho^m U_m(\cos \theta, \sin \theta)}{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m V_m(\cos \theta, \sin \theta)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где U_m , V_m выражаются через однородные члены степени m в $X_1(x_1, x_2)$ и $X_2(x_1, x_2)$. Если обозначить через $X_{1m}(x_1, x_2)$ и $X_{2m}(x_1, x_2)$ однородные многочлены степени m в $X_1(x_1, x_2)$ и $X_2(x_1, x_2)$, то, как нетрудно видеть,

$$\begin{aligned} U_m &= X_{1m}(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + X_{2m}(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta, \\ V_m &= X_{2m}(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - X_{1m}(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta. \end{aligned}$$

Умножая обе части (1) на знаменатель правой части, приравнявая члены с одинаковыми степенями ρ , а затем разрешая относительно $R_k(\theta)$, получаем следующие выражения для $R_k(\theta)$ (нетрудно видеть, что $R_1(\theta) = 0$, если $\operatorname{Re} \lambda(0) = 0$):

$$R_k = \frac{U_k(\cos \theta, \sin \theta)}{\beta} + W_k(\theta), \quad \beta = \operatorname{Im} \lambda(0) \neq 0,$$

где

$$W_k = R_2 V_{k-1} + \dots + R_{k-1} V_2.$$

Решение $\rho = f(\rho_0, \theta)$ уравнения (1), принимающее значение ρ_0 при $\theta = 2\pi$, очевидно, является аналитической функ-

цией ρ_0 , и, разлагая его по степеням ρ_0 , мы имеем

$$\rho = \alpha_1(\theta) \rho_0 + \alpha_2(\theta) \rho_0^2 + \alpha_3(\theta) \rho_0^3 + \dots, \quad (2)$$

а функцию последования на оси x_1 мы получим, полагая в (2) $\theta = 2\pi$. В обозначениях, принятых в настоящей книге, ρ_0 обозначается через x , а ρ через $\bar{x}$, и, таким образом, мы имеем функцию последования

$$\bar{x} = \alpha_1(2\pi) x + \alpha_2(2\pi) x^2 + \alpha_3(2\pi) x^3 + \dots,$$

где ряд в правой части сходится при достаточно малых x (при чисто мнимых характеристиках корня $\alpha_1(2\pi) = 1$).

Для нахождения коэффициентов функции последования мы должны, очевидно, найти $\alpha_i(\theta)$. Подставляя (2) в уравнение (1) и приравнявая коэффициенты при ρ_0 в левой и правой части, мы получаем для определения α_i рекуррентные дифференциальные уравнения (при $\operatorname{Re} \lambda = 0$):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_2 &= R_2, \quad \dot{\alpha}_3 = R_3(\theta) + H_3(\theta), \\ \dot{\alpha}_k &= R_k(\theta) + H_k(\theta), \end{aligned}$$

где $H_k(\theta)$ содержит $R_i(\theta)$ при $i < k$. Отсюда, очевидно, следует, принимая во внимание выражение для $R_k(\theta)$, что

$$\alpha_k(2\pi) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{U_k(\cos \theta, \sin \theta)}{\beta} + G_k(\theta) \right] d\theta, \quad (3)$$

где $G_k(\theta)$ зависит от U_i и V_i при $i < k$.

Доказательство утверждения (б) опирается на следующую лемму:

Лемма. Если все фокусные величины системы (A) до $2s + 1$ -й включительно равны нулю, то для измененной системы вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2) + \lambda(x_1^2 + x_2^2)^s x_1 = X_1^*(x_1, x_2, \lambda) \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2) + \lambda(x_1^2 + x_2^2)^s x_2 = X_2^*(x_1, x_2, \lambda) \end{aligned} \quad (A^*)$$

фокусные величины в функции последования $\bar{x} = P^*(x, \lambda)$, соответствующей системе (A^*) , до $2s$ -й включительно равны нулю, а $2s + 1$ -я фокусная величина имеет вид

$$\alpha_{2s+1}^* = \frac{2\pi\lambda}{\beta}.$$

Справедливость утверждения леммы непосредственно вытекает из сделанных предположений и выражения для $\alpha_{2s+1}(\lambda)$,

которое в силу (3), очевидно, имеет вид

$$\alpha_{2s+1}^* = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \cos^2 \theta + \lambda (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \sin^2 \theta}{\beta} d\theta = \frac{2\pi\lambda}{\beta}.$$

Для доказательства утверждения (б) в предположении, что $\alpha_{2n+1} \neq 0$, рассмотрим измененную систему вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2) + \lambda_0 x_1 + \lambda_1 x_1 (x_1^2 + x_2^2) + \dots \\ &\quad \dots + \lambda_{n-1} x_1 (x_1^2 + x_2^2)^{n-1}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2) + \lambda_0 x_2 + \lambda_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) + \dots \\ &\quad \dots + \lambda_{n-1} x_2 (x_1^2 + x_2^2)^{n-1}. \end{aligned} \quad (\tilde{A})$$

При любом заданном $\varepsilon > 0$ мы можем считать параметры столь малыми, чтобы система $(\tilde{A})$ была ε -близка до ранга $2n + 1$ к системе (A) . Будем обозначать функцию последования для системы $(\tilde{A})$ через $\tilde{P}(x, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$. Очевидно, $\tilde{P}(x, 0, \dots, 0) = P(x)$, т.е. функции последования для исходной системы (A) . Пусть для определенности у системы (A) будет $\alpha_{2n+1} > 0$. Тогда, очевидно, для системы (A) мы имеем

$$\tilde{V}(x, 0, \dots, 0) = \tilde{P}(x, 0, \dots, 0) - x = \alpha_{2n+1} x^n + \dots$$

при всех $x > 0$. Зафиксируем некоторое $x_1 > 0$, настолько малое, чтобы мы имели $\tilde{V}(x_1, 0, \dots, 0) > 0$. Положим теперь в измененной системе $(\tilde{A})$ $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-2} = 0$, $\lambda_{n-1} \neq 0$. Предполагая $\beta > 0$, возьмем $\lambda_{n-1} < 0$, столь малое, чтобы при $x = x_1$ мы имели бы $\tilde{V}(x_1, 0, \dots, 0, \lambda_{n-1}) > 0$, что, очевидно, всегда возможно.

С другой стороны, так как в силу леммы мы имеем

$$\tilde{V}(x, 0, \dots, 0, \lambda_{n-1}) = \frac{2\pi\lambda_{n-1}}{\beta} x + \dots$$

и так как $\lambda_{n-1} < 0$, то всегда можем взять такое достаточно малое $x_2 > 0$, чтобы мы имели $\tilde{V}(x_2, 0, \dots, 0, \lambda_{n-1}) < 0$. Далее, рассматривая систему $(\tilde{A})$ при условии, что $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-3} = 0$, $\lambda_{n-2} > 0$, и рассуждая аналогично, т.е. выбирая $\lambda_{n-2} > 0$ достаточно малым, можем найти такое число x_3 , что $x_3 < x_2 < x_1$ и

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x_3, 0, \dots, 0, \lambda_{n-2}, \lambda_{n-1}) &> 0, \quad \tilde{V}(x_2, 0, \dots, 0, \lambda_{n-1}) < 0, \\ \tilde{V}(x_1, 0, \dots, 0, \lambda_{n-1}) &> 0. \end{aligned}$$

Рассуждая далее аналогично и принимая во внимание, что при $\lambda_0 \neq 0$ в функции последования $\bar{x} = \bar{P}(x, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ будет $\tilde{\alpha}_1 = \exp \left\{ \frac{2\pi\lambda_0}{\beta} \right\}$, мы получим последовательность значений $x_1 > x_2 > \dots > x_n > 0$, таких, что

$$V(x_i, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) > 0, \text{ если } i \text{ нечетное,}$$

$$\tilde{V}(x_i, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) < 0, \text{ если } i \text{ четное.}$$

Отсюда очевидно, что функция $V(x, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ при выбранных λ_i обращается в нуль между каждыми двумя значениями x_i и x_{i+1} и между 0 и x_n , т.е. имеет n корней. Так как нули этой функции соответствуют замкнутым траекториям, то отсюда очевидно вытекает, что система $(\tilde{A})$ при надлежащем выборе параметров λ_i (при этом, очевидно, можно взять λ_i столь малыми, чтобы система $(\tilde{A})$ была δ -близка до ранга $2n + 1$ к системе (A)) будет иметь в ε -окрестности состояния равновесия $O(0, 0)$ n замкнутых траекторий¹⁾. ■

Если отказаться от условия Хопфа

$$\frac{d}{d\mu} \operatorname{Re} \lambda(\mu) \Big|_{\mu=0} \neq 0,$$

то окажется возможным также и рождение предельного цикла из особой точки типа центр. Вот простой пример:

$$\frac{dx}{dt} = -y + \mu(x^2 + y^2 - \mu)x,$$

$$\frac{dy}{dt} = x + \mu(x^2 + y^2 - \mu)y.$$

Очевидно, что $x^2 + y^2 - \mu = 0$ есть интегральная кривая системы. Кривой контактов траекторий системы с кривыми семейства окружностей $x^2 + y^2 = h$ будет $\mu(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - \mu) = 0$, и потому $x^2 + y^2 = \mu$ есть предельный цикл. Он возникает из точки $x = y = 0$ при возрастании μ от нуля.

Предположим теперь, что состояние равновесия $O(0, 0)$ системы является центром. Пусть $k > 0$ — какое-нибудь целое число.

Рассмотрим измененную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2) + \lambda_0 x_1 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2)x_1 + \dots \\ &\quad \dots + \lambda_k(x_1^2 + x_2^2)^k x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2) + \lambda_0 x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2)x_2 + \dots \\ &\quad \dots + \lambda_k(x_1^2 + x_2^2)^k x_2. \end{aligned} \quad (A_\lambda^k)$$

¹⁾ В работе Такенса [2] устанавливается возможность появления одной, двух и трех замкнутых траекторий.

Здесь имеет место вторая теорема А. А. Андропова и Е. А. Леонтович [1].

Теорема. Если особая точка O системы (A) является центром, то (а) существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\lambda_0 > 0$, такие, что при всех λ_i , $|\lambda_i| < \lambda_0$, у системы (A_λ^k) в ε_0 -окрестности O лежит не более k замкнутых траекторий (предельных циклов);

(б) при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ и $\lambda^* < \lambda_0$ ($\lambda^* > 0$) можно указать такие значения λ_i $|\lambda_i| < \lambda^*$, при которых у системы (A_λ^k) в ε -окрестности начало O лежат k предельных циклов.

В случае системы в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) для доказательства сформулированных теорем можно воспользоваться теоремой о центральном многообразии (см. также [3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Рождение предельных циклов из негрубого фокуса или центра и от негрубого предельного цикла.— Матем. сб., том 40, вып. 2, 1956, 179—224.
2. Takens F. Unfolding of certain Singularities of Vectorfields: Generalized Hopf Bifurcations. J. of Diff. Equations, vol. 14, No 3, 1973.
3. Шафранов Г. Я. Рождение периодических движений из состояния равновесия с чисто мнимыми корнями.— Дифференциальные уравнения, т. 10, № 5, 1976.

ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

1. К стр. 8.

Обобщение результатов с двумерного случая на некоторые случаи систем высшей размерности выполнено Н. Н. Баутиным по предложению А. А. Андропова в 1941 г. (диссертация). Опубликовано в 1948 [1] и 1949 [2] гг. Рассматривались системы общего вида

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^3 a_k^{(j)} x_k + P_j(x_1, x_2, x_3); \quad j = 1, 2, 3$$

и

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^4 a_k^{(j)} x_k + P_j(x_1, x_2, x_3, x_4); \quad j = 1, 2, 3, 4$$

(P_j не содержат членов ниже второго порядка), а также n -мерная система

$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^n Q_k^{(j)} x_k + P_j^*(x_1, \dots, x_n); \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(P_j не содержат членов ниже третьего порядка).

Условия рождения периодических движений в общем n -мерном случае (для систем, приведенных к некоторым специальным видам) получены Ю. И. Неймарком [3] и Н. Н. Брушлинской [4].

2. К стр. 17.

Бифуркации, сопровождающиеся появлением замкнутых траекторий, многочисленны и разнообразны. По поводу основных из них смотрите дополнение I.

3. К стр. 89.

Доказательство этой теоремы по существу опирается не непосредственно на теорему Хопфа, а на следующее следствие из нее, которое мы формулируем для случая R^2 :

Если при значении $\mu = 0$ особая точка $O(0, 0)$ имеет чисто мнимые характеристические корни, а при $\mu > 0$ и $\mu < 0$ в некоторой фиксированной окрестности $O(0, 0)$ нет замкнутых траекторий, то особая точка $O(0, 0)$ является центром.

Для случая $n > 2$ аналогичное утверждение справедливо для инвариантного многообразия.

4. К стр. 91.

В этом разделе при построении «бифуркационного уравнения», т. е. уравнения, различные корни которого соответствуют различным замкнутым траекториям, появляющимся из особой точки O , фактически используется метод усреднения Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [5, 6]. Этот метод является плодотворным в разных ситуациях, в частности при рассмотрении неавтономных систем. Однако обоснование его далеко не

элементарно. В данном случае бифуркационное уравнение получается очень просто интегрированием по θ правой части рассматриваемого уравнения

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \varepsilon^2 (R_0 + \varepsilon^2 R_1 + \dots).$$

Однако в задаче о рождении предельного цикла из негрубого фокуса представляется более целесообразным рассмотрение бифуркационного уравнения, полученного из функции последования, так как в этом случае «бифуркационное уравнение» позволяет рассматривать случай кратных (в частности, двукратных) циклов, а также случай центра, что невозможно (в силу отсутствия соответствующего обоснования) для бифуркационного уравнения, полученного усреднением. О методе усреднения см. также главу 4С настоящей книги.

5. К стр. 110.

$V'''(0)$ совпадает с первой ляпуновской величиной. Впервые вычисление ляпуновской величины для решения вопроса о рождении из состояния равновесия типа фокус предельного цикла при изменении параметров системы было осуществлено А. А. Андроновым [7] в задаче о катодном генераторе в 1937 г. Первая ляпуновская величина для системы двух уравнений общего вида (без требования выполнения условия 4.4) вычислена в 1938 году [8].

Приведем выражение первой ляпуновской величины для системы трех уравнений. Для системы в каноническом виде

$$\frac{d\xi_1}{dt} = -\lambda\xi_1 + Q_1, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = -\sqrt{q}\xi_3 + Q_2, \quad \frac{d\xi_3}{dt} = \sqrt{q}\xi_2 + Q_3.$$

где

$$Q_j = A_{11}^{(j)}\xi_1^2 + A_{22}^{(j)}\xi_2^2 + A_{33}^{(j)}\xi_3^2 + A_{12}^{(j)}\xi_1\xi_2 + 2A_{13}^{(j)}\xi_1\xi_3 + 2A_{23}^{(j)}\xi_2\xi_3 + A_{111}^{(j)}\xi_1^3 + \\ + A_{222}^{(j)}\xi_2^3 + A_{333}^{(j)}\xi_3^3 + 3A_{112}^{(j)}\xi_1^2\xi_2 + 3A_{113}^{(j)}\xi_1^2\xi_3 + 3A_{122}^{(j)}\xi_1\xi_2^2 + 3A_{223}^{(j)}\xi_2^2\xi_3 + \\ + 3A_{133}^{(j)}\xi_1\xi_3^2 + 3A_{233}^{(j)}\xi_2\xi_3^2 + 6A_{123}^{(j)}\xi_1\xi_2\xi_3 + \dots$$

первая ляпуновская величина будет [2]:

$$L_1 = \frac{\pi}{4q} [2(A_{33}^{(2)}A_{33}^{(3)} - A_{22}^{(2)}A_{22}^{(3)}) + 2A_{23}^{(2)}(A_{22}^{(2)} + A_{22}^{(3)} + A_{33}^{(2)}) - \\ - 2A_{23}^{(3)}(A_{22}^{(3)} + A_{33}^{(3)}) + 3\sqrt{q}(A_{222}^{(2)} + A_{333}^{(3)} + A_{233}^{(2)} + A_{223}^{(3)})] + \\ + \frac{\pi}{4\lambda\sqrt{q}(\lambda^2 + 4q)} \{ \lambda^2 [2A_{22}^{(1)}(3A_{12}^{(2)} + A_{13}^{(3)}) + \\ + 2A_{33}^{(1)}(A_{12}^{(2)} + 3A_{13}^{(3)}) + 4A_{23}^{(1)}(A_{13}^{(2)} + A_{12}^{(3)})] + \\ + 4\lambda\sqrt{q}[(A_{22}^{(1)} - A_{33}^{(1)})(A_{13}^{(2)} + A_{12}^{(3)}) + 2A_{23}^{(1)}(A_{13}^{(3)} - A_{12}^{(2)})] + \\ + 16q(A_{22}^{(1)} + A_{33}^{(1)})(A_{12}^{(2)} + A_{13}^{(3)}) \}.$$

Коэффициенты системы общего вида

$$\frac{dx_j}{dt} = Q_1^{(j)}x_1 + Q_2^{(j)}x_2 + Q_3^{(j)}x_3 + P_j \quad (j = 1, 2, 3),$$

где P_j имеют тот же вид, что и Q_j (с заменой соответственно ξ на x и A на a с сохранением всех индексов), связаны с коэффициентами си-

стемы, приведенной к каноническому виду, соотношениями

$$A_{kl}^{(j)} = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{p=1}^3 \alpha'_{jp} [a_{11}^{(p)} \alpha_{1k} \alpha_{1l} + a_{22}^{(p)} \alpha_{2k} \alpha_{2l} + a_{33}^{(p)} \alpha_{3k} \alpha_{3l} + \\ + a_{12}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{2l} + \alpha_{1l} \alpha_{2k}) + a_{13}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{3l} + \alpha_{1l} \alpha_{3k}) + a_{23}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{3l} + \alpha_{2l} \alpha_{3k})].$$

$$A_{kls}^{(j)} = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{p=1}^3 \alpha'_{jp} [a_{111}^{(p)} \alpha_{1k} \alpha_{1l} \alpha_{1s} + a_{222}^{(p)} \alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{2s} + a_{333}^{(p)} \alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{3s} + \\ + a_{112}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{1l} \alpha_{2s} + \alpha_{1k} \alpha_{1s} \alpha_{2l} + \alpha_{1l} \alpha_{1s} \alpha_{2k}) + a_{113}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{1l} \alpha_{3s} + \alpha_{1k} \alpha_{1s} \alpha_{3l} + \\ + \alpha_{1l} \alpha_{1s} \alpha_{3k}) + a_{233}^{(p)} (\alpha_{3k} \alpha_{3l} \alpha_{2s} + \alpha_{3k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{2k} \alpha_{3l} \alpha_{3s}) + a_{122}^{(p)} (\alpha_{1s} \alpha_{2k} \alpha_{2l} + \\ + \alpha_{1k} \alpha_{2l} \alpha_{2s} + \alpha_{1l} \alpha_{2s} \alpha_{2k}) + a_{223}^{(p)} (\alpha_{2k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{2k} \alpha_{2s} \alpha_{3l} + \alpha_{2l} \alpha_{2s} \alpha_{3k}) + \\ + a_{133}^{(p)} (\alpha_{1s} \alpha_{3k} \alpha_{3l} + \alpha_{1l} \alpha_{3s} \alpha_{3k} + \alpha_{1k} \alpha_{3l} \alpha_{3s}) + a_{123}^{(p)} (\alpha_{1k} \alpha_{2l} \alpha_{3s} + \alpha_{1l} \alpha_{2k} \alpha_{3s} + \\ + \alpha_{1k} \alpha_{2s} \alpha_{3l} + \alpha_{1s} \alpha_{2k} \alpha_{3l} + \alpha_{1l} \alpha_{2s} \alpha_{3k} + \alpha_{1s} \alpha_{2l} \alpha_{3k})].$$

Здесь

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_2^{(2)} + \lambda & a_3^{(2)} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{21} = \begin{vmatrix} a_3^{(1)} & a_1^{(1)} + \lambda \\ a_3^{(2)} & a_1^{(2)} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{31} = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} + \lambda & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} + \lambda \end{vmatrix}, \\ \alpha_{12} = \begin{vmatrix} a_3^{(1)} & a_1^{(1)} \\ a_3^{(3)} & a_1^{(3)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^{(1)} & a_1^{(1)} \\ a_2^{(2)} & a_1^{(2)} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{22} = \begin{vmatrix} a_3^{(2)} & a_1^{(2)} \\ a_3^{(3)} & a_1^{(3)} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} \end{vmatrix}, \\ \alpha_{13} = (a_2^{(2)} + a_3^{(3)}) \sqrt{q}, \quad \alpha_{23} = -a_1^{(2)} \sqrt{q}, \quad \alpha_{33} = -a_1^{(3)} \sqrt{q}, \\ \lambda = -(a_1^{(1)} + a_2^{(2)} + a_3^{(3)}), \quad q = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_3^{(1)} \\ a_1^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \end{vmatrix}, \\ \alpha'_{jp} = (-1)^{p+j} \Delta_1, \quad \Delta_0 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix},$$

и Δ_1 получается вычеркиванием из Δ_0 p -й строки и j -го столбца.

Предполагается, что характеристическое уравнение линейной системы первого приближения имеет чисто мнимые корни ($\lambda q + \Delta = 0$, где Δ — определитель системы), и нумерация исходных уравнений такова, что

$$\begin{vmatrix} a_1^{(1)} + \lambda & a_2^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} + \lambda \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_2^{(2)} - i \sqrt{q} & a_3^{(3)} \\ a_2^{(3)} & a_3^{(3)} - i \sqrt{q} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Такие два различных минора всегда найдутся.

Выражение первой ляпуновской величины через коэффициенты системы четырех уравнений общего вида дано в [2].

6. К стр. 118.

Так как величина $V'''(0)$ совпадает по знаку с первой ляпуновской величиной, то, разумеется, при исследовании конкретных задач нет необ-

ходимости проделывать каждый раз довольно громоздкие преобразования к специальному виду, описанные авторами. Можно использовать готовые выражения первой ляпуновской величины для уравнений общего вида, приведенные в различных изданиях (например, в [9, 10]).

7. К стр. 119.

Рассуждения авторов о возможности обнаружить методом Хопфа рождение цикла из кривой $x^2 + y^2 = 4$ выбором системы координат, переводящей окружность радиуса 2 в начало координат, — не убедительны (естественно считать, что, исследуя вопрос о рождении цикла, еще не знают есть ли цикл вообще и тем более — его уравнение). Не меняет дело и сведение заменой $\xi = x$, $y = \dot{x} + \mu(1/3x^3 - x)$ (на которую указывают авторы) к системе того же типа, что и пример в 4В.1, так как здесь параметр μ будет входить также и при члене с ξ^3 . Здесь цикл также ответвляется от кривой $\xi^2 + y^2 = 4$ и метод Хопфа его не обнаруживает. Этот результат, однако, весьма просто получить, следуя Л. С. Пон-трягину [11].

Если записать уравнение Ван-дер-Поля в виде системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \mu q(x, y), \quad q(x, y) \equiv (1 - x^2)y,$$

то радиусы окружностей $x^2 + y^2 = h_0 \neq 0$, от которых ответвляются предельные циклы, находятся из уравнения

$$\psi(h) \equiv \iint \frac{\partial q}{\partial y} dx dy = 4 \int_0^{\sqrt{h}} (1 - x^2) \sqrt{h - x^2} dx = \frac{\pi h}{4} (4 - h) = 0.$$

8. К стр. 123.

Для вычисления был использован алгоритм определения первой ляпуновской величины через коэффициенты системы общего вида

$$\dot{x}_j = a_1^{(j)}x_1 + a_2^{(j)}x_2 + a_3^{(j)}x_3 + P_j(x_1, x_2, x_3); \quad j = 1, 2, 3,$$

данный Н. Н. Баутиным (см. примечание 5).

9. К стр. 175.

В этой главе требуется, чтобы $e^{k\theta(0)} \neq 1$ при $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Однако очевидно, что при наличии большего числа производных у отображения Φ_μ (в частности, когда Φ_μ класса C^∞) необходимо наложить на $\theta(0)$ тем большее число требований, чем большее число членов мы хотим привести к каноническому виду. Именно $e^{k\theta(0)} \neq 1$, $k = 1, 2, \dots, n$ и n — любое заданное целое число, если Φ_μ класса C^∞ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин Н. Н. Критерии опасных и безопасных границ области устойчивости. — ПММ, т. 12, № 6, 1948.
2. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Серия «Современные проблемы механики». — Л.—М.: ОГИЗ ГОСТЕХИЗДАТ, 1949.
3. Неймарк Ю. И. О некоторых случаях зависимости периодических движений от параметров. — ДАН СССР, т. 129, № 4, 1959.
4. Брушлинская Н. Н. Качественное интегрирование одной системы дифференциальных уравнений в области, содержащей особую точку и предельный цикл. — ДАН СССР, т. 139, № 1, 1961.
5. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. — Киев, 1937.
6. Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматгиз, 1958.

7. Андронов А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М., 1937.
8. Баутин Н. Н. О рождении предельного цикла из состояния равновесия типа фокус. — ЖЭТФ, т. 8, вып. 6, 1938.
9. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.
10. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976.
11. Понтрягин Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым. ЖЭТФ, т. 4, вып. 8, 1934.

ЛИТЕРАТУРА

Абрахам (Abraham R.)

- [1] Introduction to Morphology, Publ. Dept. Math. Lyon 4 (1972), 38—114.

- [2] Macrodynamics and Morphogenesis, in «Evolution in the Human World», E. Jantsch, C. Waddington, eds.

Абрахам, Марсден (Abraham R., Marsden J.)

- [1] Foundations of Mechanics, Benjamin, 1967.

Абрахам, Робин (Abraham R., Robbin J.)

- [1] Transversal Mappings and Flows, Benjamin, 1968.

Абрахам, Смейл (Abraham R., Smale S.)

- [1] Nongenericity of Ω -Stability, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. XIV (1970), 5—8. [Имеется перевод: Ω -устойчивость не типична, сб. перев. Математика, 13 : 2 (1969), 156—160.]

Александр, Йорк (Alexander J. C., York J. A.)

- [1] Global Bifurcation of periodic orbits, Ann. of Math.

Алексеев В. М.

- [1*] «Символическая динамика», Одиннадцатилетняя математическая школа, Киев, Изд-во ин-та математики АН УССР, 1976.

Андрейчиков И. П., Юдович В. И.

- [1] Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале. — ДАН СССР, 202, (1972), № 4, 791—794.

Андронов А. А., Витт А. А. (Andronov A. A., Witt A.)

- [1] Sur la théorie mathématiques des autooscillations, C. R. Acad. Sci. Paris 190 (1930), 256—258.

Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.

- [1] Теория колебаний, изд. 2-е. — М.: Физматгиз, 1959 (1-е изд. 1937 г.)

Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.

- [1] Качественная теория динамических систем второго порядка. — М.: Наука, 1966.

- [2] Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1967.

Андронов А. А., Понтрягин Л. С.

- [1] Грубые системы. — ДАН СССР, 14 (1937), 247—251.

Антман, Келлер (Antman P., Keller J.)

- [1] Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems, Benjamin, 1969. [Имеется перевод: Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. — М.: Мир, 1974.]

Анусс (Hapusse P.)

- [1] De l'existence d'un cycle limite dans l'évolution des systèmes chimiques ouverts, C. R. Acad., Sci., Paris 274, Séries C (1972), 1245—1247.

Арнольд В. И.

- [1] Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1971.

- [2] Лекции о бифуркациях и версальных семействах. — УМН, т. XXVII (1972), № 5, 119—184.
- [3] Особенности гладких отображений. — УМН, т. XXIII (1968), № 1, 3—44.
- [4] Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера. — УМН, т. XXVIII (1973), № 5, 17—44.
- [5] Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, Ann. Inst., Grenoble, 16 (1) (1966), 319—361.
- [6] Потеря устойчивости автоколебаний вблизи резонанса и версальные деформации эквивариантных векторных полей. — Функциональный анализ и приложения, 11, № 2 (1977), 1—10.
- Арнольд, Авец (Arnold V. I., Avez A.)
- [1] Ergodic Problems in Classical Mechanics, Benjamin, 1970.
- Аронсон (Aronson D. G.)
- [1] Stability for nonlinear parabolic equations via the Maximum Principle.
- [2] A Comparison Method for Stability Analysis of Nonlinear Parabolic Equations.
- Аронсон, Вейнбергер (Aronson D. G., Weinberger H.)
- [1] Nonlinear diffusion in population genetics, combustion and nerve propagation, Proc. Tulane Program in Partial Differential Equations, Springer Lecture Notes.
- Аронсон, Теймз (Aronson D. G., Thames H. D. Jr.)
- [1] Stability and Oscillation in Biochemical Systems with Localized Enzymes, Arch. Rat. Mech. and Anal.
- Ауслендер, Хаффекер (Auslander D. G., Huffaker C.)
- [1] Dynamics of interacting populations, J. Frank. Inst. (1974), 297 (5).
- Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П.
- [1*] О возникновении и структуре аттрактора Лоренца. ДАН СССР, 234, № 2 (1977), 336—339.
- Баутин Н. Н.
- [1] О числе предельных циклов, рождающихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокуса или центра. — Матем. сб. 30 (72) (1952), 181—186.
- [2] О периодических решениях одной системы дифференциальных уравнений. — ПММ, 18 (1959), № 1.
- Беддингтон, Фри (Beddington J. C., Free A.)
- [1] Age structure, density dependence and limit cycles in predator — prey interactions, J. Theoret. Popul. Biol.
- Белл (Bell G. I.)
- [1] Predator — prey equations simulating an immune response, Math. Biosci. 16 (1973), 291—314.
- Беллман (Bellman R.)
- [1] Stability Theory of Differential Equations, McGraw Hill, New York, 1953, Dover 1969. [Имеется перевод: Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1954.]
- Бергер (Berger M.)
- [1] On Von Karman's Equations and the Buckling of a Thin Elastic Plate, Comm. Pure and Appl. Math., 28 (1967), 687—719, 21 (1968), 227—241.
- Бесера (Baserga R.)
- [1] The Cell Cycle and Cancer, Marcel Dekker, New York, 1971.
- Биркгоф Г. (Birkhoff G.)
- [1] Hydrodynamics: a Study in Logic, Fact and Similitude, Princeton University Press, 1950. [Имеется перевод: Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. — М.: ИЛ, 1963.]

Биркгоф Дж. (Birkhoff G. O.)

- [1] Dynamical Systems, A. M. S. Colloquim Publ., 1927. [Имеется перевод: Динамические системы. — М.: ИЛ, 1941.]

Боголюбов Н. Н. Митропольский Ю. А.

- [1] Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958 2-е изд.: Наука, 1979, 3-е изд.

Болл (Ball J. M.)

- [1] Continuity properties of nonlinear semigroups, J. Funct. An. 17 (1974), 91—103.
[2] Measurability and Continuity Conditions for Nonlinear Evolutionary Processes, Proc. A. M. S.
[3] Saddle Point Analysis for an Ordinary Differential Equation in a Banach Space, and an application to dynamic buckling of a beam, in «Nonlinear Elasticity», Dixon, ed. Academic Press, New York, 1974.

Боник, Фрэмpton (Bonic R., Frampton J.)

- [1] Smooth functions on Banach manifolds, J. Math. Mech. 16 (1966), 877—898.

Боуэн, Рюэль (Bowen R., Ruelle D.)

- [1] The ergodic theory of axiom A flows, Inv. Math. 29 (1975) 181—202. [Имеется перевод: Эргодическая теория потоков, удовлетворяющих аксиоме А. — В кн.: Боуэн Р. Методы символической динамики. — М.: Мир, 1979.]

Бохнер, Монтгомери (Bochner S., Montgomery D.)

- [1] Groups of differentiable and real or complex analytic transformations, Ann. of Math. 46 (1945), 685—694.

Брауэр, Ноэль (Brauer F., Nohel J. A.)

- [1] Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations, Benjamin, New York, 1969.

Брушлинская Н. Н.

- [1] Качественное интегрирование одной системы n дифференциальных уравнений в области, содержащей особую точку и предельный цикл. — ДАН СССР, 139 (1961), № 1, 9—12.
[2] О поведении решений уравнений гидродинамики при переходе числа Рейнольдса через критическое значение. — ДАН СССР, 162 (1965), № 4, 731—734.
[3] Возникновение циклов и торов при закритических значениях числа Рейнольдса. — УМН, т. XX, № 5, 259—260.

Бунимович А. А., Синай Я. Г.

- [1] Стохастичность аттрактора в модели Лоренца, сб. Нелинейные волны. — М.: Наука, 1979, 212—226.

Бурбаки (Bourbaki N.)

- [1] Elements of Mathematics, General Topology Part 2, Hermann, Paris and Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966. [Имеется перевод: Общая топология. Функциональные пространства. — М.: Наука, 1975.]

Бургиньон, Брезис (Bourguignon J. P., Brezis H.)

- [1] Remarks on the Euler Equation, J. Funct. An. 15 (1974), 341—363.

Бэтчелор (Batchelor G. K.)

- [1] The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press, 1953.

Вайнберг М. М., Треногин В. А.

- [1] Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
[2] Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. — УМН, т. XVII (1962), № 2, 13—73.

Вали, Грэдуэл, Хассел (Varley G., Gradwell G., Hassell M.)

- [1] Insect Population Ecology, Univ. of California Press, Berkeley, 1973.

Вейсс (Weiss L.)

- [1] Ordinary Differential Equations: Proceedings of NRL Symposium, Wiley, 1973.

Вейсслер (Weissler F.)

- [1] Thesis, Berkeley, Calif.

Вельте (Velte W.)

- [1] Über ein Stabilitätskriterium der Hydrodynamik, Arch. Rat. Mech. An. 9 (1962), 9—20.
[2] Stabilitätsverhalten und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokes'schen Gleichungen, Arch. Rat. Mech. An. 16 (1964), 97—125.
[3] Stabilität und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokes'schen Gleichungen beim Taylorproblem, Arch. Rat. Mech. An. 22 (1966), 1—14.

Волибнер (Wolibner W.)

- [1] Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long, Math. Z. 37 (1933), 698—726.

Вольтерра В.

- [1] Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976, (пер. с итал.).

Гавалас (Gavalas G. R.)

- [1] Nonlinear Differential Equations of Chemically Reacting Systems, New York, Springer, 1968.

Гаврилов Н. К.

- [1] О бифуркациях периодического движения вблизи внутреннего резонанса 1:3. Исследования по устойчивости и теории колебаний. — Ярославль, 1977.

Гарел (Gurel O.)

- [1] Dynamics of Cancerous Cells, Cancer 23 (1969), 497—505.
[2] Qualitative Study of Unstable Behavior of Cancerous Cells, Cancer 24 (1969), 945—947.
[3] Limit Cycles with Stability of the First Level, J. Franklin Inst. 288 (1969), 235—238.
[4] Biomolecular Topology and Cancer, Physiol. Chem. & Physics 3 (1971), 371—388.
[5] Global Studies of Orbit Structures of Biomolecular Dynamical Systems, Collective Phenomena 1 (1972), 1—4.
[6] Bifurcation Theory in Biochemical Dynamics, Analysis and Simulation — North-Holland — Amsterdam, 1972.
[7] Bifurcation Models of Mitosis, Physiol. Chem. & Physics 4 (1972), 139—152.
[8] A Classification of the Singularities of (X, f) , Math. Syst. Theory, 7 (1973), 154—163.
[9] Topological Dynamics in Neurobiology, Intern. J. Neuroscience, 6 (1973), 165—179.
[10] Bifurcations in Nerve Membrane Dynamics, Intern. J. Neuroscience, 5 (1973), 281—286.
[11] Peeling and Nestling of A Striated Singular Point, Collective Phenomena, 2 (1974).
[12] Limit cycles and Bifurcations in Biochemical Dynamics, Biol. Systems.
[13] Partial Peeling, Proc. Lefschetz Conf., Brown University (1974).

Гарел, Лapidус (Gurel O., Lapidus L.)

- [1] Liapunov Stability Analysis of Systems with Limit Cycle, Chem. Eng. Symp. Ser. 61, 55 (1965), 78—87.

- [2] A Guide to The Generation of Liapunov Functions, Industrial and Engineering Chemistry, March 1969, 30—41.

Генри (Henry D.)

- [1] Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Mimeographed, Univ. of Kentucky, 1974.

Гласс, Кауфман (Glass L., Kauffman S. A.)

- [1] The logical analysis of continuous, nonlinear biochemical control networks, J. Theor. Biol. 39 (1973), 103—129.

Гленсдорф, Пригожин (Glansdorff P., Prigogine I.)

- [1] Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations, New York, Wiley-Interscience, 1971.

Гринберг, Хоппенстидт (Greenberg J. M., Hoppensteadt F.)

- [1] Asymptotic Behavior of Solutions to a Population Equation, SIAM J. Appl. Math. 28 (1975), 662—674.

Гудвин (Goodwin B. C.)

- [1] Oscillatory Behavior in Enzymatic Control Processes, in «Advances in Enzyme Regulation», Vol. 3, G. Weber (ed.), Pergamon (1965), 425—438.

Гукенхеймер (Guckenheimer J.)

- [1] Review of Stabilité Structurelle et Morphogénèse by R. Thom., Bull. A. M. S. 79 (1973), 878—890.

- [2] Endomorphisms of Riemann sphere, Global Analysis, v. XIV, 95—124, Proc. Symposia in Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, 1970.

Гукенхеймер, Остер, Ипакчи (Guckenheimer J., Oster G., Ipaktchi A.)

- [1] The Dynamics of Density Dependent Population Models, (препринт).

Гэтин, МакКэми (Gurtin M., MacCamy R.)

- [1] Non-linear age-dependent population dynamics, Arch. Rat. Mech. An. (1974), 281—300.

Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.

- [1] Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1970.

Данфорд, Шварц (Dunford N., Schwartz J.)

- [1] Linear Operators, vol. I, Interscience (1958).

- [2] Linear Operators, vol. II, New York, Wiley, 1963. [Имеются переводы: Линейные операторы, т. 1.: Общая теория, т. 2.: Спектральная теория. — М.: Мир, 1966.]

Дезоер, Ка (Desoer C., Kuh E.)

- [1] Basic Circuit Theory, McGraw-Hill, New York, 1969.

Джозеф (Joseph D. D.)

- [1] Stability of convection in containers of arbitrary shape, J. Fluid Mech. 47 (1971), 257—282.

- [2] Response curves for plane Pouseuille flow. In Advances in Applied Mechanics, Vol. XIV, (ed. C. S. Yih), New York, Academic Press, 1974.

- [3] Repeated supercritical branching of solutions arising in the variational theory of turbulence, Arch. Rat. Mech. Anal. 53 (1974), 101—130.

- [4] Global Stability of Fluid Motions, Springer, Heidelberg, 1976. [В 1980 г. выйдет перевод: Устойчивость движений жидкости. — М.: Мир, 1980.]

Джозеф, Нилд (Joseph D. D., Nield D. A.)

- [1] Stability of Bifurcating Time-periodic and Steady Solutions of Arbitrary Amplitude, Arch. Rat. Mech. An.

Джозеф, Сэттинджер (Joseph D. D., Sattinger D. H.)

- [1] Bifurcating time periodic solutions and their stability, Arch. Rat. Mech. An. 45 (1972), 79—109.

Джозеф, Чен (Joseph D. D., Chen T. S.)

- [1] Friction factors in the theory of bifurcating flow through annular ducts, J. Fluid Mech. 66 (1974), 189—207.

Дорро (Dorroh J. R.)

- [1] Semi-groups of maps in locally compact space, Canadian J. Math., 19 (1967), 688—696.

Дорро, Марсден (Dorroh J. R., Marsden J. E.)

- [1] Smoothness of nonlinear semigroups.

Дьедонне Ж.

- [1*] Основы современного анализа. — М.: Мир, 1964.

Дэви, Ди Прима, Стюарт (Davey A., DiPrima R. C., Stuart J. T.)

- [1] On the instability of Taylor vortices, J. Fluid Mech. 31 (1968), 17—52.

Дюран (Durand G.)

- [1] Application de la théorie de la bifurcation et de la stabilité aux équations du champ magnétique terrestre, Lect. Notes, 128, Univ. de Paris XI, Orsay (1975).

Жаботинский А. М., Заикин А. Н.

- [1] Auto-wave processes in a distributed chemical system, J. Theor. Biol., 40 (1973), 45.

Зигель, Мозер (Siegel C. L., Moser J.)

- [1] Lecture on Celestial Mechanics, Springer, 1971. [Имеется перевод: в кн.: Мозер Ю., Лекции о Гамильтоновых системах. — М.: Мир, 1973.]

Зиглер (Ziegler H.)

- [1] Principles of Structural Stability, Ginn-Blaisdell, 1968.

Зиман (Zeeman E. C.)

- [1] Topology of the Brain, in «Mathematics and Computer Science in Biology and Medicine», London: Medical Research Council, 1965.
[2] Differential Equations for the Heartbeat and Nerve Impulse, стр. 683 в Пейксото [1].

Изе (Ize J.)

- [1] Thesis, New York University, 1975.

Иосида (Yosida K.)

- [1] Functional analysis, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg — New York, 1971 [Имеется перевод: Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.]

Иосс (Iooss G.)

- [1] Contribution à la théorie nonlinéaire de la stabilité des écoulements laminaires, Thèse, Faculté des Sciences, Paris VI (1971).
[2] Théorie non linéaire de la stabilité des écoulements laminaires dans le cas de «l'échange des stabilités», Arch. Rat. Mech. An. 40 (1971), 166—208.
[3] Existence de stabilité de la solution périodique secondaire intervenant dans les problèmes d'évolution du type Navier-Stokes, Arch. Rat. Mech. An., 49 (1972), 301—329.
[4] Bifurcation d'une solution T -périodique vers une solution nT -périodique, pour certains problèmes d'évolution du type Navier — Stokes, C. R. Acad. Sc., Paris, 275 (1972), 935—938.
[5] Bifurcation et Stabilité, Lecture Notes, Université, Paris XI (1973).
[6] Bifurcation of a periodic solution into an invariant torus for Navier — Stokes equations and their respective stabilities, Arch. Rat. Mech. An.

Иост, Зендер (Jost R., Zehnder E.)

- [1] A generalization of the Hopf bifurcation theorem, *Helv. Phys. Acta*, **45** (1972), 258—276.

Ирвин (Irwin M. C.)

- [1] On the stable manifold theorem, *Bull. London Math. Soc.* **2** (1970), 196—198.

Йорк (Yorke J. A.)

- [1] Periods of periodic solutions and the Lipschitz constant, *Proc. Am. Math. Soc.*, **22** (1969), 509—512.

Кантор (Cantor M.)

- [1] Perfect Fluid Flows over R^n with Asymptotic Conditions, *J. Funct. An.*, **18** (1975), 73—84.

Като (Kato T.)

- [1] Integration of the equations of evolution in a Banach space, *J. Math. Soc. Japan*, **5** (1953), 208—234.
 [2] Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert space, *Nagoya Math. J.*, **19** (1961), 93—125.
 [3] *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, New York, 1966. [Имеется перевод: Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.]
 [4] Linear evolution equations of «hyperbolic» type, *J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sec. 1*, **XVII** (1970), 241—258.
 [5] Linear evolution equations of «hyperbolic» type II, *J. Math. Soc. Japan* **25** (1973), 648—666.
 [6] On the initial value problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems, *Arch. Rat. Mech.* **58** (1975), 181—206.

Като, Фуджита (Kato T., Fujita H.)

- [1] On the nonstationary Navier — Stokes system, *Rendiconti Sem. Mat. Univ., Padova*, **32** (1961), 243—260.

Келлер (Keller J.)

- [1] Bifurcation theory for ordinary differential equations, in «Bifurcation Theory and Non-linear Eigenvalue Problems», ed. J. Keller and S. Antman, Benjamin, 1969. [Имеется перевод: см. Антман, Келлер [1].]

Келли (Kelley A.)

- [1] The stable, center-stable, center, center-unstable, and unstable manifolds, Appendix C of «Transversal Mappings and Flows» by R. Abraham and J. Robbin, Benjamin, New York, 1967. (См. также *J. Diff. Eq.* **3** (1967), 546—570.)
 [2] On the Liapunov sub-center manifold, Appendix C of «Foundations of Mechanics» by R. Abraham, Benjamin, New York, 1967.

Кильхёфер (Kielhöfer H.)

- [1] Stability and semi-linear evolution equations in a Hilbert space, *Arch. Rat. Mech. An.* **57** (1974), 150—165.

Кинер, Келлер (Keener J. P., Keller H. B.)

- [1] Perturbed Bifurcation Theory, *Arch. Rat. Mech. An.*, **50** (1973), 159—175.

Кирхгасснер (Kirchgässner K.)

- [1] Die Instabilität der strömung Zwischen rotierenden Zylindern gegenüber Taylor-Wirbeln für beliebige Spaltbreiten. *Zeit. Angew. Math. Phys.*, **12** (1961), 14—30.
 [2] Multiple Eigenvalue Bifurcation for Holomorphic Mappings, *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, Academic Press, 1971.

Кирхгасснер, Кильхёфер (Kirchgässner K., Kielhöfer H.)

- [1] Stability and bifurcation in fluid dynamics, *Rocky Mountain J. of Math.* **3** (1973), 275—318.

Кирхгасснер, Соргер (Kirchgässner K., Sorger P.)

- [1] Stability analysis of branching solutions of the Navier — Stokes equations, Proc. 12th Int. Cong. Appl. Mech., Stanford Univ., August, 1968.
- [2] Branching analysis for the Taylor problem, Quart. J. Mech. Appl. Math. 22 (1969), 183—210.
- Кнопс, Уилкс (Knops R. J., Wilkes E. W.)
- [1] Theory of Elastic Stability, Handbuch der Physik, vol. V/a/3 (1973), 125—302.
- Когельман, Келлер (Kogelman S., Keller J. B.)
- [1] Transient behavior of unstable nonlinear systems with application to the Benard and Taylor Problem, SIAM J. on Appl. Math. 20 (1971), 619—637.
- Колесов Ю. С.
- [1*] Математическая теория гармонических RC -генераторов с распределенными параметрами в цепи обратной связи, Дифференциальные уравнения и их применение. В. 2, Труды республиканского научного семинара, Вильнюс, 1971.
- [2*] Резонансы в экологии. Исследования по устойчивости и теории колебаний. — Ярославль, 1968.
- [3*] Математические модели экологии. Исследования по устойчивости и теории колебаний. — Ярославль, 1979.
- Колмогоров А. Н.
- [1] Sulla teoria di volterra della otta per l'Esistenza, Giorn. Istituto Ital. Attuari 1 (1936), 74—80.
- [2] Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. — ДАН СССР, 30 (1941), № 4, 299—303.
- [3] Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности. — ДАН СССР, 32 (1941), № 1, 19—21.
- Коппель, Ховард (Kopell N., Howard L. N.)
- [1] Horizontal bands in the Belousov reaction, Science 180 (1973), 1171—1173.
- [2] Plane wave solutions to reaction-diffusion equations, Studies in Appl. Math. 52 (1973), 291—328.
- [3] Bifurcations under non-generic conditions, Adv. in Math. 13 (1974), 274—283.
- [4] Wave trains, shock structures, and transition layers in reaction-diffusion equations, in «Mathematical Aspects of Chemical and Biochemical Problems and Quantum Chemistry», Proc. SIAM—AMS Symposium, 8 (1974), 1—12.
- [5] Pattern formation in the Belousov reaction, in «Lectures on Mathematics in the Life Sciences», AMS, Vol. 7, (1974), 201—216.
- [6] Bifurcations and Trajectories joining critical points (препринт).
- Коул (Cole J. D.)
- [1] Perturbation Methods in Applied Mathematics, Blaisdell, 1968.
- Коулз (Coles D.)
- [1] Transition in circular Couette flow, J. Fluid. Mech. 21 (1965), 385—425.
- Коэн (Cohen D.)
- [1] Multiple Solutions and Periodic Oscillations in Nonlinear Diffusion Processes, SIAM J. Appl. Math. 25 (1973), 640—654.
- Коэн, Кинер (Cohen D., Keener J. P.)
- [1] Oscillatory Processes in the Theory of Particulate Formation in Supersaturator Chemical Solutions, SIAM J. Appl. Math.
- Крейчнан (Kraichnan R. H.)
- [1] The structure of turbulence at very high Reynolds numbers, J. Fluid Mech., 5 (1959), 497—543.

- [3] The closure problem of turbulence theory, Proc. Symp. Appl. Math. XIII, Am. Math. Soc. (1962), 199—225.
- [3] Isotropic turbulence and inertial range structures, Phys. Fluids, 9, (1966), 1728—1752.
- [4] On Kolmogorov's inertial-range theories, J. Fluid Mech., 62 (1974),
- [5] Remarks on turbulence theory, Advances in Math., 16 (1975), 305—331.
- Кронин (Cronin J.)
- [1] One-side bifurcation points, J. Diff. Eq., 9 (1971), 1—12.
- Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.
- [1] Введение в нелинейную механику. — Изд. АН УССР, 1937.
- Крэндэлл, Рабинович (Crandall M., Rabinowitz P.)
- [1] Bifurcation from simple eigenvalues, J. Funct. An. 8 (1971), 321—340.
- [2] Bifurcation perturbation of simple eigenvalues and linearized stability, Arch. Rat. Mech. An. 52 (1974), 161—180.
- Кук, Йорк (Cooke K. L., Yorke J. A.)
- [1] Some equations modelling growth processes and gonorrhea epidemics, Math. Biosci., 16 (1973), 75—101.
- Курцвейль (Kurzweil J.)
- [1] Exponentially stable integral manifolds, Averaging principle and continuous dependence on a parameter, (I, II), Czech. Math. J. 16 (91) (1966), 380.
- Кэрролл (Carroll R.)
- [1] Abstract Methods in Partial Differential Equations, Harper and Row, 1969.
- Ладыженская О. А.
- [1] Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2-е изд. — М.: Наука, 1970.
- [2] Пример неединственности в классе слабых решений Хопфа для уравнений Навье — Стокса, Изв. АН СССР, сер. матем. 33 (1969),
- [3] Mathematical Analysis of Navier — Stokes Equations for Incompressible Liquids, Annual Review of Fluid Mech., 7 (1975), 249—272.
- [4*] Краевые задачи математической физики. — Л.: Наука, 1973.
- Лангер (Langer) (ред.)
- [1] Nonlinear Problems, Univ. of Wisconsin Press, 1962.
- Ландау Л. Д.
- [1*] К проблеме турбулентности, — ДАН СССР, 44, № 8, 339—342.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.
- [1] Механика сплошных сред, — М.: Гостехиздат, 1954 (2-е изд.).
- Ланфорд (Lanford O. E.)
- [1] Bifurcation of periodic solutions into invariant tori: the work of Ruelle und Takens, in «Nonlinear Problems in the Physical Sciences and Biology», Springer Lecture Notes, 322 (1973).
- Ла-Саль, Лефшец (ред.) (LaSalle J. P., Lefschetz S.)
- [1] Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics, Academic Press, New York (1963).
- [2] Stability by Liapunov's Direct Method with Applications, Academic Press, New York, 1961. [Имеется перевод: Ла-Салль Ж., Лефшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. — М.: 1964.]
- Левин (Levin S.)
- [1] Dispersion and population interactions, American Naturalist.
- Ленг (Lang S.)
- [1] Real Analysis, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

- [2*] Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967 (перевод с английского).
- Лерэ (Leray Jean)
- [1] Etude de diverses équations intégrales nonlinéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique. Journ. Math. Pures, Appl. 12 (1933), 1—82.
- [2] Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois, J. de Math. 13 (1934), 331—418.
- [3] Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math. 63 (1934), 193—248.
- [4] Les problèmes nonlinéaires, Enseign. Math. 35, (1936), 139—151.
- Лефевр, Николис (Lefever R., Nicolis G.)
- [1] Chemical Instabilities and Sustained Oscillations, J. Theoret. Biol. 30 (1971), 267—284.
- Лефшец (Lefschetz S.)
- [1] Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, Princeton Univ. Press (1950).
- [2] Differential Equations: Geometric Theory (2nd Edition), Interscience, New York, 1963. [Имеется перевод с первого издания: Геометрическая теория дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ., 1961.]
- Ли, Йорк (Li T. Y., Yorke J. A.)
- [1] Period three implies chaos, Am. Math. Monthly, 82 (1975), 985.
- Линь (Lin C. C.)
- [1] The Theory of Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press (1955). [Имеется перевод: Теория гидродинамической устойчивости. — М.: ИЛ., 1958.]
- Лихтенштейн (Lichtenstein L.)
- [1] Grundlagen Der Hydromechanik, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1929.
- Лоренц (Lorenz E. N.)
- [1] Deterministic Nonperiodic Flow, Journ. of the Atmospheric Sciences, 20 (1963), 130—141.
- Лыкова О. Б.
- [1] О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности изолированного статического решения. — Украинский математический журнал, 9 (1957), № 3, 281—295.
- [2] О поведении решений системы дифференциальных уравнений в окрестности замкнутых орбит. — Украинский математический журнал, 9 (1957), № 4, 419—431.
- Ляпунов А. М.
- [1] Общая задача об устойчивости движения. — М. — Л.: Гостехиздат, 1950.
- Лясота, Йорк (Lasota A., Yorke J. A.)
- [1] Bounds for periodic solutions of differential equations in Banach Spaces, J. Diff. Eq. 10 (1971), 83—91.
- Мак-Кракен (McCracken M. F.)
- [1] Computation of stability for the Hopf bifurcation theorem and the Lorenz equations (препринт).
- [2] The Stokes Equation in L_p , Thesis, Berkeley, 1975.
- Мак-Лафлин, Мартин (McLaughlin J. B., Martin P. C.)
- [1] Transition to turbulence of a statically stress fluid, Phys. Rev. Letters, 33 (1974), 1189—1192.
- [2*] Transition to turbulence in a statically stressed fluid system, Phys. Rev. A, 12 (1975), N 1, 186—203.
- Мак-Леод, Сэттинджер McLeod J. B., Sattinger D. H.)
- [1] Loss of stability and bifurcation at a double eigenvalue, J. Funct. An., 14 (1973), 62—84.

Марсден (Marsden J. E.)

- [1] Hamiltonian one parameter groups, Arch. Rat. Mech. An., 28 (1968), 362—396.
- [2] The Hopf bifurcation for nonlinear semigroups, Bull. Am. Math. Soc., 79 (1973), 537—541.
- [3] On Product Formulas for Nonlinear Semigroups, J. Funct. An. 13 (1973), 51—72.
- [4] Applications of Global Analysis in Mathematical Physics, Publish or Perish, Boston, 1974.
- [5] A formula for the solution of the Navier-Stokes equations based on a method of Chorin, Bull. A. M. S. 80 (1974), 154—158.

Марсден, Абрахам (Marsden J., Abraham R.)

- [1] Hamiltonian mechanics on Lie groups and hydrodynamics, Proc. Pure Math. XVI, Amer. Math. Soc. (1970), 237—243.

Марсден, Мак-Кракен (Marsden J., McCracken M.)

- [1] A Product Formula for the Navier-Stokes Equations based on a method of Chorin.

Марсден, Эбин, Фишер (Marsden J., Ebin D., Fischer A.)

- [1] Diffeomorphism groups, hydrodynamics, and relativity, Proc. 13th biennial seminar of Canadian Math. Congress, ed. J. R. Vanstone, Montreal, 1970, 135—279.

Масуда (Masuda K.)

- [1] On the Analyticity and the Unique Continuation Theorem for Solutions of the Navier-Stokes Equations, Proc. Japan Acad. 43 (1967), 827—832.

Матковски (Matkowsky B. J.)

- [1] A simple nonlinear dynamic stability problem, Bull. A. M. S. 76 (1970), 620—625.

Минорский (Minorsky N.)

- [1] Nonlinear Oscillations, Van Nostrand, Princeton, 1962 (Reprinted, R. E. Krieger, Huntington, New York, 1974).

Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.

- [1] Лекции по методу интегральных многообразий. — Ин-т математики АН СССР, Киев, (1968).
- [2*] Интегральные многообразия в нелинейной механике. — М.: Наука, 1973.

Михайлов В. П.

- [1*] Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.

Монин А. С., Яглом А. М.

- [1*] Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, часть 1. — М.: Наука, 1965, часть 2, 1967.

Морри (Morrey C. B., Jr.)

- [1] Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Springer, 1966.

Мультон (Moulton F.)

- [1] An Introduction to Celestial Mechanics, Macmillan, New York, 1902.

Мэй (May R. M.)

- [1] Limit cycles in predator-prey communities, Science, 177 (1972), 900—902.
- [2] Biological populations with non-overlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos, Science.

Неймарк Ю. И.

- [1] О некоторых случаях зависимости периодических движений от параметров. — ДАН СССР, 129 (1959), № 4, 736—739.
- [2] О движениях, близких к двоякоасимптотическому движению. — ДАН СССР, 172 (1967), № 5, 1021—1024.

Немыцкий В. В., Степанов В. В.

- [1] Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: 1949.
- Ничолсон (Nicholson A. J.)
- [1] An outline of the dynamics of animal populations, *Anst. J. Zool.* 2 (1954), 9—65.
- [2] The self adjustment of populations to change in «Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology», 22 (1957), 153—173.
- Ниренберг (Nirenberg L.)
- [1] Topics in Nonlinear Analysis, Courant Institute Lecture Notes (1974). [Имеется перевод: Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1978.]
- Нойес, Филд, Кёрёс (Noyes R. M., Field R. J., Körös E.)
- [1] Oscillations in chemical systems, *J. Am. Chem. Soc.*, 94 (1972), 1394—1395, 8649—8664, 96, (1974), 2001.
- Нуссбаум (Nussbaum R. D.)
- [1] A Global Bifurcation Theorem with Applications to Functional Differential Equations, *J. Funct. An.*, 19 (1975), 319—338.
- Ньюхаус (Newhouse S. E.)
- [1] On Simple Arcs between Structurally Stable Flows, *Proc. Liverpool Symposium on Dynamical Systems*, Springer Lect., Notes.
- [2] Nondensity of Axiom $A(a)$ on S^2 , *Proc. of the Symposia in Pure Mathematics*, vol. XIV (1970), 191—202.
- Ньюхаус, Пейлис (Newhouse S. E., Palis S.)
- [1] Cycles and Bifurcation Theory (препринт).
- Ньюхаус, Пейксото (Newhouse S. E., Peixoto M. M.)
- [1] There is a Simple Arc Joining any Two Morse-Smale Flows (препринт). [См. также Пейксото [1], стр. 303.]
- Орзаг (Orszag S. A.)
- [1] Analytical theories of turbulence, *J. Fluid M.* 41 (1970), 363—386.
- Осмер, Скривен (Othmer H., Scriven L.)
- [1] Instability and dynamic pattern in cellular networks, *J. Theoret. Biol.* 32 (1971), 507—537.
- Остер, Ауслендер (Oster G., Auslender D.)
- [1] Deterministic and stochastic effects in population dynamics, *Sixth Triennial World Congress Int'l. Fed. Automat. Control*, 1974.
- Остер, Такахаси (Oster G., Takahashi Y.)
- [1] Models for age specific interactions in a periodic environment, *Ecological Monographs*.
- Пейксото (Peixoto M. M.) (ред.)
- [1] Dynamical Systems, Academic Press, 1973.
- Пейлис (Palis J.)
- [1*] Some development on Stability and Bifurcations of Dynamical Systems, *Springer Lecture Notes*, 597 (1977), 495—509.
- Пенлеве (Painlevé P.)
- [1] Gewöhnliche Differentialgleichungen: Existenz der Lösungen *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* IIA4a.
- [2] Les petit mouvements périodiques des systems, *C. R.* XXIV (1897).
- Пимбли (Pimbley G.)
- [1] Periodic solutions of predator-prey equations simulating an immune response, *J. Math. Biosci.* 20 (1974), 27—51.
- Плисс В. А.
- [1] Нелокальные проблемы теории колебаний. — М. — Л.: Наука, 1964.
- Пономаренко (Ponomarenko T. B.)
- [1] Occurance of space-periodic motions in hydrodynamics, *J. Appl. Math. Mech.* 32 (1968), 40—51, 234—245.
- Пригожин, Лефевр (Prigogine I., Lefever R.)
- [1] On symmetry breaking instabilities in dissipative systems, *J. Chem. Phys.* 46 (1967), 3542, 48 (1968), 1695.

Пригожин, Николис (Prigogine I., Nicolis G.)

- [1] Biological Order, Structure and Instabilities, Quarterly Rev. Biophys. 4 (1971), 107—148.

Пуанкаре (Poincare H.)

- [1] Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Vol. I, Paris (1892). Имеется перевод: Пуанкаре А. Избранные труды, 1971.)
 [2] Sur les courbes définie par une équation différentielle, C. R. Acad. Sci., 90 (1880), 673—675 (см. [3*]).
 [3*]. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М. — Л.: Гостехиздат, 1947, (пер. с франц.)

Пур (Poore A. B.)

- [1] A model equation arising in chemical reactor theory, Arch. Rat. Mech. An. 52 (1973), 358—388.
 [2] On the Theory and Application of the Hopf — Friedrichs Bifurcation Theory, Arch. Rat. Math. An.
 [3] On the dynamical behaviour of the two temperature feedback nuclear reactor model, SIAM J. Appl. Math.

Пяртли А. С.

- [1] Рождение комплексных инвариантных многообразий вблизи особой точки векторного поля, зависящего от параметра. — Функ. анал. и прил. 6 (1972), в. 4, 95—96.

Рабинович (Rabinowitz P. A.)

- [1] Existence and nonuniqueness of rectangular solutions of the Benard problem, Arch. Rat. Mech. An. 29 (1967), 30—57.
 [2] Some global results for non-linear eigenvalue problems, J. Funct. An. 7 (1971), 487—513.

Рейнольдс (Reynolds O.)

- [1] On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A186 (1895), 123—164.

Ренц (Renz P.)

- [1] Equivalent flows on smooth Banach manifolds, Indiana Univ. Math. J. 20 (1971), 695—698.

Розенблат, Ван Атта (Rosenblat M., Van Atta C.)

- [1] Statistical models and Turbulence, L. N. in Physics, 12 (1972).

Розенцвейг (Rosenzweig M.)

- [1] Paradox of enrichment: destabilization of exploitation ecosystems in ecological time, Science, 171 (1971), 385—387.

Росо (Roseau M.)

- [1] Vibrations non Linéaires et Théorie de la Stabilité, Springer Tracts in Nat. Phil., 8 (1966).

Рудин (Rudin W.)

- [1] Functional Analysis, McGraw-Hill, New York (1973). [Имеется перевод: Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.]

Рюэль (Ruelle D.)

- [1] Dissipative systems and differential analysis, Boulder Lect. (1971).
 [2] Strange attractors as a mathematical explanation of turbulence, in «Statistical Models and Turbulence», ed. by M. Rosenblatt and C. Van Atta, Springer — Verlag, (1972).
 [3] Bifurcations in the presence of a symmetry group, Arch. Rat. Mech. An. 51 (1973), 136—152.
 [4] A measure associated with an Axiom A attractors, Am. J. Math. 98 (1976), 619—654.
 [5] Some comments on Chemical Oscillations, Trans New York Acad. Sci. 35 (1973), 66—71.

Рюэль, Такенс (Ruelle D., Takens F.)

- [1] On the nature of turbulence, *Comm. Math. Phys.* **20** (1971), 167—192, **23** (1971), 343—344.
- Сакер (Sacker R.)
- [1] On Invariant Surface and Bifurcation of Periodic of Ordinary Differential Equations, Thesis (unpublished).
- Свирижев Ю. М., Логофет Д. О.
- [1*] Устойчивость биологических сообществ. — М.: Наука, 1978.
- Сегал (Segal I.)
- [1] Nonlinear semigroups, *Ann. of Math.* **78** (1963), 339—364.
- Сельков Е. Е.
- [1] Self-oscillations in glycolysis, *Europe Journ. Biochem.* **4** (1968), 79—86.
- Сельков Е. Е., Жаботинский А. М., Шноль С. Е. (ред.)
- [1] Колебательные процессы в биологических и химических системах. — М.: 1967.
- Серебрякова Н. Н.
- [1*] Качественное исследование одной системы дифференциальных уравнений теории колебаний. — *ПММ*, **27** (1963), в. 1.
- Серрин (Serrin J.)
- [1] Mathematical Principles of Classical Fluid Dynamics, *Encyclopedia of Physics*, vol. 8/I, Springer, 1959. [Имеется перевод: Математические принципы классической механики жидкости. — М.: ИЛ, 1963.]
- [2] On the stability of viscous fluid motions, *Arch. Rat. Mech. An.* **3** (1959), 1—13.
- [3] The initial value problem for the Navier — Stokes equations in «Non Linear Problems», Univ. of Wisconsin Press (1962).
- Сигман, Рубенфельд (Siegmann W. L., Rubinfeld L. A.)
- [1] A nonlinear model for double-diffusive convection, *SIAM J. Appl. Math.* **29** (1975), 540—557.
- Смейл (Smale S.)
- [1] Differentiable dynamical systems, *Bull. A. M. S.* **73** (1967), 747—817. [Имеется перевод: УМН, т. XXV (1970), в. 1.]
- [2] On the mathematical foundations of electric circuit theory, *J. Diff. Geom.* **7** (1972), 193—210.
- [3] A mathematical model of two cells via Turing's equation, *Am. Math. Soc. Proceedings on Pure and Applied Math.*
- [4] Diffeomorphisms with many periodic points, *Differential and Combinatorial Topology*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 63—80. [Имеется перевод: — Математика, **11**: 4 (1967), 88—106.]
- Смейл, Вильямс (Smale S., Williams R.)
- [1] The qualitative analysis of difference equation of population growth (препринт).
- Соболевский П. Е.
- [1] Equations of parabolic type in a Banach space, *Tr. A. M. S.* **49** (1965).
- Сотомайор (Sotomayor J.)
- [1] Generic Bifurcations of Dynamical Systems, стр. 561 Пейксото [1], см. также *Publ. IHES* **43** (1974).
- Спенглер, Снелл (Spangler R. A., Snell F. M.)
- [1] Sustained Oscillations in a Catalytic Chemical System, *Nature* **191** (1961), 457—458.
- [2] Transfer Function Analysis of an Oscillatory Model Chemical System, *J. Theoret Biol.*, **16** (1967), 381—405.
- Стерн (Stern T. E.)
- [1] Theory of Nonlinear Networks and Systems — An Introduction, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1965).
- Стокер (Stoker J. J.)

- [1] Nonlinear Vibrations, Interscience, New York (1950). [Имеется перевод: Нелинейные колебания в механических и электрических системах. — М.: ИЛ, 1953.]
- Стэкгольд (Stakgold I.)
- [1] Branching of solutions of nonlinear equations, SIAM Review 13 (1971), 289—332.
- Сэзер (Sather D.)
- [1] Branching of solutions of nonlinear equations, Rocky Mount. Math. J. 3 (1973), 203—250.
- Сэттинджер (Sattinger D. H.)
- [1] On global solutions of nonlinear hyperbolic equations, Arch. Rat. Mech. An. 30 (1968), 148—172.
- [2] Bifurcation of periodic solutions of the Navier — Stokes equations, Arch. Rat. Mech. An. 41 (1971), 66—80.
- [3] The mathematical problem of hydrodynamic stability, J. Math. and Mech. 19 (1971), 797—817.
- [4] Stability of bifurcating solutions by Leray — Schauder dergee, Arch. Rat. Mech. An. 43 (1971), 154—166.
- [5] Topics in Stability and Bifurcation Theory, Lecture Notes 309 (1973).
- [6] Transformation groups and bifurcation at multiple eigenvalues, Bull. A. M. S. 79 (1973), 709—711.
- [7] On the stability of waves on nonlinear parabolic systems, Adv. in Math.
- [8] Six Lectures on the Transition to Instability, L. N. 322 (1973), 261—287.
- Сю, Казариноф (Hsü I, N. D. Kazarinoff)
- [1] An applicable Hopf bifurcation formula and instability of small periodic solutions of the Field — Noyes model, J. Math. Anal. Appl.
- [2] Existence and stability of periodic solutions of a third order nonlinear autonomous system simulating immune response in animals (препринт).
- Такахаси, Рэбинс, Ауслендер (Takahashi Y., Rabins M., Auslender D.)
- [1] Control and Dynamic Systems, Addison Wesley, (1970).
- Такенс (Takens F.)
- [1] Unfolding of certain singularities of vector fields: generalized Hopf bifurcations, J. Diff. Eq. 14 (1973), 476—493.
- [2] Singularities of vector fields, I. H. E. S. Publications Mathematiques 43 (1974), 47—100.
- Темам (Temam R.)
- [1] On the Euler Equations of Incompressible Perfect Fluids, J. Funct. An., 20 (1975), 32—43.
- Темам и др. (Temam R. et al.)
- [1] Proceedings of the Conference on Theoretical and Numerical Methods in Turbulence Theory (Orsay (1975)), Lect. Notes 565 (1976).
- Том (Thom R.)
- [1] Structural Stability and Morphogenesis, Addison Wesley, 1974.
- Тьюринг (Turing A. M.)
- [1] The chemical basis of morphogenesis, Phil. Trans. Roy. Soc. (B) (1925), 37—72.
- Уизем (Whitham C.)
- [1] Linear and Nonlinear Waves, Wiley, 1972 [Имеется перевод: Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.]
- Уолтер (Walter C.)
- [1] Oscillations in controlled biochemical systems, Biophys. J., 9 (1969).
- Файф, Джозеф (Fife P., Joseph D.)
- [1] Existence of convective solutions of generalized Bénard problems, Arch. Rat. Mech. An. 33 (1969), 116—138.

Феничел (Fenichel N.)

- [7] The Orbit Structure of the Hopf Bifurcation Problem, J. Diff. Eq. 17 (1975), 308—328.

- [2] Center manifolds and the Hopf bifurcation problem (препринт).

Фон Нейман (Von Neumann J.)

- [1] Recent theories of turbulence, in «Collected Works», VI, Macmillan, New York (1963), 437—472.

Фридман (Friedman A.)

- [1] Partial Differential Equations, Holt, New York, 1969.

Фридман (Freedman H. I.)

- [1] On a Bifurcation theorem of Hopf and Friedrichs.

Фридрихс (Friedrichs K. O.)

- [1] Advanced Ordinary Differential Equations, New York, 1965.

- [2] Advanced Ordinary Differential Equations, Springer 1971.

Фуджита, Като (Fujita H., Kato T.)

- [1] On the Navier — Stokes Initial Value Problem, Arch. Rat. Mech. An., 16 (1964), 269—315.

Хаар (Haag J.)

- [1] Les mouvements vibratoires, Presses Univ. de France I, II (1955).

Хаар, Шалеан (Haag J., Chaleant R.)

- [1] Problèmes de Théorie Générale des Oscillations et de Chronométric, Paris, Gunter — Villars, 1960.

Хартман (Hartman P.)

- [1] Ordinary Differential Equations, Second Edition, P. Hartman, 1973.

[Имеется перевод: Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.]

Хассел, Мэй (Hassell M., May R.)

- [1] Stability in insect host-parasite models, J. Animal Ecology, 42 (1973), 693—726.

Хастингс (Hastings S. P.)

- [1] Some Mathematical Problems from Neurobiology, Am. Math. Monthly 82 (1975), 881—894.

Хастингс, Мюррей (Hastings S. P., Murray J. D.)

- [1] The existence of oscillatory solutions in the Field — Noyes Model for the Belousov — Zhabotinskii Reaction, SIAM J. Appl. Math. 28 (1975), 678—688.

Хастингс, Тисон, Вебстер (Hastings S. P., Tyson J., Webster D.)

- [1] Existence of Periodic Solutions for Negative Feedback Cellular Control Systems (препринт).

Хейл (Hale J. K.)

- [1] Integral manifolds of perturbed differential systems, Ann. Math. 73 (1961), 496—531.

- [2] Oscillation in Nonlinear Systems, McGraw — Hill, 1963. [Имеется перевод: Колебания в нелинейных системах. — М.: Мир, 1966.]

- [3] Ordinary Differential Equations, New York, 1969.

Хейл, Ла-Салль (Hale J. K., LaSalle J. P., eds.)

- [1] Differential Equations and Dynamical Systems, 1967.

Хенрад (Henrard J.)

- [1] Liapunov's center theorem for a resonant equilibrium, J. Diff. Eq. 14 (1973), 431—441.

Хиггинс (Higgins J.)

- [1] A Chemical Mechanism for Oscillations of Glycolytic Intermediates in Yeast Cells, Proc. N. A. S., 51 (1964), 988—994.

- [2] The Theory of Oscillatory Reactions, Ind. Eng. Chem., 59 (1967).

Хилле, Филлипс (Hille E., Phillips R.)

- [1] Functional Analysis and Semigroups, vol. 31 AMS Colloq. Publ., (1957). [Имеется перевод: Функциональный анализ и полугруппы — М.: ИЛ, 1962.]

Хирон (Hearon J. Z.)

- [1] The kinetics of linear systems with special reference to periodic reactions, *Bull. Math. Biophysics* 15 (1953), 121—141.

Хирш, Пью (Hirsch M., Pugh C.)

- [1] Stable manifolds and hyperbolic sets, *Proc. Symp. Pure Math. XIV*, Am. Math. Soc. (1970), 133—163.

Хирш, Пью, Шуб (Hirsch M., Pugh C., Shub M.)

- [1] *Invariant Manifolds*, Springer Lecture Notes, vol. 583 (1977).

Хирш, Смейл (Hirsch M., Smale S.)

- [1] *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, New York, Academic Press (1974).

Ходжкин, Хаксли (Hodgkin A. L., Huxley A. F.)

- [1] A Quantitative Description of Membrane Current and its Application to Conduction and Excitation in Nerve, *J. Physiol.* 117 (1952).

Хопф (Hopf E.)

- [1] Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential systems, *Ber. Math. — Phys. Sachsische Akademie der Wissenschaften Leipzig* 94 (1942), 1—22.

- [2] A mathematical example displaying the features of turbulence, *Comm. Pure Appl. Math.* 1 (1948), 303—322.

- [3] Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamische Grundgleichungen, *Math. Nachr.* 4 (1951), 213—231.

- [4] The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, *Comm. Pure Appl. Math.* 3 (1950), 201—230.

- [5] Repeated branching through loss of stability, an example, *Proc. Conf. on Diff. Equations*, Univ. of Maryland (1955).

- [6] Remarks on the functional-analytic approach to turbulence, *Proc. Symp. Appl. Math.*, XIII, Amer. Math. Soc. (1962), 157—163.

- [7] On the right weak solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation of first order, *J. Math. Mech.*, 19 (1969/1970).

Хьюз, Марсден (Hughes T., Marsden J.)

- [1] *A short Course in Fluid Mechanics*, Publish or Perish, 1976.

Чандрасекар (Chandrasekar S.)

- [1] *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxf. Univ. Press, 1961.

Чезари (Cesari L.)

- [1] *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag. New York, 1973.

Чейфи (Chafee N.)

- [1] The bifurcation of one or more closed orbit from an equilibrium point of an autonomous differential system, *J. Diff. Eq.* 4 (1968).

- [2] A bifurcation problem for a functional differential equation of finitely retarded type, *J. Math. An. Appl.*, 35 (1971), 312—348.

Чен, Джозеф (Chen T. S., Joseph D. D.)

- [1] Subcritical bifurcation of plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, 58 (1973), 337—351.

Чернов (Chernoff P.)

- [1] A note on continuity of semigroups of maps.

Чернов, Марсден (Chernoff P., Marsden J.)

- [1] Properties of Infinite Dimensional Hamiltonian Systems, *L. N.* v. 425, (1974).

- [2] On continuity and smoothness of group actions, *Bull. A. M. S.* 76 (1970), 1044.

Чорин (Chorin A. J.)

- [1] Numerical Study of Slightly Viscous Flow, *J. Fluid Mech.*, 57, (1973), 785—796.

- [2] *Lectures on Turbulence Theory*, Boston, Mass. (1975).

Чоу, Малле-Паре (Chow S. N., Mallet-Paret J.)

- [1] Integral Averaging and Bifurcation, J. Diff. Eq. 26 (1977), № 1.
Шарковский А. Н.
- [1*] Существование циклов непрерывного преобразования прямой в прямую. — Укр. мат. ж. 16 (1964), № 1, 61.
- Шильников Л. П.
- [1*] Теория бифуркаций динамических систем с гомоклиническими кривыми Пуанкаре. VII Internationale Konferenz über nichtlineare Schwingungen, Band 1, 2, Akademie — Verlag, Berlin, 1977.
- [2*] О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий. — Мат. сб., 61 (104), 433—466 (1963).
- [3*] О рождении периодического движения из траектории, идущей из состояния равновесия седло-седло в него же. — ДАН СССР, 170, № 1, 49—52 (1966).
- [4*] О рождении периодического движения из траектории двояко-асимптотической к состоянию равновесия типа седло. — Мат. сб., 77 (119), № 3, 461—472 (1968).
- Шинброт (Shinbrot M.)
- [1*] Lectures on Fluid Mechanics, Gordon-Breach, 1973.
- Шлихтинг Г.
- [1] Возникновение турбулентности, пер. с нем. — М.: ИЛ, 1962.
- Шмидт, Свит (Schmidt D. S., Sweet D.)
- [1] A unifying theory in determining periodic families for Hamiltonial systems at resonance, J. Diff. Eq. 14 (1973), 597—609.
- Шоке (Choquet G.)
- [1] Lectures on Analysis, (3 vols), W. A. Benjamin (1969).
- Шуб (Shub M.)
- [1] Topologically Transitive Diffeomorphism of T^4 , Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems, L. N. vol. 206, 39—40.
- Эбин (Ebin D. G.)
- [1] Espace des metriques Riemanniennes et mouvement des fluides via les varietes d'applications, Lect. Notes, Ecole Polytechnique, et Université de Paris VII (1972).
- Эбин, Марсден (Ebin D. G., Marsden J.)
- [1] Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid, Ann Math., 92 (1970), 102—163. [Имеется перевод: — сб. Математика, 17:5 (1973), 142—167.]
- Юдович В. И.
- [1] Периодические движения вязкой несжимаемой жидкости. — ДАН СССР, 130 (1960), № 6, 1214—1217.
- [2] Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости. — ЖВМ и МФ, 3 (1963), № 6, 1032—1065.
- [3] Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости сквозь заданную область. — Мат. сб., 64 (1964), № 4, 562—588.
- [4] Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. — ПММ, 29 (1965), в. 3, 453—467.
- [5] Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости. — ДАН СССР, 161 (1965), № 5, 1037—1040.
- [6] О возникновении конвекций. — ПММ, 30 (1966) в. 6.
- [7] Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. — ПММ, 30 (1966), в. 3.
- [8] Об устойчивости вынужденных колебаний жидкости. — ДАН СССР, 193 (1970), № 2, 292—295.
- [9] Об устойчивости автоколебаний жидкости. — ДАН СССР, 193 (1970), № 3.
- [10] Возникновение автоколебаний в жидкости. — ПММ, 35 (1971).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редакторов перевода	5
Предисловие	8
Глава 1. Введение в теорию устойчивости и теорию бифуркаций в динамических системах и гидромеханике	11
Глава 2. Теорема о центральном многообразии	31
Глава 2А. Некоторые сведения из спектральной теории	48
Глава 2В. Отображение Пуанкаре	53
Глава 3. Теорема Хопфа в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}^n$	58
Глава 3А. Другие бифуркационные теоремы	76
Глава 3В. Более общие условия устойчивости	81
Глава 3С. Бифуркационная теорема Хопфа и теорема Ляпунова о центре. <i>Дитер С. Шмидт</i>	85
Глава 4. Вычисление условий устойчивости	92
Глава 4А. Алгоритм применения формулы устойчивости	113
Глава 4В. Примеры	116
Глава 4С. Бифуркация рождения цикла и метод усреднения. <i>С. Чоу и Ж. Малле-Паре</i>	126
Глава 5. Перевод оригинальной работы Хопфа	134
Глава 5А. Редакторские комментарии Л. Н. Ховарда и Н. Коппель	155
Глава 6. Бифуркационная теорема для диффеоморфизмов	164
Глава 6А. Каноническая форма	173
Глава 7. Бифуркации в системах с симметрией. <i>С. Шектер</i>	176
Глава 8. Бифуркационные теоремы для уравнений с частными производными	195
Глава 8А. Заметки по нелинейным полугруппам	201
Глава 9. Бифуркации в гидродинамике и проблема турбулентности	222
Глава 9А. О работе Г. Иосса. <i>Г. Чайлдс</i>	237
Глава 9В. О работе Киршгасснера и Кильхёффера. <i>О. Руиз</i>	245
Глава 10. Бифуркации в моделях популяций. <i>Г. Остер и Дж. Гукенхеймер</i>	254
Глава 11. Математическая модель взаимодействия двух клеток, использующая уравнение Тьюринга. <i>С. Смейл</i>	274
Глава 12. Странный, странный аттрактор. <i>Дж. Гукенхеймер</i>	284
Дополнение I. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости состояний равновесия и периодических движений («опасные» и «безопасные» границы). <i>Н. Н. Баутин, Л. П. Шильников</i>	294
Дополнение II. Теория бифуркаций и модель Лоренца. <i>Л. П. Шильников</i>	317
Дополнение III. Комментарии к теореме Хопфа. <i>Е. А. Леонтович</i>	336
Примечания редакторов перевода	345
Литература	350

1 р. 50 к.

Главным сюжетом этой книги является бифуркация рождения предельного цикла из сложного фокуса конечномерной динамической системы... Большой интерес представляет применение теории к уравнениям в частных производных и особенно — к задачам гидродинамики... Отметим, в частности, пример с течением Куэтта, обсуждение концепции Рюэля и Такенса возникновения турбулентности, изложение оригинальной работы Иосса по возникновению периодического течения из стационарного...

Эта книга, особенно в части приложений теории к самым различным задачам, представляет живой интерес. Мы надеемся, что ее русское издание привлечет внимание читателей к поискам новых приложений этой классической теории.

Из предисловия к русскому изданию

Дж.Маросден, М.Мак-Кракен
нэнди-мид

**БНТХУНЖАЛЫК
РОЖДЕННЯ И ЕЕ ПРИЖИВЛЕННЯ
И ВУЖИТЪ ЗЕПЪ**